PROBLEME DIN GAZETA MATEMATICA

EDIȚIE SELECTIVĂ ȘI METODOLOGICĂ

N. Teodorescu
A. Constantinescu * Mihaela Mihai
L. Pîrșan * E. Perjeriu * A. Popescu-Zorica
P. Radovici-Mărculescu * M. Țena

EDITURA TEHNICĂ

Cu prilejul centenarului apariţiei primei reviste de matematică din ţară „Recreaţii Ştiinţifice", ca omagiu adus matematicienilor ei şi creatorilor „Gazetei Matematice", moştenitoare fidelă şi recunoscătoare a creaţiei ştiinţifice de masă, considerăm o datorie să redăm, din imensul tezaur de probleme de la înfiinţarea acestor reviste şi pînă în prezent, o culegere de probleme alese dintre cele mai semnificative prin conţinutul lor tematic şi prin metodologii de rezolvare

Acad. NICOLAE TEODORESCU
ALEXANDRU CONSTANTINESCU • MIHAELA MIHAI
LIVIU PÎRȘAN • EMIL PERJERIU • ALEXANDRU POPESCU-ZORICA
dr. PAUL RADOVICI-MĂRCULESCU • MARCEL ȚENA

PROBLEME DIN GAZETA MATEMATICĂ

Ediție selectivă și metodologică

Coordonator: acad. NICOLAE TEODORESCU

EDITURA TEHNICĂ
București 1984

Redactor: LILI TICOŞ
Tehnoredactor; ELENA GERU
Coperta: SIMONA DUMITRESCU

Bun de tipar, 22.5.84. Coli de tipar, 34. C.Z. 51(976)

Tiparul executat sub comanda
nr.1037 la
Intreprinderea poligrafică
„13 Decembrie 1918",
str. Grigore Alexandrescu nr. 89-97
Bucureşti,
Republica Socialistă România

La résolution d'exercices et de problèmes est pour la maîtrise des mathématiques ce que sont pour la maîtrise de la musique les gammes, les arpèges, les accords, les solfèges, les petites pièces monographiques et même les sonatines.

Mais si en musique il existe une méthodologie d'apprentissage et de perfectionnement, en mathématiques il n'y a pas une telle méthodologie; il y a seulement des recueils de problèmes, des revues de mathématiques où l'on propose et aù l'on donne ensuite des solutions.

En ces dernières décennies différents auteurs ont commencé à souligner la nécessité de méthodologies de résolution, vu que la variété et les difficultés présentées par le nombre de plus en plus grand de problèmes des manuels, revues, examens et concours sont devenues souvent inabordables par la plupart des élèves, étudiants et même des spécialistes utilisateurs des mathématiques, tels que cadres enseignants, ingénieurs, physiciens etc.

Et cela à cette époque où les mathématiques ont pénétré dans toutes les branches de la science, de la pratique économique et industrielle et même dans la culture et les arts!

C'est ce qui nous a conduit à essayer d'utiliser le riche et précieux fonds de problèmes de mathématiques généralement élémentaires, accumulé dans les 87 années d'existence ininterrompue de la revue « Gazeta Matematică » pour en élaborer un recueil selectif et méthodologique de problèmes.

Ce patrimoine este immense et présente une variété remarquable par le fait que les auteurs sont élèves et étudiants, professeurs et ingénieurs anciens collaborateurs de la revue, universitaires parmi lesquels toutes les personalités de l'école mathématique roumain. jusqu'à nos jours et même des mathématiciens étrangers réputés, qui ont apprécié et apprécien cette revue, la plus riche en problèmes de toutes les revues similaires sur le plan international

La recueil est divisé en deux parties; la première, contenant 10 chapitres, rassemble des problèmes de la GM, la seconde, a deux chapitres, des problèmes choisis de différentes revues d'autres pays.

Afin de poursuivre notre but méthodologique et de nous adresser à toutes les catégories de bénéficiaires possibles, nous avons structuré cet ouvrage *non pas par disciplines* et chapîtres de disciplines, mais *par utilités*. Ainsi le premier chapitre est destiné a initier le lecteur dans différentes méthodes et techniques. C'est un chapître d'entraînement suivi par un autre qui contient déjà des problèmes pour les cercles mathématiques d'élèves. Les deux suivants envisagent des problèmes conformément aux programmes des classes élémentaires et supérieures des lycées, destinés à la préparation des concours d'admission à ces classes et de l'examen de baccalauréat. Suivent deux chapîtres contenent des problèmes pour la préparation des olymiiades nationales et internationales.

Un chapître spécial est composé de problèmes difficiles pour les concurrents à divers concours de performances. Nous n'avons pas oublié les concours d'admission aux facultés de mathématiques et à d'autres facultés universitaires ou polytechniques.

Le rôle et la place de l'informatique et des mathématiques appliquées dans la culture mathématique nous ont conduit à les marquer par un chapître spécial. Enfin, pour stimuler la créativité des jeunes élèves et étudiants passionnés et particulièrement douès pour la recherche mathématique, le recueil contient un chapître de problèmes qui suscitent d'autres problèmes.

La seconde partie, qui rassemble des problèmes publiés dans des revues d'autres pays, a pour but d'attirer l'attention des lecteurs sur des thèmes, des méthodes, des techniques et des instruments utilisés dans les problèmes publiés sur le plan international.

En général, nous avons cité avec soin dans tout le recueil les auteurs et les sources, les solutions des problèmes étant conçues par nous. Des généralisations, des extensions, des commentaires constituent nos efforts en vue de mettre le mieux et le plus clairement possible en lumière le caractère sélectif et surtout méthodologique que nous avons voulu assigner à cet ouvrage et nous avons tiré un véritable plaisir intellectuel en découvrant des problèmes dont nous avons enrichi notre culture en mathématiques élémentaires.

Nous croyons avoir fait un travail utile et agréable destiné à un large cercle de lecteurs de toutes catégories en rendant hommage à une revue qui a subsisté depuis 1895 et a à présent

ЗАДАЧИ ИЗ „МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ГАЗЕТЫ"

Существует большое число разнообразных сборников задач по математике на всех языках мира, но почти ни один из них не дает читателю представления о методологии решения задач, а только их примеры со множеством обычно не систематизированных методов решений и рассуждений.

Румынский журнал «Математическая газета» завоевал себе известность из поколения в поколение большим числом оригинальных задач и упражнений предложенных преподавателями, инженерами, студентами и одаренными учащимися школ, и является источником вдохновения для авторов многих стран с хорошей математической традицией.

Задачи для сборника выбирались так, чтобы и начинающему читателю, и опытному математику было интересно сделать экскурсию в богатое наследство журнала, изложенное в книге на современном математическом языке.

В сборнике две части. В первой части собраны задачи из журнала с начала его издания и до наших дней, а во второй части — задачи из других научных журналов, с хорошо подобранными решениями и с замечаниями и комментариями академика Н. Теодореску.

В первых главах книги даны более легкие задачи, которые знакомят читателя с тематикой книги, затем идут задачи, данные участникам математических кружков, то есть проблемы повышенной трудности и более широкой тематики, и задачи, предложенные абитуриентам при поступлении в вузы.

Отдельная глава посвящена более сложным конкурсным проблемам, которые сами порождают ряд новых задач; эта глава для мыслящих, которые ищут и открывают новые пути в науке.

Часто авторы предлагают свои собственные решения задач, но ни разу не дают старое решение без соответствующей переработки. Это — отличительная черта сборника, который авторы предлагают вниманию читателя, надеясь, что книга будет не только полезна, но и интересна ему, существенное условие любой математической работы.

PREFAȚĂ

Propunerea și rezolvarea de probleme a fost prima formă a cercetării matematice. O găsim sintetizată în vestigiile antichității egiptene și babiloniene, în papirusuri și tăblițe cuneiforme. Deși nu găsim în acestea ceea ce numim astăzi demonstrații, existența unor forme de raționament dincolo de experimentul empiric este de netăgăduit în rețetele de rezolvare cu caracter normativ pe care le-am moștenit printr-una din acele minuni care le-a ferit de distrugere și uitare.

Poate că nu este greu să găsim justificarea minunii în transmiterea din generație în generație nu numai a simbolurilor grafice, ci mai ales a gîndirii creatoare înscrisă în aceste vestigii. O dovadă probabilă este în faptul că filozofii și matematicienii Greciei antice par a fi preluat această moștenire pe căi pe care nu ajungem să le deslușim, dar le bănuim și le simțim.

Ei au ridicat gîndirea matematică la un nivel pe care nu-l descoperim nicicînd în moștenirea trecutului, investind-o cu acest dar nemuritor, care este raționamentul logic — deductiv. Acesta este „miracolul grec" ai cărui beneficiari sîntem, printr-o filieră șovăielnică, dar neîntreruptă de-a lungul secolelor, noi cei de astăzi, care am ridicat matematica la un nivel de abstracție și generalitate neîntîlnite pînă în secolul nostru.

Propunerea și rezolvarea de probleme, deși nu mai constituie corpul principal al investigației matematice, care a sudat problemele monografice în teorii în care acestea sînt înglobate, rămîne o activitate indispensabilă în inițierea, pregătirea și perfecționarea în matematică, în primul rînd a elevilor, adolescenților, dar cu mult folos și specialiștilor formați, matematicieni sau utilizatori ai matematicii.

În țara noastră, publicațiile periodice destinate propagării gustului și competenței pentru propunerea și rezolvarea de probleme matematice aniversează un secol de existență.

În 1883 a apărut la Iași, prin dragostea și devotamentul unui grup de intelectuali de seamă, profesori universitari sau secundari, ingineri, fizicieni, medici, revista „Recreații matematice", căreia Universitatea din Iași și Societatea de Științe Matematice din R. S. România i-au aniversat centenarul apariției la sfîrșitul anului 1983.

Din cauza unor greutăți materiale de netrecut, revista și-a încetat apariția 6 ani mai tîrziu în 1889, lăsînd un gol în care s-a adăpostit și a supraviețuit regretul și dorința de renaștere.

În 1895, cînd România construia podul de la Cernavodă, una dintre senzaționalele realizări ale tehnicii sfîrșitului de veac, trecută peste cel următor în

care dăinuiește și astăzi, un grup de trei ingineri tineri români, completat cu un matematician a luat hotărîrea de a reînvia revista „Recreații Științifice" la București sub numele de „Gazeta Matematică", *publicație lunară pentru tineret.*

Strîngînd în jurul lor alți entuziaști și dăruind din salariile lor contribuția necesară cheltuielilor de tipărire și difuzare, acești patru stîlpi, cum s-au autonumit, ai Gazetei Matematice, au clădit de-a lungul podului și al secolului nostru, o revistă care n-a mai murit, ci a supraviețuit pînă astăzi.

Cei patru stîlpi, pe care cu recunoștință se cuvine să-i elogiem și astăzi au fost: ing. I. Ionescu, prof. Gh. Țițeica, ing. A. G. Ioachimescu *și* ing. V. Cristescu. *Revista a început să publice probleme propuse de autori, ca și de alte personalități ale timpului, printre care* Traian Lalescu *s-a distins începînd ca elev în clasa VI-a de liceu pînă la pierderea sa prematură, creînd o emulație impresionantă și un prestigiu de nivel național acestei publicații pe care* Spiru Haret, *ca ministru al învățămîntului a elogiat-o în parlamentul țării și în Academia Română.*

Preluînd ștafeta încredințată de predecesorii noștri, de profesorii pe care i-am avut în liceu și în universitate, am reușit, din însărcinarea partidului și guvernului, să transformăm Gazeta Matematică într-o publicație de masă. De unde înainte de cel de al doilea război mondial număram 2000—3000 abonați, — de altfel toți activi rezolvitori și propunători sau autori de articole și note — astăzi Gazeta are un tiraj de 80 000—110 000 exemplare lunar, care în imensa majoritate merg la abonați.

Culegerea, alcătuită de un grup de redactori și de activiști ai Gazetei Matematice, se distinge de toate celelalte fiind împărțită nu pe materii și clase, ci pe utilități, pornind de la inițierea în rezolvare și ajungînd prin concursuri de treaptă, admitere, olimpiade naționale și internaționale, concursul propriu anual a rezolvitorilor Gazetei, ajuns la a cincea ediție, la probleme care suscită alte probleme, destinate vîrfurilor tineretului nostru matematic.

Pentru a marca spiritul de originalitate al creației românești de probleme, ca și bogăția acestei creații, fiecare număr al Gazetei avînd peste 100 probleme, am selecționat în partea a doua a volumului, două capitole cu probleme din reviste străine. Astfel, ne vom da seama că și alte popoare se străduiesc să-și pregătească viitorii matematicieni și specialiști care folosesc creativ matematica și vom însufleți spiritul de întrecere înălțătoare și sportivă, condiție esențială în competițiile matematice.

Coordonarea lucrării a fost în sarcina noastră și ne-a pasionat ca și culegerea și elaborarea soluțiilor problemelor din revistele străine, convins fiind de necesitatea cunoașterii preocupărilor tineretului matematic din alte țări.

Culegerea noastră este completată cu introduceri tematice la fiecare capitol și cu numeroase comentarii. Ea este rodul unor sentimente de recunoștință și de respectuoasă prețuire pentru înaintași și am dori să trezească în inimile tineretului sentimente asemănătoare, ca și îndemnul de a face mai mult, mai bine și mai frumos decît noi pentru prestigiul matematicii românești.

Acad. N. TEODORESCU
22 februarie, 1984

CUPRINS

Prefață 7

PARTEA I. **Probleme alese din Gazeta Matematică**

Cap. I. Probleme pregătitoare (P) 11
Cap. II. Probleme pentru cercurile de matematică (CE) 51
Cap. III. Probleme pentru treapta întîi (T_1) 101
Cap. IV. Probleme pentru treapta a doua (T_2) 144
Cap. V. Probleme pentru concursuri (CO) 178
Cap. VI. Probleme pregătitoare pentru Olimpiade Naționale (ON) 236
Cap. VII. Probleme pregătitoare pentru Olimpiade Internaționale (OIM) 269
Cap. VIII. Probleme deosebite care suscită alte probleme (PD) 295
Cap. IX. Probleme pentru examenele de admitere în facultăți (A) 341
Cap X. Probleme de informatică și modelare matematică (I) 406

PARTEA a II-a. **Probleme din reviste de matematică din străinătate**

Cap. XI. Probleme interdisciplinare cu soluții aplicative (SA) 419
Cap. XII, Probleme generale cu soluții complexe (SC) 480
Indice de materii 537
Indice de nume 542

REVISTE UTILIZATE ŞI ABREVIERI

G.M. — Gazeta Matematică.
G.M.F.B. — Gazeta Matematică şi Fizică seria B.
G.M.B.— Gazeta Matematică seria B.
G.M.A. — Gazeta Matematică seria A.
Alpha.
Kvant.
Matematika v şkole.
Közepiskolai Matematíkaí Lapok.
A.M.M. — American Mathematical Monthly.
N.A.W. — Nieuw Archief voor Wiskunde.
Fib. Quart. — Fibonacci Quarterly.
Ontario Math. Bull. — Ontario Mathematical Bulletin.
M.U. — Mathematik Unterricht.
Ontario Sec. Sch. Math. Bull. — Ontario Secondary School Mathematica Bulletin.
Sch. Math. Pr. B. T. — School Mathematics Project Book T.
Sch. Math. Pr. Teacher's Guide B. T. — School Mathematics Project Teacher's Guide Book T.
Sch. Math. Proj. Book — School Mathematics Project Book.
Math. Gazette — The Mathematical Gazette.
Math. Teachers — Mathematics Teachers.
Math. et Péd. — Mathematique et Pédagogie.
El. der Math. — Elemente der Mathematik.

Partea întîi

PROBLEME ALESE DIN GAZETA MATEMATICĂ

Capitolul I

PROBLEME PREGĂTITOARE (P)

Introducere

Capitolul I conține probleme pregătitoare care se adresează elevilor, dar nu numai elevilor, ci și oricărui cititor care urmărește o abordare operațională a procesului de rezolvare de probleme de matematici elementare, mai precis din programele învățămîntului liceal. Culese din Gazeta Matematică, alegerea lor a fost făcută cu scopuri metodologice, în primul rînd pentru a oferi cititorului soluții amănunțite pe căi directe sau uneori comporîtnd unele artificii de raționament sau de tehnică matematică.

Fiindcă teoria numerelor se poate studia fără a avea o pregătire matematică mai complexă prin cunoștințe de bază din alte domenii ca analiza, algebra sau geometria, acest capitol oferă la început tentația de a rezolva probleme de teoria numerelor. Ar fi însă o dovadă de neconcordanță cu scopurile metodologice urmărite dacă am afirma că astfel de probleme sînt mai simple sau mai ușoare decît altele. Dimpotrivă, titlul de *„regina matematicii"* pe care marele și exigentul *Gauss* îl acorda teoriei numerelor, ne îndeamnă să prevenim pe cititor că în acest domeniu nu se pot indica metode generale de rezolvare și că fiecare problemă care are un conținut tematic semnificativ, pune în joc o metodă oarecum — dacă nu complet — specifică. În consecință, căile directe nu sînt deosebit de numeroase, totuși ele există, cum este cazul problemelor 1, 2, 3, 4. Nu mai este însă și cazul unor probleme ca 5, 6, 7, 8. Considerăm că stăpînirea cîtorva căi de rezolvare este de natură să stimuleze pe cititor, să pună el însuși probleme și să le caute rezolvarea.

Observații de natură metodologică analoge sînt valabile și pentru problemele de algebră cărora li s-a acordat un loc tot atît de important în acest capitol. Aici vom găsi probleme semnate de *Gh. Țițeica* (P 7)., *E. N.Barisien* (*P* 14), *Th. Angheluță* (P 16), nume prestigioase din primele decenii ale secolului nostru, autori de la care se pot învăța tehnici și însuși metode prețioase.

În ceea ce privește problemele de geometrie, cele prezentate în acest capitol sînt deosebit de instructive, cu soluții originale, dintre care unele pot sugera aplicații rodnice și în alte cazuri. Printre cei ce semnează astfel de probleme vom găsi pe *Al. Pantazi* (P 59) *I. Ionescu* (P 60), *D. V. Ionescu* (P 61), *Gh. Buicliu* (P 63).

Trigonometria a stimulat în primele decenii ale secolului imaginația și talentul marilor noștri matematicieni și profesori ca *Traian Lalescu* (P 44) sau *O. N. Țino* (P 46) și nici astăzi nu este de neglijat, cum din păcate se face atît în manuale, cît și în reviste. În acest volum vom regăsi și în capitolele următoare subliniind mereu utilitatea stăpînirii rodnice a metodelor trigonometrice.

Probleme de teoria probabilităților apar mai rar prin G.M. ceea ce constituie o lipsă în pregătirea viitorilor matematicieni, ca și a altor specialiști, care folosesc matematica. De aceea, am introdus cîteva astfel de probleme, care se găsesc des și au un conținut atrăgător în revistele străine, în acest capitol pregătitor și recomandăm cititorului să le examineze cu interes. Răsplata va fi inițierea în gîndirea probabilistă indispensabilă în studiul fenomenelor complexe din natură, viață și societate.

P 1. *Să se demonstreze că polinomul* $P \in \mathbf{Z}[x]$,

$$P(x) = x^{na_{n-1}+n-1} + x^{na_{n-2}+n-2} + \ldots + x^{na_1+1}$$

este divizibil în inelul $\mathbf{Z}[x]$ *cu polinomul* $Q \in \mathbf{Z}[x]$,

$$Q(x) = x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1,$$

unde a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_1 *sînt numere naturale.*

L. Pîrșan, G.M. 11/1964

Soluție. Vom ține seama de echivalența

$$P \vdots Q \Leftrightarrow (P - Q) \vdots Q.$$

Dar

$$P(x) - Q(x) = x^{n-1}(x^{na_{n-1}} - 1) + x^{n-2}(x^{na_{n-2}} - 1) + \ldots + x\,(x^{na_1} - 1).$$

Însă

$$x^{na_k} - 1 = [(x^n)^{a_k} - 1] \vdots (x^n - 1) \vdots (x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + 1)$$

și demonstrația este terminată.

P 2. *Dacă* x_1, x_2, x_3 *sînt rădăcinile ecuației* $x^3 - 1 = 0$, *să se arate că* $x_1^n + x_2^n + x_3^n = x_1^n \cdot x_2^n + x_1^n \cdot x_3^n + x_2^n \cdot x_3^n$, *unde* $n \in \mathbf{N}$.

D. Stan, G. M. 12/1964

Soluție. $x_1 = 1$ și $x_2\, x_3 = 1$ deci relația de demonstrat devine $1 + x_2^n + x_3^n = x_2^n + x_3^n + 1$, care este evidentă.

P 3. *Să se arate că dacă a, b, c sînt numere strict pozitive, atunci*

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geqslant\frac{3}{2}$$

şi apoi să se arate că dacă $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *sînt strict pozitive, atunci*

$$\frac{a_1}{a_2+a_3+\ldots+a_n}+\frac{a_2}{a_1+a_3+\ldots+a_n}+\ldots+\frac{a_n}{a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}}\geqslant$$

$$\geqslant\frac{n}{n-1}.$$

Olimpiada de matematică, R.P. Polonă. G.M. 6/1959

Soluţie. Notăm $b+c=2A$, $c+a=2B$, $a+b=2C$ unde A, B, C sînt numere strict pozitive. Rezultă $a+b+c=A+B+C$ deci $a=-A+B+C$, $b=A-B+C$, $c=A+B-C$. Inegalitatea de demonstrat devine

$$\Sigma\frac{-A+B+C}{2A}\geqslant\frac{3}{2}\qquad\text{sau}\qquad\Sigma\frac{B+C}{2A}\geqslant\frac{6}{2}$$

sau

$$\Sigma\left(\frac{B}{A}+\frac{A}{B}\right)\geqslant 6,$$

inegalitate evidentă, deoarece $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geqslant 2$ dacă a, b sînt numere strict pozitive. Pentru a demonstra inegalitatea generală vom face notaţiile:

$a_2+a_3+\ldots+a_n=(n-1)A_1$. $a_1+a_3+\ldots+a_n=(n-1)A_2$, ..., $a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}=(n-1)A_n$.

Deci

$$a_1=(2-n)A_1+A_2+\ldots+A_n,\ \ldots,\ a_n=A_1+A_2+\ldots+(2-n)A_n.$$

Inegalitatea de demonstrat devine

$$\frac{(2-n)A_1+A_3+\ldots+A_n}{(n-1)A_1}+\ldots+\frac{A_1+A_2+\ldots+(2-n)A_n}{(n-1)A_n}\geqslant\frac{n}{n-1}$$

sau

$$\left(\frac{A_3}{A_1}+\ldots+\frac{A_n}{A_1}\right)+\ldots+\left(\frac{A_1}{A_n}+\ldots+\frac{A_{n-1}}{A_n}\right)\geqslant n(n-1),\qquad(1)$$

care este evidentă, deoarece $a/b+b/a\geqslant 2$ şi numărul fracţiilor din membrul stîng al inegalităţii (1) este $2C_n^2$.

P 4. *Știind că* $\sqrt[3]{a+bi} = x + yi$, $\sqrt[3]{a'+b'i} = y + xi$, ($a$, b, a', b', x, y *fiind numere reale*) *cu* $a^2 + b^2 \neq 0$, *să se demonstreze relația*

$$x^2 + y^2 = \frac{a'^2 + b'^2}{a^2 + b^2}.$$

D. Tudorof, G.M. 6/1959

Soluție. Avem $\sqrt[3]{a+bi} = x + yi$. Prin ridicare la cub în ambii membri obținem

$$a + bi = x^3 + 3x^3yi - 3xy^2 - y^3i.$$

Rezultă

$$x^3 - 3xy^2 = a \text{ și } 3x^2y - y^3 = b.$$

Ridicînd ambele egalități la pătrat și adunîndu-le obținem

$$(x^2 + y^2)^3 = a^2 + b^2. \tag{1}$$

Raționînd în mod asemănător, din egalitatea $\sqrt[3]{a'+b'i} = y + xi$ obținem

$$(x^2 + y^2)^4 = a'^2 + b'^2. \tag{2}$$

Împărțind egalitățile (2) și (1) membru cu membru obținem

$$x^2 + y^2 = \frac{a'^2 + b'^2}{a^2 + b^2}.$$

P 5. *Să se verifice identitatea*

$$\log_{a^1} x + \log_{a^2} x + \ldots + \log_{a^{n(n+1)}} x = \log_a \sqrt[n+1]{x^n}.$$

Petre Simion, G.M. 4/1959

Soluție. Deoarece $\log_{a^p} x = \frac{1}{p} \log_a x$, revine la a arăta că:

$$\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}\right] \log_a x = \frac{n}{n+1} \log_a x \tag{1}$$

Însă $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$ și egalitatea (1) este evidentă.

P 6. *Să se rezolve ecuația* $8x^4 - 8x^3 + x + a = 0$ *și să se verifice soluțiile pentru* $a = 0$.

I. V. Mătieș, G.M. vol. XLII, 1938

Soluții. 1) Ecuația se mai poate scrie sub forma

$$2(2x^2 - x)^2 - (2x^2 - x) + a = 0.$$

Se face substituția $2x^2 - x = y$ și se obține

$$2y^2 - y + a = 0, \text{ ale cărei rădăcini sînt: } y_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 8a}}{4}.$$

Deci ecuația are soluțiile $x_{1,2,3,4} = \frac{1 \pm \sqrt{3 \pm 2\sqrt{1 - 8a}}}{4}$.

Pentru $a = 0$, aceste rădăcini sînt

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{4}; \quad x_2 = 0, \; x_3 = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}, \quad x_4 = \frac{1}{2}$$

și ecuația dată devine

$$x(8x^3 - 8x^2 + 1) = 0, \; x(2x - 1)(4x^2 - 2x - 1) = 0.$$

2) Facem substituția $x = y + h$ cu condiția ca ecuația în y ce se obține să nu aibă termen de gradul al treilea. Se găsește ușor $h = 1/4$, iar ecuația în y este $8y^4 - 3y^2 + 5/32 + a = 0$, care este o ecuație bipătrată de rădăcini $y_i (i = 1, 2, 3, 4)$. Rădăcinile ecuație inițiale vor fi:

$x_i = y_i + 1/4$, care sînt aceleași ca la prima soluție.

Avem $y^2 = \frac{48 \pm \sqrt{48^2 - 256(5 + 32a)}}{256} = \frac{3 \pm 2\sqrt{1 - 8a}}{16}$ și $x_{1,2,3,4} = \frac{1}{4} \pm$

$\pm \sqrt{\frac{3 \pm 2\sqrt{1 - 8a}}{16}}$.

3) Ecuația se mai poate scrie

$$8x^4 - 8x^3 + x + a = (x^2 + \alpha x + \beta)(x^2 + \alpha' x + \beta')$$

și identificăm coeficienții: $\alpha = \alpha' = -\frac{1}{2}$; $\beta, \beta' = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 8a}}{8}$.

Deci ecuația din enunț se poate descompune în ecuațiile

$$8x^2 - 4x - 1 \pm \sqrt{1 - 8a} = 0,$$

ecuații ce au aceleași soluții ca și cele de mai sus.

Comentariu. Asupra lui a nu s-a făcut nici o precizare.
Pentru $a \leqslant 1/8$, y_i, respectiv β și β' sînt reali.
Pentru $-5/32 < a \leqslant 1/8$ toate soluțiile devin reale, deoarece:

$$\frac{3 \pm 2\sqrt{1 - 8a}}{16} \geqslant 0 \Leftrightarrow -\frac{5}{32} < a.$$

P 7. *Să se determine numărul întreg* α *așa încît ecuația* $x^3 - (\alpha + 7)x + \alpha = 0$ *să admită o rădăcină care să fie număr întreg și să se găsească apoi rădăcinile ecuației.*

G. Țițeica, G.M. vol. VII, 1902

Soluție. Fie a valoarea întreagă a lui x care verifică ecuația dată; avem $a^3 - (\alpha + 7)a + \alpha = 0$, de unde $\alpha(a - 1) = a^3 - 7a$ și mai departe.

$$\alpha = \frac{a(a^2 - 7)}{a - 1} = a(a + 1) - \frac{6a}{a - 1}.$$

Deoarece α este un număr întreg, va trebui ca $6a$ să se dividă cu $a - 1$; însă a și $a - 1$ sînt prime între ele, deci $a - 1$ trebuie să fie un divizor al lui 6. Deci

$(a - 1) \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$ de unde $a \in \{2, 0, 3, -1, 4, -2, 7, -5\}$;

rezultă că $\alpha \in \{-6, 0, 3, -8, 12, -2, 49, 15\}$.

Avem respectiv

$\alpha = -6 \Rightarrow x^3 - x - 6 = 0 \Rightarrow x_1 = 2$, $\quad x_2, x_3 \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$

$\alpha = 0 \Rightarrow x^3 - 7x = 0 \Rightarrow x_1 = 0$, $\quad x_{2,3} = \pm\sqrt{7}$;

$\alpha = 8 \Rightarrow x^3 - 10x + 3 = 0 \Rightarrow x_1 = 3$, $\quad x_{2,3} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}$;

$\alpha = -3 \Rightarrow x^3 - 4x - 3 = 0 \Rightarrow x_1 = -1$, $\quad x_{2,3} = \dfrac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$;

$\alpha = 12 \Rightarrow x^3 - 19x + 12 = 0 \Rightarrow x_1 = 4$, $\quad x_{2,3} = -2 \pm \sqrt{7}$;

$\alpha = -2 \Rightarrow x^3 - 5x - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = -2$, $\quad x_{2,3} = 1 \pm \sqrt{2}$;

$\alpha = 49 \Rightarrow x^3 - 56x + 49 = 0 \Rightarrow x_1 = 7$, $\quad x_{2,3} = \dfrac{-7 \pm \sqrt{77}}{2}$;

$\alpha = 15 \Rightarrow x^3 - 22x + 15 = 0 \Rightarrow x_1 = -5$, $\quad x_{2,3} = \dfrac{5 \pm \sqrt{13}}{2}$;

P 8. *Să se determine parametrii* m *și* n *în așa fel ca ecuațiile:*

$$x^4 + mx + n = 0 \text{ și } x^4 + 3nx + m = 0$$

să aibă două rădăcini comune și să se rezolve ecuațiile în acest caz.

G. Lazăr, G.M. 4/1914

Soluție. Pentru că ecuațiile au două rădăcini comune, rezultă că vor admite un divizor de gradul al doilea și deci restul de gradul întîi ce se obține la căutarea celui mai mare divizor comun, trebuie să fie nul. Operațiile pentru determinarea celui mai mare divizor comun sînt

$$\begin{array}{l|l} x^4 + 3nx + m & x^3 + mx + n \\ \quad - mx^2 - nx & \hline x \\ \hline - mx^2 + 2nx + m & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} mx^3 + m^2x + mn & mx^2 - 2nx - m \\ \quad 2nx^2 + mx & \hline x + 2n \\ \hline & \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2nx^2 + x(m^2 + m) + mn \\ 2nnx^2 + xm(m^2 + m) + m^2n \\ \hline 4n^2x + 2nm \\ \hline x(m^3 + m^2 + n^2) + nm(m + 2) \end{array}.$$

Deci $$m^3 + m^2 + n^2 = 0,\ mn\,(m + 2) = 0, \qquad (1)$$

Rădăcinile comune sînt date de:

$$mx^2 - 2nx - m = 0,\ (2).$$

Din ecuațiile (1) obținem

$$m = n = 0,\ n = 0,\ m = -1;\ m = -2,\ n = \pm 1.$$

I. Dacă $m = n = 0$, atunci ecuațiile au formele $x^3 = 0$, $x^4 = 0$, iar ecuația (2) este o identitate, deci trei rădăcini nule comune.

II. Pentru $n = 0, m = -1$ se obține $x(x^2 - 1) = 0, (x^2 - 1)(x^2 + 1) = 0$, rădăcinile comune fiind ± 1.

III. Dacă $m = -2$, $n = 1$, ecuațiile devin

$$x^3 + 2x + 1 = 0,\ x^4 + 3x - 2 = 0.$$

Rădăcinile comune sînt date de (2):

$$x^2 + x - 1 = 0,\ \ x_{1,2} = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{5}).$$

Celelalte rădăcini le aflăm scriind relațiile între rădăcini și coeficienți:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0,\ x_3 = 1,\ x_3' + x_4' = 1,\ x_3'x_4' = 2,\ x_{3,4}' = \frac{1}{2}(1 \pm i\sqrt{7}).$$

IV. Dacă $m = -2$, $n = -1$, ecuațiile sînt

$$x^3 - 2x - 1 = \left(x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)(x+1) = 0$$

$$x^4 + 3x - 2 = \left(x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \cdot$$

$$\cdot\left(x - \frac{-1+i\sqrt{7}}{2}\right)\left(x - \frac{-1-i\sqrt{7}}{2}\right) = 0.$$

P 9. Să se arate că dacă $x, y, z \in \mathbf{R}$ și $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, avem $-\sqrt{3} \leqslant x + y + z \leqslant \sqrt{3}$.

Petre Simon, G.M.F.B. 11/1957

Soluție. Avem inegalitățile evidente $x^2 + y^2 \geqslant 2xy$; $y^2 + z^2 \geqslant 2yz$; $z^2 + x^2 \geqslant 2zx$.

Adunînd cele trei inegalități membru cu membru rezultă

$2(x^2 + y^2 + z^2) \geqslant 2(xy + yz + zx)$ sau $3(x^2 + y^2 + z^2) \geqslant (x + y + z)^2$.

Dar ținînd cont de ipoteză rezultă

$$(x + y + z)^2 \leqslant 3 \text{ sau } -\sqrt{3} \leqslant x + y + z \leqslant \sqrt{3}.$$

P 10. *Să se demonstreze identitatea*

$$\sum_{k=1}^{m-1} C_m^k = 2 \sum_{k=1}^{m-1} C_{m-1}^k.$$

Fl. Dumitrescu, G. M. vol. XVIII, 1912

Soluție. Se știe că avem

$$C_m^n = C_{m-1}^n + C_{m-1}^{n-1}.$$

Dînd lui n valori de la 1 la $m - 1$ rezultă

$$C_m^1 = C_{m-1}^1 + 1 = C_{m-1}^1 + C_{m-1}^{m-1};$$

$$C_m^2 = C_{m-1}^2 + C_{m-1}^1;$$

$$C_m^3 = C_{m-1}^3 + C_{m-1}^2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$C_m^{m-1} = C_{m-1}^{m-1} + C_{m-1}^{m-2}.$$

Adunînd aceste egalități membru cu membru rezultă

$$\sum_{k=1}^{m-1} C_m^k = 2 \sum_{k=1}^{m-1} C_{m-1}^k.$$

P 11. *Să se arate că un număr natural se divide cu 19 dacă suprimîndu-i ultima cifră și micșorînd numărul rămas cu 17, înmulțit cu cifra suprimată, obținem un rezultat divizibil cu 19.*

A. Selgianu, G. M. vol. XXI, 1916

Soluție. Fie N numărul căutat și n ultima sa cifră. Din enunț avem:

$$\frac{N-n}{10} - 17n = 19t \text{ sau } N - 171n = 190t \text{ sau } N = 19(10+9n).$$

P 12. *Să se rezolve ecuația*

$$C_x^y = x + y, \qquad x \in \mathbf{N}^*;\ y \in \mathbf{N}^*.$$

S. Kaufmann, G.M. 1915

Soluție. Din ipoteză rezultă că $x \geqslant y$. Vom arăta mai mult, și anume că $x \geqslant y + 2$. Pentru aceasta vom arăta că situațiile $x = y$ sau $x = y + 1$ nu sînt favorabile.

Dacă $x = y$ rezultă $2x = 1$ adică $x = 1/2$, soluție ce nu corespunde problemei.

Dacă $x = y + 1$ rezultă

$C_{y+1}^y = 2x + 1$ sau $y + 1 = 2x + 1$ sau încă $y + 1 = 2y + 3$, adică y este un număr negativ.

Rezultă deci că

$$x \geqslant y + 2. \tag{1}$$

Avem acum următoarele cazuri, după valorile lui y:

I. $y = 1$. Ecuația devine $x = x + 1$, deci nu are soluții.

II. $y = 2$. Avem $C_x^2 = x + 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 = 0$ de unde $x = 4$.

III. $y \geqslant 3$. Conform cu relația (1) avem $x \geqslant y + 2$. Dar putem arăta ușor prin inducție matematică după x că avem inegalitatea $C_x^y > x + y$, $(\forall)\ x \geqslant y + 2$.

Așadar în acest caz ecuația nu are soluții.

Deci singura soluție a problemei este $x = 4$, $y = 2$.

P 13. *Să se verifice egalitățile:*

$$\frac{\sqrt{3+\sqrt{5}} + \sqrt{4+\sqrt{7}}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}+2} = \frac{\sqrt{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}}{\sqrt{5-\sqrt{5}}+\sqrt{3+\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{4+\sqrt{10-2\sqrt{5}}}}{\sqrt{5+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}}.$$

M. Adam, G. M. vol. XXIX

Soluție. Se vor transforma radicalii dubli. Se va ține seama de egalitatea

$$2\left(4 + \sqrt{10 \pm 2\sqrt{5}}\right) = \left(\sqrt{5 \mp \sqrt{5}} + \sqrt{3 \pm \sqrt{5}}\right)^2$$

Toate fracțiile devin $1/\sqrt{2}$.

P 14. *Să se rezolve ecuația*

$$x^4 + (x + a)^4 + (x + 2a)^4 + (x + 3a)^4 - 18a^4 = 0.$$

E. N. Barisien, G. M. 7/1975

Soluție. Punem $x = y - 3a/2$ și ecuația devine

$$\left(y - \frac{3a}{2}\right)^4 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^4 + \left(y + \frac{a}{2}\right)^4 + \left(y + \frac{3a}{2}\right)^4 - 18a^4 = 0$$

sau

$$4y^4 + 3a^2y^2 - \frac{31}{4}a^4 = 0.$$

Rezolvînd ecuația în y rezultă

$$y_1 = a/2,\ y_2 = -a/2,\ y_3 = ai\sqrt{31}/2,\ y_4 = -ai\sqrt{31}/2.$$

Deci $x_1 = a,\ x_2 = -2a,\ x_3 = (a/2)(i\sqrt{31} - 3),\ x_4 = -(a/2)(i\sqrt{31} + 3)$.

Comentariu. Termenii succesivi sînt în progresie aritmetică cu rația a. Se va produce o simplificare, dacă îi asociem cîte doi prin simetrie, fiindcă se vor reduce unii termeni. Deci vom pune

$$x = y - \lambda,\ x + 3a = y + \lambda \text{ de unde } \lambda = 3a/2.$$

P 15. *Să se calculeze suma*

$$S = \frac{n}{3!} + \frac{n(n-1)}{4!} + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots 3}{n!},$$

n fiind un număr întreg și pozitiv mai mare ca 2.

Gh. Zapan, G. M. vol. XLI, 1935

Soluție. Se înmulțesc ambii membri ai sumei din enunț cu produsul $(n + 2)(n + 1)$ și se obține

$$(n+2)(n+1)S = \frac{(n+2)(n+1)n}{3!} + \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{4!} + \ldots +$$

$$+ \frac{(n+2)(n+1)\ldots 3}{n!} = C_{n+2}^3 + C_{n+2}^4 + \ldots + C_{n+2}^n.$$

Pe de altă parte avem

$$2^{n+2} = 1 + C_{n+2}^1 + C_{n+2}^2 + \ldots + C_{n+2}^{n+2}.$$

Ţinînd cont de această proprietate, relaţia de mai înainte devine

$$(n+2)(n+1)S = 2^{n+2} - 1 - C_{n+2}^1 - C_{n+2}^2 - C_{n+2}^{n+1} - C_{n+2}^{n+2}$$

sau

$$(n+2)(n+1)S = 2^{n+2} - 1 - (n+2) - \frac{(n+2)(n+1)}{2} - (n+2) - 1.$$

Efectuînd calculele rezultă

$$S = \frac{2^{n+2} - (n^2 + 7n + 14)}{2(n+1)(n+2)}.$$

P 16. *Să se stabilească inegalităţile*

$$C_{m+n-1}^n \leqslant m^n; \quad C_n^{m+p} \cdot C_{m+p-1}^{p-1} \leqslant C_n^p C_{n-p}^m,$$

indicînd cazurile în care devin egalităţi.
Numerele m, n, p sînt întregi şi pozitive.

Th. Angheluţă G. M. vol. XLIV, 1938.

Soluţie. Avem $C_{m+n-1}^n = \dfrac{(m+n-1)(m+n-2)\ldots m}{n!}$.

Dar $\dfrac{m+n-1}{n} \leqslant m$ pentru $n = 1, 2, \ldots$ căci $(m-1)(n-1) \geqslant 0$.

Deci $C_{m+n-1}^n \leqslant m^n$, cu egalitate dacă $n = 1$.
Avem

$$C_n^{m+p} \cdot C_{m+p-1}^{p-1} = \frac{p}{m+p} C_n^p \cdot C_{n-p}^m$$

şi cum $p \leqslant m + p$ rezultă inegalitatea din enunţ.
Avem egalitate pentru $m = 0$.

P 17. *Ce fel de triunghi se obţine dacă laturile au lungimile proporţionale cu x, y, z, unde (x, y, z) este soluţia sistemului:*

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ x^2 + y^2 + 3xy = 61 \\ 5z - xy = 13. \end{cases}$$

Iulian Alexiu, G. M. vol. XLV, 1939

Soluţie. Se rezolvă sistemul:

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ x^2 + y^2 + 3xy = 61 \\ 5z - xy = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 7 \\ (x+y)^2 + 3xy = 61 \\ 5z - xy = 13 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 7 \\ xy = 12 \\ 5z = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \\ z = 5. \end{cases}$$

Fie a, b, c lungimile laturilor triunghiului. Se poate scrie

$$\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5} = k.$$

Putem scrie atunci $a = 3k$; $b = 4k$; $c = 5k$.
Aceste valori verifică ecuația $a^2 + b^2 = c^2$.
Deci triunghiul ale cărui laturi sînt proporționale cu soluțiile sistemului dat este un triunghi dreptunghic.

P 18. *Să se demonstreze identitatea*

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot p + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (p+1) + \ldots + (m+1)(m+2) \ldots (m+p) =$$
$$= \frac{(m+1)(m+2) \ldots (m+p+1)}{p+1}.$$

Numerele p, $m \in \mathbf{N}$, $p \geqslant 1$.

* * *, G. M. 5/1959

Soluție. Notăm

$$S_m = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot p + 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (p+1) + \ldots + (m+1)(m+2) \ldots (m+p).$$

Să arătăm că

$$(\forall) m \in \mathbf{N} \text{ avem } S_m = \frac{(m+1)(m+2) \ldots (m+p+1)}{p+1}. \qquad (1)$$

Vom demonstra prin inducție matematică completă.

Pentru $m = 0$ avem $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot p = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (p+1)}{p+1}$ adică $p! = p!$ egalitate evidentă. Presupunem că

$$S_m = \frac{(m+1)(m+2) \ldots (m+p+1)}{p+1}$$

și să demonstrăm că

$$S_{m+1} = \frac{(m+2)(m+3) \ldots (m+p+2)}{p+1}. \qquad (2)$$

În adevăr:

$$S_{m+1} = S_m + (m+2)(m+3) \ldots (m+p+1)$$

sau

$$S_{m+1} = \frac{(m+1)(m+2) \ldots (m+p+1)}{p+1} + (m+2)(m+3) \ldots (m+p+1). \qquad (3)$$

Făcînd calculele în (3), obținem egalitatea (2).

P 19. *Să se arate că*

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{k^3 - k - 1}{(k+1)!} < \frac{5}{2}.$$

Codruța Șiclovan, G. M. 2/1974

Soluție. Calculînd, rezultă

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{k^3 - k - 1}{(k+1)!} = \sum_{k=2}^{n} \frac{k(k-1)(k+1) - 1}{(k+1)!} = \sum_{k=2}^{n} \left[\frac{1}{(k-2)!} - \frac{1}{(k+1)!} \right] =$$

$$= \frac{1}{0!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{1!} - \frac{1}{4!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{6!} + \cdots +$$

$$+ \frac{1}{(n-2)!} - \frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!} -$$

$$- \frac{1}{(n+1)!} = \frac{5}{2} - \left(\frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} \right) < \frac{5}{2}.$$

P 20. *Să se calculeze cea mai mare și cea mai mică valoare a expresiei* $E = 3x - 2x + 4z$, *știind că* $x + 3y + 2z = 3$, $3x + 3y + z = 4$, *iar* x, y, z *sînt numere pozitive sau nule.*

* * * G. M. B. 1/1964

Soluție. Din enunț rezultă sistemul

$$\begin{cases} 3y + 2z = 3 - x, \\ 3y + z = 4 - 3x. \end{cases}$$

Rezolvîndu-l în funcție de x rezultă

$$y = \frac{5(1-x)}{3}\,;\; z = 2x - 1.$$

Dar $y \geqslant 0$ și din $z \geqslant 0$ rezultă $1/2 \leqslant x \leqslant 1$, adică $x_{min} = 1/2$ și $x_{max} = 1$. Expresia dată devine

$$E = 3x - 2y + 4z = (1/3)(43x - 22).$$

Prin urmare avem:

$$E_{min} = (1/3)(43 \cdot 1/2 - 22) = -1/6,$$

$$E_{max} = (1/3)(43 \cdot 1 - 22) = 7 \text{ adică } -1/6 \leqslant E \leqslant 7.$$

P 21. *Să se descompună în factori cu coeficienți întregi, de grad mai mare sau egal cu 1, polinomul*

$$1 + x + x^{p+3} + \ldots + x^{2p+1}, \text{ unde } p \in \mathbf{N},\ p \geqslant 2.$$

N. Soare, G. M. vol. LXXXI, 10/1976

Soluție. Polinomul dat se mai poate scrie:

$1 + x + x^{p+3} + \ldots + x^{2p+1} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^p - x^2 - x^3 - \ldots - x^p - x^{p+1} - x^{p+2} + x^{p+3} + \ldots + x^{2p+1} = (1 - x^2 + x^{p+1}) + (x - x^3 + x^{p+2}) + (x^2 - x^4 + x^{p+3}) + (x^3 - x^5 + x^{p+4}) + \ldots + (x^p - x^{p+2} + x^{2p+1}) = (1 - x^2 + x^{p+1})(1 + x + \ldots + x^p)$.

P 22. *Se dă ecuația* $(m + 1)x^2 - 2(m - 1)x - 8 = 0$.

a) *Să se determine valorile parametrului* $m \in \mathbf{R}$ *astfel încît suma pătratelor rădăcinilor să fie egală cu* 5.

b) *Să se formeze ecuația de gradul patru cu coeficienți reali ale cărei rădăcini sînt valorile lui m determinate la punctul a) și* $1 + 2i$.

Examen de bacalaureat, Ploiești, 1957

Soluție. a) Avem relațiile: $x_1 + x_2 = \dfrac{2(m-1)}{m+1}$ și $x_1x_2 = -\dfrac{8}{m+1}$.

Din acestea deducem $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \dfrac{4(m-1)^2}{m+1} + \dfrac{16}{(m+1)} = \dfrac{4m^2 + 8m + 20}{m^2 + 2m + 1}$. Conform enunțului avem $x_1^2 + x_2^2 = 5$ adică $\dfrac{4m^2 + 8m + 20}{m^2 + 2m + 1} = 5$ deci $m_1 = 3$, $m_2 = -5$. Ecuația va fi $(x-3)(x+5)(x-1-2i)(x-1+2i) = 0$ sau $x^4 - 14x^2 + 40x - 75 = 0$.

P 23. *Să se arate că un grup* $(G, \cdot)$ *cu proprietatea* $(xy)^2 = x^2y^2\ (\forall)x, y \in G$, *este un grup abelian.*

Admitere Institutul Politehnic, București, 1982

Soluție. Avem $xyxy = xxyy$ sau $x^{-1}(xyxy) = x^{-1}(xxyy)$ sau $yxy = xyy$ sau $(yxy)y^{-1} = (xyy)y^{-1}$ sau $yx = xy$, adică grupul este abelian.

P 24. *Definim operația* $*$ *pe* $\mathbf{R}\setminus\{-1, 0\}$ *astfel:* $c * d = c - d + c/d$. *Fie* x_1 *soluția ecuației* $x * a = 0$ *și* x_2 *soluția ecuației* $x * a = 1$. *Să se demonstreze că* $x_1 * x_2 = 0$.

L.C. Pîrșan G.M. 12/1964

Soluție. Din datele problemei rezultă

$$x_2 * a = 1 \text{ sau } x_2 - a + x_2/a = 1 \text{ sau } x_2 = a.$$

Cum $x_1 * a = 0$ iar $x_2 = a$ rezultă $x_1 * x_2 = 0$.

P 25. *Să se formeze o progresie geometrică cu n termeni pozitivi știind că suma dintre primul termen și rație este b, iar suma logaritmilor termenilor este maximă. În ce caz termenii progresiei vor fi numere întregi?*

J. Wittner, G. M. vol. III, 1897

Soluție. Fie a_1 primul termen și r rația progresiei. În condițiile ipotezei $a_1 > 0$ și $r > 0$, deci condiții necesare. Avem $a_1 + r = b$. Suma $\ln a_1 + \ln a_2 + \ldots + \ln a_n = \ln(a_1 \cdot a_n \cdot \ldots \cdot a_n)$ este maximă cînd produsul $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$ este maxim. Dar:

$$a_1 a_2 \ldots a_n = a_1^n \cdot r^{1+2+\ldots+(n-1)} = a_1^n \cdot r^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

și produsul a două puteri cînd suma bazelor e constantă ($a_1 + r = b$) devine maxim cînd bazele puterilor sînt respectiv proporționale cu exponenții:

$$\frac{a_1}{n} = \frac{r}{\frac{n(n-1)}{2}} = \frac{a_1 + r}{\frac{n(n-1)}{2} + n} = \frac{b}{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

Rezultă

$$a_1 = \frac{2b}{n+1},\ r = \frac{n-1}{n+1} b \quad (n \text{ și } b \text{ numere date},\ n \in \mathbb{N}^*,\ b > 0).$$

Termenii progresiei sînt întregi dacă, a_1 și r sînt întregi pozitivi. Deci $b \in \mathbb{N}^*$ și anume b multiplu de $n + 1$ pentru n par și multiplu de $(n + 1)/2$ pentru n impar, sînt condiții suficiente.

P 26. *Un număr întreg N de 3 cifre este pătratul unui număr întreg n. Dacă schimbăm ordinea ultimelor două cifre ale lui N se obține pătratul lui $n + 1$. Să se găsească n.*

A. Odobescu, G. M. vol. XV, 1909

Soluție. Din enunț rezultă $N = 100a + 10b + c = n^2$ și $100a + 10c + b = (n + 1)^2$.

Scăzînd cele două relații rezultă $9(c - b) = 2n + 1$.

Pe de altă parte pătratul lui $n + 1$ avînd trei cifre rezultă

$$10 \leqslant n + 1 \leqslant 31 \text{ sau } 19 \leqslant 2n + 1 = 9(c - b) \leqslant 61 \text{ sau } 3 \leqslant c - b \leqslant 6.$$

Cum diferența $c - b$ este un număr impar rezultă $c - b = 3$ sau $c - b = 5$.

Dacă $c - b = 3$ rezultă $n = 13$. În cazul celeilalte diferențe rezultă $n = 22$, număr ce nu corespunde condițiilor problemei. Deci numărul căutat este $n = 13$.

P 27. *Să se găsească două numere prime astfel încît diferența pătratelor lor să fie egală cu pătratul mediei lor aritmetice.*

A. D. Bunescu, G. M. vol. XVII, 1911

Soluție. Din enunț rezultă

$$a^2 - b^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2,$$

$$a - b = \frac{a+b}{4} \Rightarrow a = \frac{5b}{3}.$$

Cum $(3, 5) = 1$ rezultă că $3 | b$ adică $b = 3k$.
Dar b este un număr prim, deci $k = 1$ și $b = 3$, $a = 5$.

P 28. *Să se rezolve în numere întregi ecuația*

$$x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx.$$

E. Ștefănescu, G. M. vol. XXIX, 1923

Soluție. Ecuația dată se poate generaliza astfel

$$(n-1)\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = 2\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_i x_j, \text{ adică}$$

$$(x_1 - x_2)^2 + (x_1 - x_3)^2 + \ldots + (x_{n-1} - x_n)^2 = 0.$$

Deci $x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = x_n = m$ $(m \in \mathbf{Z})$.

P 29. *Să se demonstreze că numerele $n - 1$ și $np + 1$ nu pot avea alți divizori comuni în afară de divizorii lui $p + 1$.*

Gh. Buicliu, G. M. vol. XLIV, 1938

Soluție. Orice divizor comun al celor două numere este divizor și al sumei lor $n(p + 1)$. Acest produs are ca divizori produsele dintre divizorii lui n și ai lui $p + 1$. Dar divizorii lui n nu divid pe $n - 1$ și nici pe $np + 1$. Deci numai divizorii lui $p + 1$ pot fi divizorii comuni numerelor $n - 1$ și $np + 1$.

P 30. *Să se rezolve în numere întregi pozitive, ecuația:*

$$3^{x^2+y-1} - 3^{x^2+1} = 1944.$$

C. Vasilescu, G. M. vol. VI

Soluție. $3^{x^2+1}(3^{y-2} - 1) = 1944$, $3^{x^2+1}(3^{y-2} - 1) = 3^5 \cdot 2^3$.

Deci $3^{x^2+1} = 3^5$; $3^{y-2} - 1 = 2^3$; $3^{y-2} = 3^2$; avem $x^2 + 1 = 5$, $y - 2 = 2$; $x = 2$, $y = 4$.

P 31. *Să se găsească numerele A și B întregi știind că produsul lor este de k ori (k întreg) mai mare decît suma lor Caz particular $k = 2$.*

Miron Nicolescu, G. M. vol. XXXIX, 1933

Soluție. Din enunț rezultă $AB = k(A + B)$. Se observă că ecuația admite soluția banală $A = B = 0$. Presupunem în cele ce urmează că $A \neq 0$, $B \neq 0$. Deci, putem scrie

$$B = \frac{kA}{A - k} = k + \frac{k^2}{A - k}.$$

Fie d unul din divizorii lui k^2. Atunci va trebui să avem

$$A = k + d \quad \text{și} \quad B = k + \frac{k^2}{d}.$$

Pentru $k = 2$ avem pe ± 1, ± 2, ± 4, divizori ai lui 4. Rezultă deci

$$A = B = 0; \quad A = 3, \ B = 6; \ A = 1, \ B = -2;$$

$$A = 4, \ B = 4; \ A = 6, \ B = 3; \ A = -2, \ B = 1.$$

P 32. *Să se rezolve în numere naturale ecuația*

$$x^2(x^2 + y^2) + x^2(2xy + z) + xyz = 1.$$

Gh. Vasiliu, G. M. vol. XLI, 1935

Soluție. Ecuația dată se mai scrie

$$x[x(x^2 + xy + z) + y(xy + x^2 + z)] = 1;$$

$$x(x + y)(x^2 + xy + z) = 1.$$

Cum rădăcinile ecuației trebuie să fie numai naturale, rezultă

$$\begin{cases} x = 1 \\ x + y = 1 \\ x^2 + xy + z = 1 \end{cases}$$

adică $x = 1$ și $y = z = 0$.

P 33. *Să se determine x, y, z, c și t întregi pozitivi dacă* $2^x \cdot 3^y \cdot 5^{2+z} \cdot 7^v = t!$.

I. Stănescu, G. M. 7/1967

Soluție. Produsul $t!$ conține toți factorii primi mai mici sau egali cu t. Cum $t!$ nu conține pe 11 deducem că $t < 11$. De asemenea $t!$ conține pe 5 cel puțin la puterea a doua. Dar pînă la 11 există doar două numere ce-l conțin pe 5 ca factor și anume 5 și 10. Cum 5 este cel puțin la puterea a doua, $t!$ conține și factorul 10. Deci $t \geq 10$. Rezultă deci că $t = 10$. Prin urmare avem

$$10! = 2 \cdot 3 \cdot 2^2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7$$

adică $x = 8$, $y = 4$, $z = 0$, $v = 1$, $t = 10$.

P 34. *Să se afle bazele x, y, z ale sistemelor de numerație în care există relația* $1111_x + 3333_y = 1324_z$ *știind că* $x = y - z = z - 4$.

Elemer Kiss, G. M. F. B.9/1954

Soluție. Înlocuind pe y și pe z în funcție de x în relația dată rezultă $1111_x + 3333_{(x+z)} = 1324_{(x+4)}$ sau $x^3 + x^2 + x + 1 + 3(x + 2)^3 + 3(x + 2)^2 + 3(x + 2) + 3 = (x + 4)^3 + 3(x + 4)^2 + 2(x + 4) + 4$.
Efectuînd calculele rezultă

$$3x^3 + 7x^2 - 22x - 78 = 0;\ (x - 3)(3x^2 + 16x + 26) = 0.$$

Cum baza unui sistem de numerație nu poate fi decît un număr natural (≥ 2) rezultă că singura soluție a problemei este $x = 3$, implicînd $y = 5$ și $z = 7$.

P 35. *Care sînt bazele x și y ale sistemelor de numerație în care* $425_x - 221_y = 455_7$, *știind că* $x + y = 12$.

I. I. Mastan, G. M. F. B. 2/1958

Soluție. Relația din enunț se mai poate scrie

$$4x^2 + 2x - 5 - 2y^2 - 2y - 1 = 4 \cdot 7^2 + 5 \cdot 7 + 5.$$

Înlocuind pe y prin $12 - x$ rezultă ecuația

$$2x^2 + 52x - 544 = 0;\quad x^2 + 26x - 272 = 0.$$

Soluțiile ecuației vor fi $x_1 = 8$ și $x_2 = -34$.
Deoarece nu avem baze negative avem numai soluția $x = 8$, căreia îi corespunde $y = 4$.

P 36. *Să se rezolve ecuația* $\dfrac{\overline{xy}}{\overline{yx}} = 2 - \dfrac{y}{x}$ *(numerele fiind scrise în baza 10).*

F. Csaki, G. M. vol. LXXXVIII, 1/1983

Soluție. Trebuie ca x să fie diferit de zero. Ecuația devine

$$\frac{10x + y}{10y + x} = \frac{2x - y}{x},$$

$$4x^2 - 9xy + 5y^2 = 0,$$

$$(x - y)(4x - 5y) = 0.$$

Rezultă $x = y$ sau $4x = 5x$.
În cazul în care $x = y$, ecuația dată devine o identitate pentru orice y, deoarece $\dfrac{\overline{yy}}{\overline{yy}} = 2 - \dfrac{y}{y}$ sau $1 = 1$. Dacă $4x = 5y$, cum x și y sînt cifre, recultă că $y = 4$ și $x = 5$.

P 37. *Să se studieze în numere naturale nenule ecuația* $(x!+1)^{x!} = (x!)^y$.

I. Georgescu-Racoviță, G. M. vol. XXXII, 1926

Soluție. Cînd $x = 1$, rezultă că avem $2 = 1$, egalitate imposibilă. Pentru $x > 1$ partea dreaptă a egalității este un număr par, iar partea stîngă un număr impar, deci nici în acest caz nu avem soluții.

P 38. *Să se stabilească inegalitățile*

Ilie Bichir, G. M. B. 1/1926

$$n^n \leqslant (n!)^2 \leqslant n^n \cdot \left(\frac{n+1}{3}\right)^{n-1},$$

n fiind natural $\geqslant 1$.

Soluție. Avem $H \leqslant G \leqslant A$ (1),

unde H, G, A sînt respectiv media armonică, geometrică și aritmetică a $(n-1)$ numere pozitive. Fie numerele $1 \cdot 2$, $2 \cdot 3$, ..., $(n-1)n$, deci conform relației (1) putem scrie

$$\frac{n-1}{\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{(n-1)\cdot n}} \leqslant \sqrt[n-1]{(n-1)!\,n!} \leqslant \frac{1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+(n-1)\,n}{n-1}, \tag{2}$$

Dar

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{(k-1)\,k}=\frac{n-1}{n} \quad \text{și} \quad \sum_{k=2}^{n}(k-1)\,k=\frac{(n-1)\,n(n-1)}{3}$$

deci relația (2) devine

$$n \leqslant \sqrt[n-1]{(n-1)!\,n!} \leqslant \frac{n(n+1)}{3}, \tag{3}$$

Ridicînd (3) la puterea $n-1$ și multiplicînd cu n obținem relația din enunț.

P 39. *Cum trebuie să fie* $a \in \mathbf{N}$, *pentru ca expresia*

$$a^{60} - a^{48} - a^{42} + a^{18} + a^{12} - 1$$

să fie divizibilă cu 7657 ?

S. Marcelino, G. M. 5/1915

Soluție. $7657 = 13 \cdot 19 \cdot 31$, iar expresia se poate scrie

$$(a^{12}-1)\,(a^{18}-1)\,(a^{30}-1).$$

Considerați separat, pe rînd, acești factori sînt, după teorema lui Fermat, divizibili respectiv cu 13, 19, 31 numai dacă a este prim respectiv cu 13, 19, 31.

P 40. *Să se afle restul împărțirii numărului* 5^{7^n} *prin* 31, $n \in \mathbf{N}$.

Dorin Andrica, G. M. 11/1979

Soluție. $5^{7^n} = 5^{(6+1)^n} = 5^{3k+1} = 125^k \cdot 5 = (124 + 1)^k \cdot 5 = (\mathcal{M}31 + 1)^k \cdot 5 = (\mathcal{M}31 + 1) \cdot 5 = \mathcal{M}31 + 5$ și deci restul împărțirii este 5.

P 41. *Să se arate dacă* $a + b + c$ *divide pe* $am + bn + cp$, *atunci divide și pe* $a(n + p) + b(m + p) + c(m + n)$, a, b, c, m, n, p *fiind numere întregi.*

G. Dincă, G. M. F. B. 12/1912

Soluție. Evident $a + b + c$ divide pe $a + b + c$ sau orice multiplu de $a + b + c$, deci $(a + b + c) \mid (a + b + c)(m + n + p)$.
Dezvoltînd rezultă

$$(a + b + c) \mid [am + bn + cp + a(n + p) + b(m + p) + c(m + n)].$$

Cum din ipoteză $(a + b + c) \mid am + bn + cp$, rezultă că

$$(a + b + c) \mid [a(n + p) + b(m + p) + c(m + n)].$$

P 42. *Fie* a *și* b *două numere naturale nenule care sînt multipli de 3. Să se determine condițiile pe care le îndeplinesc numerele* a *și* b *pentru ca* $\overline{ab}$ *să fie multiplu de 9. (Prin* $\overline{ab}$ *se înțelege numărul format prin alăturarea celor două numere. Exemplu* $a = 12$, $b = 306$, $\overline{ab} = 12\,306$*).*

I. Ionescu, G. M. vol. XLIV, 1938

Soluție. Fie a și b respectiv multipli de 3. Rezultă că și $a + b$ va fi multiplu de 3. Față de divizorul 9 nu putem lua decît $a = \mathcal{M}9$, $a = \mathcal{M}9 \pm 3$ și respectiv $b = \mathcal{M}9$ sau $b = 9\mathcal{M} \pm 3$. Numerele $\overline{ab}$ și $\overline{ba}$, formate prin alăturarea celor două numere, au ca sumă a cifrelor un multiplu de 3, deoarece a și b sînt multiplii de 3. Pentru ca aceste numere să fie multipli de 9 trebuie să avem unul din cazurile:

$$\begin{cases} a = \mathcal{M}9 \\ b = \mathcal{M}9 \end{cases} \quad \begin{cases} a = \mathcal{M}9 + 3 \\ b = \mathcal{M}9 - 3 \end{cases} \quad \begin{cases} a = \mathcal{M}9 - 3 \\ b = \mathcal{M}9 + 3. \end{cases}$$

Exemple. $a = 90$, $b = 18$, $\overline{ab} = 9018$; $a = 66$, $b = 600$, $\overline{ab} = 66\,600$; $a = 102$, $b = 12$, $\overline{ab} = 10\,212$.

P. 43. *Să se rezolve ecuația*

$$\cos 2x - \sin x + 2 = \frac{\sin 3x + 2}{\sin^2 x}.$$

M. Radu, G.M. vol. IX, 1904

Soluție. Utilizăm identitățile

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x,$$
$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x.$$

Ecuația devine: $2\sin^4 x - 3\sin^3 x - 3\sin^2 x + 3\sin x + 2 = 0$, care poate fi scrisă și sub forma

$$2\left(\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x}\right) - 3\left(\sin x - \frac{1}{\sin x}\right) - 3 = 0.$$

Dacă notăm $\sin x - \frac{1}{\sin x} = y$, rezultă $\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x} = y^2 + 2$ și ecuația devine: $2y^2 - 3y + 1 = 0$, obținînd $y_1 = 1$, $y_2 = \frac{1}{2}$.

Deci $\sin^2 x - \sin x - 1 = 0 \Rightarrow \sin x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$,

sau $2\sin^2 x - \sin x - 2 = 0 \Rightarrow \sin x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{4}$.

Valorile $\sin x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ și $\sin x = \frac{1 + \sqrt{17}}{4}$ nu convin, fiind mai mari decît 1.

Așadar

$$\sin x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \text{ sau } \sin x = \frac{1 - \sqrt{17}}{4},$$

ecuații ale căror soluții se deduc simplu.

P 44. *Să se demonstreze numai cu ajutorul relațiilor dintre funcțiile trigonometrice ale aceluiași arc că dacă avem* $\sin a \cos b + \sin b \cos a = 1$, *vom avea* $a + b = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$.

Să se dea și o soluție geometrică.

T. Lalescu, G. M. vol. VII, 1902

Soluție. Din relația dată, $\sin a \cos b + \sin b \cos a = 1$, rezultă $\sin(a + b) = 1$. Deci $a + b = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Fie A, B, C trei puncte pe cercul $\mathcal{C}(0, 1)$ astfel ca $m(\widehat{AB}) = a$ și $m(\widehat{BC}) = b$. Fie P și Q picioarele perpendicularelor coborîte din B pe diametrele ce trec prin A și C; avem $\|OP\| = \cos a$, $\|BP\| = \sin a$, $\|OQ\| = \cos b$, $\|QB\| = \sin b$ și relația dată devine $\|BP\| \cdot \|OQ\| + \|OP\| \cdot \|BQ\| = 1$.

Aplicînd teorema lui Ptolemeu patrulaterului inscriptibil $OPBQ$ se obține $\|BP\| \cdot \|OQ\| + \|OP\| \cdot \|BQ\| = \|OB\| \cdot \|PQ\|$. Comparînd cu relația anterioară, rezultă $\|OB\| \, \|PQ\| = 1$ și cum $\|OB\| = 1$ rezultă $\|PQ\| = 1$. Deducem că patrulaterul $OPBQ$ este un dreptunghi, adică $m(\widehat{AB}) + m(\widehat{BC}) = 90°$.

P 45. *Să se rezolve ecuația:*

$$\frac{\sin^3 x + \cos^3 x + 2}{\sin x + \cos x} = 3\ (1 - \sin x \cos x).$$

Emilian Mereuță, G. M. vol. XLV, 1939

Soluție. Folosind egalitatea

$$\sin^3 x + \cos^3 x = (\sin x + \cos x)\ (1 - \sin x \cos x),$$

ecuația devine

$$\frac{1}{\sin x + \cos x} = 1 - \sin x \cos x.$$

Se notează $\sin x + \cos x = t$ și se obține $t^3 - 3t + 2 = 0$, care admite ca rădăcini $t_1 = 1$; $t_2 = 1$; $t_3 = -2$, de unde $\sin x + \cos x = 1$ și $\sin x + \cos x = -2$.

Prima ecuație are soluțiile $x = 2k\pi$ și $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, unde $k \in \mathbf{Z}$.

A doua ecuație nu are soluție.

P 46. *Într-un triunghi ABC medianele BB' și CC' fac respectiv unghiuri de măsuri β și γ cu dreapta BC, $\beta, \gamma \in (0, \pi)$. Să se arate că avem relația*

$$\frac{\sin(\beta - \gamma)}{\sin(\beta + \gamma)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sin(B - C)}{\sin(B + C)}.$$

O. N. Țino, G. M. vol. XLVI, 1941

Soluție. Fie G punctul de intersecție al medianelor triunghiului ABC. În triunghiul BGC avem

$$\frac{\sin\beta}{\|CG\|} = \frac{\sin\gamma}{\|BG\|} = \frac{\sin(\beta + \gamma)}{\|BC\|}$$

dar

$$\frac{\sin(\beta + \gamma)}{\|BC\|} = \frac{\sin(\beta - \gamma)}{\|CG\| \cos\gamma - \|BG\| \cos\beta} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\sin(\beta - \gamma)}{(\|CC'\| \cos\gamma - \|BB'\| \cos\beta)} \quad (1).$$

În triunghiurile $CC'B$ și $BB'C$ avem relațiile:

$$\|BC\| = \|CC'\| \cos\gamma + \frac{\|AB\|}{2} \cos\beta,$$

$$\|BC\| = \|BB'\| \cos\beta + \frac{\|AC\|}{2} \cos C,$$

deci $\|CC'\| \cos\gamma - \|BB'\| \cos\beta = \frac{\|AC\|}{2} \cos C - \frac{\|AB\|}{2} \cos B$, și (1) devine:

$$\frac{\sin(\beta+\gamma)}{\|BC\|} = 3\,\frac{\sin(\beta-\gamma)}{\|AC\| \cos C - \|AB\| \cos B}. \tag{2}$$

Dar $\|BC\| = 2R \sin A = 2R \sin(B+C)$, $\|AC\| = 2R \sin B$, $\|AB\| = 2R \sin C$.

Înlocuind în (2) se obține relația:

$$\frac{\sin(\beta-\gamma)}{\sin(\beta+\gamma)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sin(B-C)}{\sin(B+C)}.$$

P 47. *Să se arate că în orice triunghi avem relația:*

$$\Sigma \frac{\cos(A-B)\cos(B-C)}{\sin C \sin A} = 3 + 8 \cos A \cos B \cos C,$$

Ion S. Antoniu, G. M. vol. LXVII

Soluția I. Folosim relațiile:

$$\Sigma \cos^2 A = 1 - 2 \cos A \cos B \cos C,$$

$$\Sigma \sin 2A = 4 \sin A \sin B \sin C,$$

$$\Sigma \operatorname{cotg} A \operatorname{cotg} B = 1.$$

Atunci

$$\sum \frac{\cos(A-B)\cos(B-C)}{\sin C \sin A} = \sum \frac{\cos(A-C) + \cos(A+C-2B)}{2 \sin C \sin A} =$$

$$= \sum \frac{\cos(A-C) + \cos 3(A-C)}{2 \sin C \sin A} = \sum \left\{ \frac{1}{2} \operatorname{cotg} A \operatorname{cotg} C + \frac{1}{2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\cos(A+C) \cdot [4\cos^2(A+C) - 3]}{2 \sin C \sin A} \right\} = \sum \left(\frac{1}{2} \operatorname{cotg} A + \operatorname{cotg} C + \frac{1}{2} + \right.$$

$$\left. + 2 \operatorname{cotg} A \operatorname{cotg} C \cos^2 B - \frac{3}{2} \operatorname{cotg} A \operatorname{cotg} C + \frac{3}{2} - 2\cos^2 B \right) = 3 +$$

$$+ 4 \cos A \cos B \cos C + \operatorname{cotg} A \operatorname{cotg} B \operatorname{cotg} C \, \Sigma \sin 2A = 3 + 8 \cos A \cos B \cos C$$

Soluția II. Prin transformarea produselor de la numărătorii primului membru se obține

$$\sum \frac{\cos(A-B)\cos(B-C)}{\sin C \sin A} = \frac{1}{2} \sum \frac{\cos(A-C) - \cos 3B}{\sin A \sin C} =$$

$$= \frac{\Sigma\,[\cos(A-C)-\cos 3B]\sin B}{2\sin A\sin B\sin C} = \frac{\Sigma(\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C-\sin 4B)}{4\sin A\sin B\sin C} =$$

$$= \frac{3\,\Sigma\sin 2A-\Sigma\sin 4A}{4\sin B\sin A\sin C} = 3+8\cos A\cos B\cos C.$$

S-au folosit relațiile:

$2\cos(A-C)\sin B=\sin 2A+\sin 2C$, $\quad 2\cos 3B\sin B=\sin 4B-\sin 2B$,

$\Sigma\sin 4A=-4\sin 2A\sin 2B\sin 2C=-32\sin A\sin B\sin C\cos A\cos B\cos C$

P 48. *Să se demonstreze că dacă* $\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg} y+\operatorname{arctg} z+\operatorname{arctg} t=\pi$, *atunci*

$$\frac{x+y+z+t}{xyzt}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}$$

(x, y, z, t, sînt numere reale diferite de zero).

I. Tomescu, G. M., 5/1973

Soluție. Pornind de la formula

$$\operatorname{tg}(a+b+c)=\frac{\operatorname{tg}a+\operatorname{tg}b+\operatorname{tg}c-\operatorname{tg}a\operatorname{tg}b\operatorname{tg}c}{1-\operatorname{tg}a\operatorname{tg}b-\operatorname{tg}b\operatorname{tg}c-\operatorname{tg}a\operatorname{tg}c}$$

rezultă că

$$\operatorname{tg}(a+b+c+d)=\operatorname{tg}[(a+b+c)+d)]=\frac{\operatorname{tg}(a+b+c)+\operatorname{tg}d}{1-\operatorname{tg}(a+b+c)\operatorname{tg}d}=$$

$$=\frac{\Sigma\operatorname{tg}a-\Sigma\operatorname{tg}a\operatorname{tg}b\operatorname{tg}c}{1-\Sigma\operatorname{tg}a\operatorname{tg}b+\Sigma\operatorname{tg}a}.$$

Fie $a=\operatorname{arctg}x$, $b=\operatorname{arctg}y$, $c=\operatorname{arctg}z$ și $d=\operatorname{arctg}t$. Rezultă $\operatorname{tg}a=x$, $\operatorname{tg}b=y$, $\operatorname{tg}c=z$, $\operatorname{tg}t=d$ și $a+b+c+d=\pi$. Înlocuind aceste valori în formula de mai sus se obține $\operatorname{tg}\pi=0$ și deci numărătorul este egal cu zero, adică

$$x+y+z+t=xyz+xyt+xzt+yzt=xyzt\,(1/x+1/y+1/z+1/t).$$

P 49. *Să se demonstreze identitatea:*

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\cos(k-1)\alpha\cos k\alpha}=\frac{\operatorname{tg}n\alpha}{\sin\alpha},\quad n\in\mathbf{N}^*$$

Eftimie Grecu, G. M. 12/1964

Soluție. În relația $\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b = \dfrac{\sin(a-b)}{\cos a \cos b}$ facem înlocuirile $a = (k-1)\alpha$ și $b = k\alpha$ și obținem

$$\operatorname{tg}(k-1)\alpha - \operatorname{tg} k\alpha = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(k-1)\alpha \cos k\alpha}. \tag{1}$$

Dînd lui k valori de la 1 la n în (1) și adunînd relațiile găsite obținem

$$\operatorname{tg} 0 - \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg} 2\alpha + \ldots + \operatorname{tg}(n-1)\alpha - \operatorname{tg} n\alpha =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{-\sin\alpha}{\cos(k-1)\alpha \cos k\alpha} \text{ de unde } \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\cos(k-1)\alpha \cos k\alpha} = \frac{\operatorname{tg} n\alpha}{\sin\alpha}.$$

P 50. *Într-o urnă sînt a bile albe și b bile negre. Se extrage cîte o bilă, fără a se pune în urnă, pînă ce se obțin x bile albe. Să se afle repartiția variabilei aleatoare Y ce dă numărul de bile extrase din urnă pînă ce s-au obținut x bile albe.*

V. Craiu, G. M. 1972

Soluție. Fie A_y evenimentul de a extrage y bile pentru a obține x bile albe, A_{y_1} obținerea a $(x-1)$ bile albe în $(y-1)$ extrageri și A_{y_2} obținerea unei bile albe la a y-a extragere. Evenimentele A_{y_1} și A_{y_2} sînt dependente și

$$A_y = A_{y_1} \cap A_{y_2} \Rightarrow P(A_y) = P(A_{y_1} \cap A_{y_2}) = P(A_{y_1})\, P_{A_{y_1}}(A_{y_2}).$$

Folosind schema bilei neîntoarse obținem

$$P(A_{y_1}) = \frac{C_a^{x-1}\, C_b^{y-x}}{C_{a+b}^{y-1}}$$

iar

$$P_{A_{y_1}}(A_{y_2}) = \frac{a-x+1}{a+b-y+1}$$

(din numărul cazurilor posibile și al celor favorabile).

În final avem

$$P(A_y) = \frac{a-x+1}{a+b-y+1} \cdot \frac{C_a^{x-1} \cdot C_b^{y-x}}{C_{a+b}^{y-1}}.$$

Punînd condiția pentru combinări ca să existe, deducem că

$$x \leqslant y \leqslant b + x \text{ și } a \geqslant x.$$

Repartiția variabilei aleatoare Y este dată de tabloul

$$Y : \begin{pmatrix} y \\ P(A_y) \end{pmatrix}, \quad x \leqslant y \leqslant b + x.$$

P 51. *Într-o urnă sînt 8 bile albe și 24 bile negre. Se scoate o bilă, apoi după ce se introduce bila scoasă în urnă se mai scoate o bilă, iar după ce s-a introdus și această bilă în urnă se mai scoate încă o bilă. Să se calculeze probabilitățile:*

a) de *a ieși 3 bile albe*;

b) *de a ieși 2 bile albe*;

c) *de a ieși o bilă albă*;

d) *de a ieși nici o bilă albă.*

C. Ionescu-Țiu, G. M. 1970

Soluție. Probabilitatea de a scoate o bilă este de $8/32 = 1/4$ la fiecare extragere. Se aplică legea binomială

$$P = C_3^i(1/4) \cdot (3/4)^{3-i} \text{ și rezultă:}$$

a) $P_a = C_3^3(1/4)^3 (3/4)^{3-3} = 1(1/64) = 1/64$;

b) $P_b = C_3^2(1/4)^2 \cdot (3/4)^{3-2} = 3(1/4)^2 \cdot (3/4) = 9/64$;

c) $P_c = C_3^1(1/4) \cdot (3/4)^{3-1} = 3(1/4)(3/4)^2 = 27/64$;

d) $P_d = C_3^0(3/4)^3 = 27/64$.

Se poate observa că $P_a + P_b + P_c + P_d = 1$. •

P 52. *O pungă cu 100 lozuri are 5 cîștigătoare. Dacă se împart lozurile în 5 grămezi egale, care este probabilitatea ca fiecare grămadă să conțină un loz cîștigător?*

M. Neacșu, G. M. 1971

Soluție. Probabilitatea ca prima grămadă să conțină un loz cîștigător este $P_1 = \frac{C_{95}^{19} \cdot C_5^1}{C_{100}^{20}}$.

Probabilitatatea ca a doua grămadă să conțină un loz cîștigător este $P_2 = \frac{C_{76}^{19} \cdot C_4^1}{C_{80}^{20}}$.

Pentru a treia: $P_3 = \frac{C_{57}^{19} \cdot C_3^1}{C_{60}^{20}}$.

Pentru a patra: $P_4 = \frac{C_{38}^{19} \cdot C_2^1}{C_{40}^{20}}$.

Pentru a cincea: $P_5 = \frac{C_{19}^{19} \cdot C_1^1}{C_{20}^{20}} = 1$.

Probabilitatea că în fiecare grămadă să fie un loz cîștigător este

$$P = P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 \cdot P_4 \cdot P_5.$$

P 53. *S-au împachetat 10 piese de dimensiuni diferite și apoi s-au scris la întîmplare pe fiecare din ele dimensiunile ce trebuiau notate. Să se determine probabilitatea ca cel puțin pe un pachet să fie scrisă dimensiunea corespunzătoare piesei.*

Gh. N. Surcel, G. M. **1972**

Soluție. Numerotăm pachetele de la 1 la 10 și fie A_i evenimentul ca pe pachetul i să fie scrisă dimensiunea corespunzătoare piesei respective ($i = 1, 2, \ldots, 10$).

Evenimentul $A =$ „cel puțin un pachet are dimensiunea corespunzătoare piesei" este $A = \bigcup_{i=1}^{10} A_i$, evenimentele $A_i (i = 1, \ldots, 10)$ fiind compatibile.

Avem

$$P(A) = P\left(\bigcup_{i=1}^{10} A_i\right) = \sum_{i=1}^{10} P(A_i) - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{10} P(A_i \cap A_j) +$$

$$+ \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i<j<k}}^{10} P(A_i \cap A_j \cap A_k) + \ldots + (-1)^9 P\left(\bigcap_{i=1}^{10} A_i\right).$$

Dacă pe k pachete s-a scris dimensiunea exactă, pe celelalte $10-k$ dimensionale se pot scrie în $(10-k)!$ moduri. Avem

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = \frac{(10-k)!}{10!}.$$

Scrierea dimensională pe pachete este egal probabilă, deci:

$$\sum_{\substack{i_1, i_2, \ldots i_k=1 \\ i_1<i_2<\ldots i_k}} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = C_{10}^k \frac{(10-k)!}{10!}.$$

Rezultă

$$P(A) = C_{10}^1 \frac{(10-1)!}{10!} - C_{10}^2 \frac{(10-2)!}{10!} + C_{10}^3 \frac{(10-3)!}{10!} + \ldots +$$

$$+ (-1)^9 \frac{1}{10!} = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} - \frac{1}{8!} + \frac{1}{9!} - \frac{1}{10!}.$$

P 54. *Într-o urnă sînt 5 bile roșii, 3 bile albe și 2 bile negre.*

a) *Se extrag două bile. Care este probabilitatea ca o bilă să fie albă și cealaltă neagră?*

b) *Se extrag două bile. Care este probabilitatea ca să nu fie amîndouă negre?*

c) *Se extrag n bile. Să se determine n astfel ca probabilitatea ca între bilele extrase să fie cel puțin o bilă neagră, să fie mai mare ca* 8/15?

Lucia Țene, G. M. 1972

Soluție. a) Fie A_1 evenimentul extragerii unei bile albe și unei bile negre. Numărul extragerilor favorabile este $3 \cdot 2 = 6$. Avem

$$P(A_1) = \frac{6}{C_{10}^2} = \frac{2}{15}.$$

b) Fie A_2 evenimentul extragerii a două bile care să nu fie amîndouă negre. Probabilitatea evenimentului contrar este

$$P(\bar{A}_2) = \frac{C_2^2}{C_{10}^2} = \frac{1}{45} \text{ deci } P(A_2) = 1 - P(\bar{A}_2) = \frac{44}{45}.$$

c) Fie A_3 evenimentul ca între cele n bile extrase să fie cel puțin o bilă neagră. Probabilitatea evenimentului contrar este

$$P(\bar{A}_3) = \frac{C_8^n}{C_{10}^n} = \frac{8!}{(8-n)!\,n!} \cdot \frac{(10-n)\,n!}{10!} = \frac{(10-n)(9-n)}{9 \cdot 10}$$

deci

$$P(A_3) = 1 - P(\bar{A}_3) = 1 - \frac{(10-n)(9-n)}{9 \cdot 10}.$$

Avem

$$1 - \frac{(10-n)(9-n)}{9 \cdot 10} > \frac{8}{15} \Leftrightarrow n^2 - 19n + 48 < 0.$$

Rezultă $n = 4, 5, 6, 7, 8$. Pentru $n = 10$ și $n = 9$ avem evenimentul sigur. Deci $n \in \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

P 55. *La un centru LOTO se află pungi de 100 bilete de 3 lei și de 6 lei care au bilete cîștigătoare în proporție de 10% și 8%. Se extrag la întîmplare, șase bilete, trei din punga cu bilete de 3 lei și trei din punga cu bilete de 6 lei. Care este valoarea medie a numărului de bilete ieșite cîștigătoare din cele șase extrageri.*

M. Neacșu, G. M. 1972

Soluție. Notăm cu x variabila aleatoare egală cu numărul biletelor cîștigătoare obținute din prima pungă și cu y variabila aleatoare egală cu numărul biletelor cîștigătoare obținute din a doua pungă.

Vor trebui scrise distribuțiile celor două variabile aleatoare. Variabila x poate lua valorile 0, 1, 2, 3 cu probabilitățile respective calculate cu ajutorul formulei schemei bilei neîntoarse:

$$P(x) = \frac{C_a^\alpha \cdot C_b^\beta}{C_n^{\alpha+\beta}}.$$

În cazul nostru $n = 100$, $a = 10$ și $b = 90$ deoarece biletele cîștigătoare sînt în proporție de 10%. Atunci

$$P(x=0) = \frac{C_{10}^0 \cdot C_{90}^3}{C_{100}^3} = \frac{C_{90}^3}{C_{100}^3}; \quad P(x=1) = \frac{C_{10}^1 \cdot C_{90}^2}{C_{100}^3}; \quad P(x=2) = \frac{C_{10}^2 \cdot C_{90}^1}{C_{100}^3};$$

$$P(x=3) = \frac{C_{10}^3 \cdot C_{90}^0}{C_{100}^3} = \frac{C_{10}^3}{C_{100}^3}.$$

Variabila aleatoare x va avea distribuția:

$$x\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{C_{90}^3}{C_{100}^3} & \frac{C_{10}^1 \cdot C_{90}^2}{C_{100}^3} & \frac{C_{10}^2 C_{90}^1}{C_{100}^3} & \frac{C_{10}^3}{C_{100}^3} \end{pmatrix}$$

Variabila aleatoare y poate lua valorile 0, 1, 2, 3 cu probabilitățile calculate tot prin schema bilei neîntoarse. În acest caz $n = 100$, $a = 8$, $b = 92$ și obținem:

$$P(y=0) = \frac{C_8^0 C_{92}^3}{C_{100}^3} = \frac{C_{92}^3}{C_{100}^3}; \quad P(y=1) = \frac{C_8^1 C_{92}^2}{C_{100}^3}; \quad P(y=2) = \frac{C_8^2 C_{92}^1}{C_{100}^3};$$

$$P(y=3) = \frac{C_8^3 C_{92}^0}{C_{100}^3} = \frac{C_8^3}{C_{100}^3}.$$

Variabila aleatoare y are distribuția:

$$y\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{C_{92}^3}{C_{100}^3} & \frac{C_8^1 C_{92}^2}{C_{100}^3} & \frac{C_8^2 C_{92}^1}{C_{100}^3} & \frac{C_8^3}{C_{100}^3} \end{pmatrix}$$

Numărul biletelor cîștigătoare este dat de variabila aleatoare $x + y$. Valoarea medie căutată este $M(x+y) = M(x) + M(y)$. Avem însă:

$$M(x) = 0\frac{C_{90}^3}{C_{100}^3} + 1\frac{C_{10}^1 C_{90}^2}{C_{100}^3} + 2\frac{C_{10}^2 C_{90}^1}{C_{100}^3} + 3\frac{C_{10}^3}{C_{100}^3};$$

$$M(y) = 0\frac{C_{92}^0}{C_{100}^3} + 1\frac{C_8^1 C_{92}^2}{C_{100}^3} + 2\frac{C_8^2 C_{92}^1}{C_{100}^3} + 3\frac{C_8^3}{C_{100}^3}, \text{ de unde găsim}$$

$$M(x+y) = \frac{20\,507}{41\,425}.$$

P 56. *Fie date un polinom de gradul n cu coeficienți reali, avînd toate rădăcinile simple și un poligon convex cu m vîrfuri.*

a) *Să se calculeze probabilitatea P_1 ca alegînd la întîmplare o rădăcină a polinomului, aceasta să fie afixul unui vîrf al poligonului;*

b) *Să se calculeze probabilitatea P_2 ca alegînd la întîmplare un vîrf al polinomului, acesta să fie imaginea geometrică a unei rădăcini a polinomului;*

c) *Să se arate că dacă toate rădăcinile polinomului sînt reale, atunci*

$$P_1 \leqslant \frac{2}{n} \quad \text{și} \quad P_2 \leqslant \frac{2}{m}.$$

Marcel Țena, G. M. 7/1975

Soluție. a) Fie k numărul rădăcinilor polinomului, care sînt afixe de vîrfuri ale poligonului ($0 \leqslant k \leqslant \min(m, n)$). Rezultă $P = k/n$.

b) $P_2 = k/m$.

c) Dacă rădăcinile polinomului sînt reale, ele au imaginile geometrice pe dreapta reală, dreaptă ce taie poligonul convex în cel mult două vîrfuri ale acestuia. Rezultă $k \leqslant 2$ și de aici inegalitățile $P_1 \leqslant 2/n$, $P_2 \leqslant 2/m$.

P 57. *Se consideră un triunghi ascuțitunghic ABC cu ortocentrul H și cercurile BHC, CHA, AHB (cercurile lui Carnot). Cercul BHC taie a doua oară laturile $|AC|$ și $|AB|$ în A_b și A_c. Fie B_c, B_a și C_a, C_b punctele aanloge determinate de cercurile CHA și AHB. Să se demonstreze că H este centrul comun al cercurilor circumscrise triunghiurilor AA_bA_c, BB_cB_a, CC_aC_b.*

Al. Niculescu, G. M. vol. XXIX

Soluție. Observăm că $\overset{\frown}{HAB} \equiv \overset{\frown}{HCB}$ (avînd același complement, unghiul $\hat{B}$). Dar $\overset{\frown}{HCB} = \overset{\frown}{HA_cA}$ ca avînd aceeași măsură în cercul BHC. Rezultă de aici că $\overset{\frown}{HAB} \equiv \overset{\frown}{HA_cA}$; triunghiul HAA_c este deci isoscel și deci $\|HA\| = \|HA_c\|$. Analog demonstrăm că triunghiul HAA_b este isoscel, deci $\|HA\| = \|HA_b\|$. Avem deci $\|HA\| = \|HA_b\| = \|HA_c\|$, ceea ce ne arată că H este centrul cercului AA_bA_c. Analog se arată pentru cercurile BB_cB_a și CC_aC_b.

P 58. *Dacă între lungimea bisectoarei interioare α și lungimile laturile b și c ale unui triunghi ABC, există relația $\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ atunci $m(\hat{A}) = 120°$.*

V. Marcu, G. M. 5/1915

Soluție. Avem $\frac{bc}{b+c} = \alpha$ și $\alpha = \frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}$. Rezultă $\cos\frac{A}{2} = \frac{1}{2}$, deci $m(\hat{A}) = 120°$.

P 59. *Într-un triunghi ABC, $m(\hat{A}) = \frac{m(\hat{B}) + m(\hat{C})}{2}$. Dacă M este punctul de tangență a cercului înscris cu BC, atunci avem, $\|BM\| \cdot \|MC\| = (1/4)\|AB\| \cdot \|AC\|$.*

Al. Pantazi, G. M. 6/1915

Soluție. $\|NB\| = p - b$, $\|MC\| = p - c$. Apoi $\sin^2 \frac{A}{2} = \frac{(p-b)(p-c)}{bc} =$

$= \frac{\|MB\| \cdot \|MC\|}{\|AB\| \cdot \|AC\|}$. Cum $m(\hat{A}) = 60°$, $\sin^2 \frac{A}{2} = \frac{1}{4}$.

Deci $\|MB\| \cdot \|MC\| = \frac{1}{4} \|AB\| \cdot \|AC\|$.

P 60. *Să se demonstreze geometric că avem relația*

$$1 < \sqrt{2} < 2.$$

I. Ionescu, G. M. vol. XLVII, 1941

Soluție. Fie $ABCD$ un pătrat de latură a. Se duce diagonala $|AD|$. Pentru triunghiul ABD teorema lui Pitagora ne dă:

$\|BD\|^2 = \|AB\|^2 + \|AD\|^2$ sau $\|BD\|^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$, deci $\|BD\| = a\sqrt{2}$.

În triunghiul ABD, perpendiculara $|BD|$ pe AB este mai scurtă ca oblica $|BD|$, iar această latură este mai mică decît suma celorlalte două $|AB|$ și $|AD|$. Deci

$$\|AD\| < \|BD\| \text{ și } \|BD\| < \|AB\| + \|AD\| \text{ sau } \|BD\| < 2\|AB\|$$

sau $a < a\sqrt{2}$ și $a\sqrt{2} < 2a$. Deci $1 < \sqrt{2} < 2$.

P 61. *Se dă un con drept cu secțiunea axială SAB, centrul cercului de bază fiind C. Să se găsească raza unei sfere de centru O, care trece prin S și detașează din conul dat un volum egal cu $a^3\pi/3$.*

D. V. Ionescu, G. M. vol. XXIX

Soluție. Fie $|SA|$, $|SB|$ cele două generatoare ale conului, situate în același plan cu $|SC|$, M și N intersecțiile acestor generatoare cu sfera cerută, I proiecția lui M pe SC și E intersecția înălțimii $|SC|$ cu sfera de centru O. Vom nota $\|OS\| = x$, $\|OI\| = y$, $\|MI\| = z$. Triunghiul OMI fiind dreptunghic vom avea $y^2 + z^2 = x^2$. Triunghiurile SMI și SAC fiind asemenea rezultă:

$$\frac{\|MI\|}{\|AC\|} = \frac{\|SI\|}{\|SC\|} \text{ sau } \frac{z}{R} = \frac{x+y}{H},$$

unde R și H sînt raza și înălțimea conului. Apoi observăm că

$$v[SMEN] = v[SMN] - v[MON] + v[OMEN] \text{ sau}$$

$\pi z^2(x+y)/3 - \pi z^2 y/3 + 2\pi x^2(x-y)/3 = \pi a^3/3$. Această ecuație se reduce la $z^2x + 2x^2(x-y) = a^3$.

Așadar, între cele trei elemente x, y, z avem relațiile

$$x^2 = y^2 + z^2 \quad (1); \quad zH = R(x+y) \quad (2); \quad z^2x + 2x^2(x-y) = a^3 \quad (3)$$

Din ecuația (1) deducem

$$z^2 = (x - y)(x + y) \tag{4}$$

și eliminînd pe z între aceasta și (2) avem $(x - y)(x + y) = R^2/H^2$. Din aceasta deducem $(x - y)/2x = R^2/(R^2 + H^2) = R^2/G^2$, G fiind generatoarea conului. Rezultă că

$$x - y = 2R^2x/G^2, \quad x + y = 2H^2x/G^2 \tag{5}$$

și din (4) rezultă

$$z^2 = 4R^2H^2x^2/G^4. \tag{6}$$

Înlocuind în ecuația (3) pe $(x - y)$ și z^2 în funcție de x, date de formulele (5) și (6) vom avea

$$4R^2H^2x^3/G^4 + 4R^2x^3/G^2 = a^3$$

sau

$$x^3 = a^3G^4/4R^2(G^2 + H^2)$$

deci

$$x = a\sqrt[3]{G^4/4R^2(G^2 + H^2)}.$$

P 62. *Pe prelungirea ipotenuzei triunghiului ABC dreptunghic în A se ia punctul D astfel ca $\| CD \| = (1/4) \| BC \|$; se proiectează mijlocul M al ipotenuzei în E pe AC și în F pe AD. Să se arate că* $5 \operatorname{tg} \hat{B} \cdot \operatorname{tg} \widehat{FME} = 1$

E. Abason, G. M. 4/1914

Soluție. Observăm de la început că proprietatea enunțată este independentă de poziția punctului M pe $|BC|$. Într-adevăr oricare ar fi M, vom avea $\widehat{FME} \equiv \widehat{CAD}$. Să luăm pe prelungirea ipotenuzei punctul D astfel ca $C \in |BD|$ și $\| CD \| = (p/q) \| BC \|$ și să proiectăm un punct oarecare M de pe ipotenuză în E pe AC și în F pe AD. Vom arăta că $(p + q) \operatorname{tg} \hat{B} \operatorname{tg} \widehat{FME} = p$. Triunghiul ACD ne dă

$$\frac{\| CD \|}{\sin \widehat{FME}} = \frac{\| AC \|}{\sin \hat{D}} = \frac{\| AC \|}{\sin (90^\circ + \hat{B} + \widehat{FME})} = \frac{\| AC \|}{\cos (\hat{B} + \widehat{FME})} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \| CD \| \cos (\hat{B} + \widehat{FME}) = \| AC \| \sin \widehat{FME}.$$

Însă $\| CD \| = (p/q) \| BC \|$ iar $\| AC \| = \| BC \| \sin \hat{B}$, deci

$$(p/q) \cos (\hat{B} + \widehat{FME}) = \sin \hat{B} \sin \widehat{FME}.$$

Dezvoltînd pe $\cos (\hat{B} + \widehat{FME})$ și împărțind cu $\cos \hat{B} \cos \widehat{FME}$, obținem $(p + q) \operatorname{tg} \hat{B} \operatorname{tg} \widehat{FME} = p$, care pentru $p = 1$ $q = 4$ devine relația dată în enunț.

P 63. *Fie $ABCD$ un trapez isoscel cu laturile paralele $|AB|$, $|CD|$ și P un punct oarecare pe cercul de centru O circumscris trapezului. Să se demonstreze că perpendiculara din B pe CP intersectează perpendiculara din D pe AP într-un punct situat pe cercul de centru O.*

Gh. Buicliu, G. M. 5/1959

Soluție. Fie M proiecția lui B pe CP și N proiecția lui D pe AP (fig. P 63). Notăm cu Q intersecția dreptelor BM și DN. Patrulaterul $PMQN$ având unghiurile din M și N drepte este inscriptibil și prin urmare $\widehat{NPM} \equiv \widehat{MQD} \equiv \widehat{BQD}$. Dar $m(\widehat{NPM}) = \dfrac{m(\widehat{DA}) + m(\widehat{DC})}{2}$ și cum $\widehat{DA} \equiv \widehat{BC}$ rezultă $m(\widehat{NPM}) = m(\widehat{MQD}) = m(\widehat{BQD}) = \dfrac{m(\widehat{DC}) + m(\widehat{BC})}{2} = \alpha$ ceea ce arată că punctul Q se află pe arcul de cerc capabil de unghiul descris pe $|BD|$, adică se află pe arcul $BPAD$ al cercului de centru O.

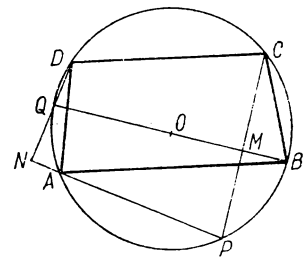


Fig. P 63

P 64. *În triunghiul ABC, dreptele care unesc mijlocul A' al laturii $|BC|$ cu picioarele H_b și H_c a două ceviene duse din B și respectiv din C sînt tăiate de o dreaptă Δ dusă prin A (paralelă la BC) în punctele $\{\alpha\} = A'H_c \cap \Delta$ și $\{\beta\} = A'H_b \cap \Delta$. Să se arate că $H_b\alpha$ și $H_c\beta$ concură pe mediana AA'.*

*** G. M. B. 4/1959

Soluție. Deoarece $BC \parallel \Delta$, rezultă că perechile de triunghiuri $(H_cA\alpha, H_cBA')$, $(H_bA\beta, A'H_bC)$ sînt asemenea (fig. P 64). Rezultă

$$\frac{\|A\alpha\|}{\|\alpha H_c\|} = \frac{\|BA'\|}{\|H_cA'\|} \quad (1), \qquad \frac{\|\beta H_b\|}{\|A\beta\|} = \frac{\|H_bA'\|}{\|A'C\|} \quad (2).$$

Înmulțind (1) și (2) membru cu membru și ținînd seama de $\|BA'\| = \|A'C\|$ obținem relația echivalentă

$$\frac{\|A\alpha\|}{\|A\beta\|} \cdot \frac{\|H_b\beta\|}{\|H_bA'\|} \cdot \frac{\|H_cA'\|}{\|H_c\alpha\|} = 1.$$

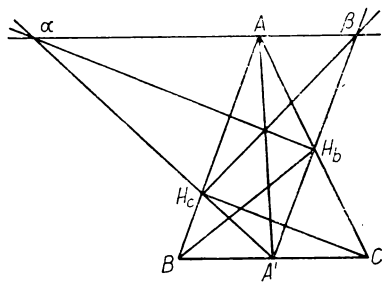


Fig. P 64

Conform reciprocei teoremei lui Ceva dreptele AA', $H_c\beta$, $H_b\alpha$ sînt concurente.

P 65. *În orice triunghi avem*

$$\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}-\frac{1}{p}=\frac{8R}{bc\sin A}.$$

Savin Popescu, G. M. vol. XVII

Soluție. Avem

$$\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}-\frac{1}{p}=$$

$$=\frac{p(p-b)(p-c)+p(p-a)(p-c)+p(p-a)(p-b)-(p-a)(p-b)(p-c)}{p(p-a)(p-b)(p-c)}=$$

$$=\frac{p(p-c)(p-b+p-a)+(p-a)(p-b)[p-(p-c)]}{p(p-a)(p-b)(p-c)}=$$

$$=\frac{p(p-c)c+(p-a)(p-b)c}{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\frac{c[p^2-pc+p^2-(a+b)p+ab]}{p(p-a)(p-b)(p-c)}=$$

$$=\frac{c[2p^2-pc-(2p-c)p+ab]}{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\frac{abc}{p(p-a)(p-b)(p-c)}=$$

$$=\frac{abc}{S^2}=\frac{abc}{4S}\cdot\frac{4}{\frac{bc\sin A}{2}}=\frac{8R}{bc\sin A}.$$

P 66. *Se dă un cerc* (c) *și o dreaptă oarecare* (Δ). *Fie* M *un punct mobil pe cerc și* N *piciorul perpendicularei din* M *pe* (Δ). *Se cere locul geometric al punctului* I, *mijlocul segmentului* $[MN]$.

* * *, G. M. F. B, 1961

Soluție. Alegem centrul cercului ca origine a sistemului de axe de coordonate, perpendiculara din centru pe dreapta (Δ) ca axă Ox, iar ca unitate de măsură să luăm raza cercului (fig. P 66).

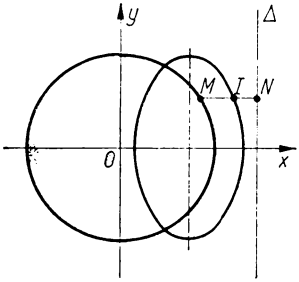


Fig. P 66

Fie $x = 2a$ ecuația dreptei (Δ) și $M(\alpha, \beta)$ un punct curent al cercului:

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1. \tag{1}$$

În acest caz avem $N(2a, \beta)$, iar coordonatele punctului I vor fi date de

$$x = \frac{2a+\alpha}{2}, \quad y = \beta. \tag{2}$$

Ecuația locului se obține eliminînd pe α și β între relațiile (1) și (2):

$$4(x-a)^2 + y^2 - 1 = 0 \tag{3}$$

care reprezintă o elipsă cu centrul în $(a, 0)$, axa mare paralelă cu (Δ) și egală cu diametrul cercului, iar axa mică jumătate din axa mare.

De notat că dreapta (Δ) poate avea orice poziție față de cerc. În particular ea poate trece chiar prin centrul cercului ($a = 0$). Elipsa își păstrează forma și mărimea, schimbîndu-și numai poziția în funcție de distanța dreptei (Δ) față de centrul cercului.

P 67. *Se dau două drepte* Δ, Δ', *perpendiculare una pe alta și două puncte* A, B *situate pe* Δ'. *Dintr-un punct* P *luat pe dreapta* Δ *se duc dreptele* PA, PB. *Se cere să se afle locul punctului de intersecție a dreptei* PB *cu perpendiculara pe* PA *dusă prin punctul* A, *cînd* P *descrie* Δ.

Bogdan Ionescu, G. M., vol. II, 1896/1897

Soluția 1. Se alege dreapta Δ' ca axă a absciselor și Δ ca axă a ordonatelor, pe care luăm punctele $A(a, 0)$, $B(b, 0)$ și $P(0, \lambda)$, λ fiind un parametru variabil (fig. P 67a). Ecuația dreptei PA este $a(y - \lambda) + \lambda x = 0$, cea a dreptei AM (M fiind un punct al locului):

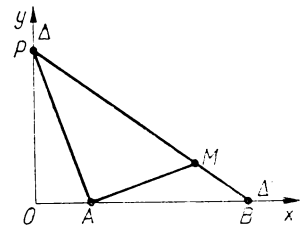


Fig. P 67a

$$\lambda y = a(x - a), \tag{1}$$

iar ecuația dreptei PB:

$$b(y - \lambda) + \lambda x = 0. \tag{2}$$

Eliminînd parametrul λ între ecuațiile (1) și (2) se obține imediat ecuația locului:

$$ax^2 + by^2 - a(a + b)\,x + a^2 b = 0. \tag{3}$$

Această ecuație reprezintă o conică cu centrul în mijlocul segmentului $[AB]$ și avînd pe $[AB]$ ca axă mare sau transversă, după cum conica este o elipsă sau o hiperbolă.

Ecuația (3) poate reprezenta:

I. Elipsă, cînd avem $a > 0$, $b > 0$ sau $a < 0$, $b < 0$, adică atunci cînd punctele A și B sînt de aceeași parte a dreptei Δ.

II. Hiperbolă, cînd $a > 0$, $b < 0$ sau $a < 0$, $b > 0$, adică atunci cînd A și B sînt deoparte și de alta a dreptei Δ.

Caz particular: hiperbola este echilateră cînd $a = -b$, adică atunci cînd Δ trece prin mijlocul segmentului $[AB]$.

III. Parabolă, în cazul în care dreapta PB este paralelă cu axa Ox, deci $b \to \pm\infty$. Ecuația acestei parabole este

$$y^2 = a(x - a).$$

IV. Locul se reduce la o *dreaptă:* axa Ox sau axa Oy, după cum punctul A, respectiv punctul B coincide cu originea.

Soluția 2. Pentru a evita ecuația locului geometric exprimată sub forma (3), vom alege originea sistemului de axe în mijlocul segmentului $[AB]$, dreapta Δ' ca axă Ox, iar perpendiculară pe mijlocul segmentului $[AB]$ ca axă Oy (fig. P 67b). Notînd cu $2c$ lungimea segmentului $[AB]$, cu kc abscisa punctului P (k fiind un număr real dat), vom avea $A(-c, 0)$, $B(c,0)$ și $P(kc, \lambda)$, λ fiind parametrul variabil. În acest caz, ecuația dreptei PA este

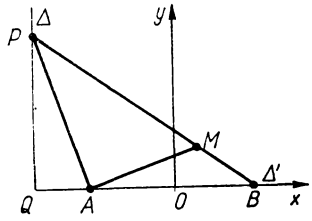


Fig. P 67b

$$\lambda(x + c) - cy(k + 1) = 0$$

iar cea a dreptei AM:

$$c(k + 1)(x + c) + \lambda y = 0 \qquad (1')$$

și ecuația dreptei PB:

$$\lambda(x - c) - cy(k - 1) = 0. \qquad (2')$$

Eliminînd parametrul λ între ecuațiile (1') și (2') se obține imediat ecuația locului:

$$(k + 1)x^2 + (k - 1)y^2 - c^2(k + 1) = 0 \qquad (3')$$

sau, notînd $d = c^2 \dfrac{k+1}{k-1}$:

$$\frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{d} = 1. \qquad (3'')$$

Ecuația (3'') poate reprezenta:

I. Elipsă, cînd $k \in (-\infty, -c) \cup (c, +\infty)$, deci punctul Q este exterior segmentului $[AB]$.

II. Hiperbolă, cînd $k \in (-c, c)$, deci punctul Q se află situat între punctele A și B.

Caz particular: **hiperbola este echilateră**, cînd $k=0$, deci punctul Q se află în origine.

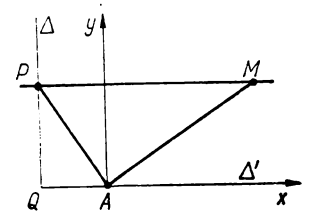


Fig. P 67c

III. În cazul în care dreapta PM este paralelă cu dreapta Δ', vom alege originea în punctul A. Notînd cu k abscisa punctului P, vom avea $A(0, 0)$ și $P(k, \lambda)$ (fig. P 67 c). În acest caz, ecuația dreptei PA este $\lambda x - ky = 0$ cea a dreptei AM: $kx + \lambda y = 0$ iar cea a dreptei PM: $y = \lambda$.

Eliminînd acum parametrul λ între ultimele două ecuații, obținem ecuația locului: $y^2 = -kx$, deci o parabolă cu vîrful în A și axa Ox.

IV. În ecuația (3'), dacă luăm $k = -1$, deci punctul Q coincide cu punctul A, ecuația locului devine $y = 0$, deci axa Ox, adică dreapta Δ', iar dacă $k = 1$, deci Q coincide cu B, ecuația locului este $x = c$, deci dreapta Δ.

P 68. *Pe ipotenuza* $|BC|$ *a unui triunghi dreptunghic* ABC *se iau punctele* M *și* N *astfel încît* $\|BM\| = \|MN\| = \|NC\|$. *Se notează* $m(\widehat{BAM}) = x$, $m(\widehat{MAN}) = y$, $m(\widehat{NAC}) = z$. *Folosind definiția funcțiilor trigonometrice să se arate că* $3 \sin x \sin z = \sin y$.

Gh. Popescu. G. M. 12/1964

Soluție. Fie R proiecția lui M pe AB, P proiecția lui A pe BC (fig. P 68), S proiecția lui N pe AM, Q proiecția lui N pe AC.

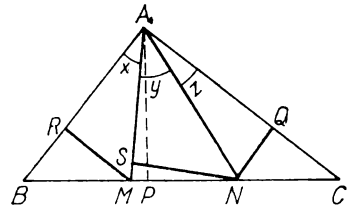


Fig. P 68

Avem $\|MR\| = \dfrac{b}{3}$ deci $\sin x = \dfrac{b}{3\|AM\|}$; $\|NQ\| = \dfrac{c}{3}$ deci $\sin z = \dfrac{c}{3\|AN\|}$. Apoi $\|AP\| = \dfrac{bc}{a}$. Aria triunghiului $AMN = \dfrac{\|AM\| \cdot \|NS\|}{2} = \dfrac{bc}{6}$ deci $\|NS\| = \dfrac{bc}{3\|AM\|}$ și $\sin y = \dfrac{bc}{3\|AM\| \cdot \|AN\|}$. Rămîne să demonstrăm că $3 \cdot \dfrac{b}{3\|AM\|} \cdot \dfrac{c}{3\|AN\|} = \dfrac{bc}{3\|AM\| \cdot \|AN\|}$ care este evidentă.

P 69. *Se dă paralelogramul* $ABCD$ *și* M *un punct mobil pe* $|CD|$. *Dreptel* AM *și* BM *taie diagonalele* $|BD|$ *și* $|AC|$ *respectiv în* A *și* B'. *Intersecția diagonalelor fiind* O, *să se arate că* $\sigma[A'MB'] = 2\sigma[A'OB']$.

* * * G. M. 10/1964

Soluție. Avem

$$\frac{\sigma[A'MB']}{\sigma[AMB]} = \frac{\|A'M\| \cdot \|B'M\|}{\|AM\| \cdot \|BM\|}; \qquad \frac{\sigma[OA'B']}{\sigma[OAB]} = \frac{\|OA'\| \cdot \|OB'\|}{\|OA\| \cdot \|OB\|}.$$

Dar $\sigma[AOB] = \dfrac{1}{2} \cdot \sigma[AMB]$ deoarece $\|MF\| = 2\|GO\|$, unde am notat cu F proiecția lui M pe AB și cu G proiecția lui O pe AB (fig. P 69). Deci rămîne de arătat relația

$$\frac{\|A'M\| \cdot \|MB'\|}{\|AM\| \cdot \|MB\|} = \frac{\|OA'\| \cdot \|OB'\|}{\|OA\| \cdot \|OB\|}. \quad (1)$$

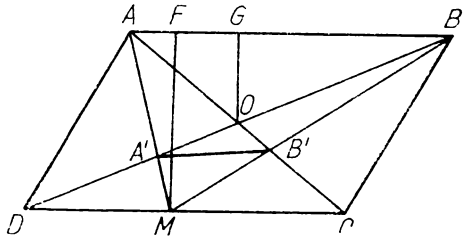


Fig. P 69

Scriem teorema lui Menelaus pentru $A'BM$ și transversala AOB' și pentru $AB'M$ și transversala $A'OB$ și avem

$$\frac{\|A'O\|}{\|OB\|}\cdot\frac{\|BB'\|}{\|B'M\|}\cdot\frac{\|AM\|}{\|AA'\|}=1, \tag{2}$$

și

$$\frac{\|OB'\|}{\|OA\|}\cdot\frac{\|AA'\|}{\|A'M\|}\cdot\frac{\|MB\|}{\|BB'\|}=1. \tag{3}$$

Înmulțind (2) cu (3) obținem o egalitate echivalentă cu (1).

P 70. *Se dă o piramidă $[VABC]$ și punctele M, N, P, Q pe muchiile $|AB|$, $|BC|$, $|CV|$ și respectiv $|VA|$, astfel încît:*

$$\frac{\|AM\|}{\|MB\|}=\frac{\|BN\|}{\|NC\|}=\frac{\|CP\|}{\|PV\|}=\frac{1}{k} \text{ și } \frac{\|AQ\|}{\|QV\|}=\frac{1}{k^3}.$$

Să se arate că punctele M, N, P, Q sînt coplanare.

(Problema este o generalizare a problemei 17 445 G. M. 10/1978).

Enghin Veis, G. M. 5/1979

Soluție. Dacă $k=1$, atunci M, N, P, Q (fig. P 70) sînt mijloacele muchiilor respective și atunci segmentele $|MQ|$, $|NP|$ sînt linii mijlocii respectiv în triunghiurile VAB și VBC. Atunci dreptele MQ și NP sînt paralele cu VB, deci determină un plan. Presupunem acum $k\neq 1$. În planul (ABC) conform axiomei lui Pasch aplicată dreptei MN și triunghiului ABC, deducem că dreapta MN intersectează dreapta AC într-un punct X, ce nu aparține segmentului $|AC|$. În planul (VAC), axioma Pasch pentru triunghiul VAC și dreapta XP arată că dreapta XP intersectează segmentul $|AV|$ într-un punct T.

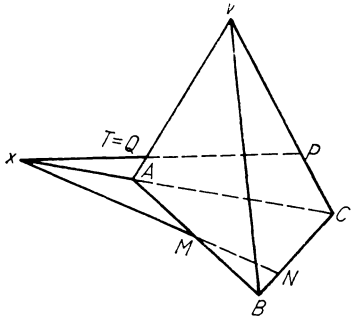


Fig. P 70

Teorema lui Menelaus aplicată triunghiului ABC și transversalei XMN conduce la $\frac{\|XC\|}{\|XA\|}=k^2$; teorema lui Menelaus aplicată triunghiului VAC și transversalei XTP conduce la $\frac{\|TA\|}{\|TV\|}=\frac{1}{k^3}$. Rezultă $Q=T$ și atunci puntele M, N, P, Q aparțin planului determinat de dreptele concurente XP și XM. O generalizare a acestei probleme se poate vedea în G. M. nr. 1/1980.

P 71. *Să se determine* $a \in \mathbf{R}$ *astfel încît expresia*

$$E = x\sqrt[9]{a} - \sqrt[3]{24x^3 + \sqrt[9]{ax^9 - 729x^8 + 1}}$$

pentru $x \to \infty$ *să aibă o limită finită. Să se determine această limită.*

V. Alaci, G. M. 4/1914

Soluţie. Expresia dată se poate scrie:

$$E = \left[\sqrt[9]{a} - \sqrt[3]{24 + \sqrt[8]{a - \frac{729}{x} + \frac{1}{x^9}}}\right]x \tag{1}$$

care pentru $x \to \infty$ devine

$$\lim_{x\to\infty} E = \infty \cdot \left[\sqrt[9]{a} - \sqrt[8]{24 + \sqrt[9]{a}}\right].$$

Pentru ca E să poată avea o limită finită trebuie ca paranteza să fie nulă, deoarece E se prezintă sub forma $\infty \cdot 0$. Trebuie să avem $\sqrt[9]{a} = \sqrt[3]{24 + \sqrt[9]{a}}$, cu soluţia $a = 27$. Înlocuind în (1) pe a avem:

$$E = x\left[3 - \sqrt[3]{24 + \sqrt[3]{27 - \frac{729}{x} + \frac{1}{x^9}}}\right],$$

care se mai poate scrie:

$$E = \frac{3 - \left[24 + \left(27 - \frac{729}{x} + \frac{1}{x^9}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{x}}.$$

Pentru $x \to \infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} E$ se prezintă sub forma $\frac{0}{0}$, deci aplicăm regula lui l'Hôspital:

$$\lim_{x\to\infty} E = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{3}\left[24 + \left(27 - \frac{729}{x} + \frac{1}{x^9}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^{-\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(27 - \frac{729}{x} + \frac{1}{x^9}\right)^{-\frac{2}{3}} \left(\frac{729}{x^2} - \frac{9}{x^{10}}\right)}{\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{9}\left[24 + \left(27 - \frac{729}{x} + \frac{1}{x^9}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^{-\frac{2}{3}} \cdot \left(27 - \frac{729}{x} + \frac{1}{x^9}\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot$$

$$\cdot \left(729 - \frac{9}{x^8}\right) = \frac{1}{9} \cdot 27^{-\frac{4}{3}} \cdot 729 = 1.$$

P 72. *Fie* $n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant 2$. *Să se arate că*

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x^n - \sin^n x}{x^{n+2}} = \frac{n}{6}.$$

Maria Elena Panaitopol, G. M. 5/1979

Soluție. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x^n - \sin^n x}{x^{n+2}} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x^n - x^n}{x^{n+2}} + \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^n - \sin^n x}{x^{n+2}}.$ (1)

Folosind de două ori regula lui l'Hôspital avem

$$\lim_{y \to 0} \frac{\sin y - y}{y^3} = \lim_{y \to 0} \frac{\cos y - 1}{3y^2} = \lim_{y \to 0} \frac{-\sin y}{6y} = -\frac{1}{6}. \tag{2}$$

Atunci, folosind (2):

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x^n - x^n}{x^{n+2}} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x^n - x^n}{x^{3n}} \cdot \lim_{x \to 0} x^{2n-2} =$$

$$= \lim_{y \to 0} \frac{\sin y - y}{y^3} \cdot \lim_{x \to 0} x^{2n-2} = -\frac{1}{6} \cdot 0 = 0.$$

După aceea

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^n - \sin^n x}{x^{n+2}} = \lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{x^{n-1} + x^{n-2} \sin x + \ldots + x \sin^{n-2} x + \sin^{n-1} x}{x^{n-1}} =$$

$$= -\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} \cdot \lim_{x \to 0} \left[1 + \frac{\sin x}{x} + \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{n-1}\right] =$$

$$= -\left(-\frac{1}{6}\right) \underbrace{(1 + 1 + \ldots + 1)}_{n \text{ ori}} = \frac{n}{6}.$$

Capitolul **II**

PROBLEME PENTRU CERCURILE DE MATEMATICĂ (CE)

Introducere

Cercurile de matematică au o tradiție frumoasă în țara noastră. Ele au adus servicii memorabile pregătirii gustului pentru competițiile matematice. În cercuri se strîng, sub conducerea unui profesor, el însuși iubitor al matematicii, elevii care simt atracția rezolvării și apoi propunerii de probleme. În cercuri se face ucenicia în cercetarea matematică și din cercuri se ridică adesea talente, care altfel poate n-ar descoperi matematica și n-ar fi nici ei descoperiți pentru a fi promovați ca viitori matematicieni.

Dar cercurile nu sînt deschise numai vîrfurilor prezumtive, ci și altor elevi mai puțin străluciți de la început. Și aceștia își găsesc locuri și uneori chiar și chemarea în cercuri alături de ceilalți, ca într-o echipă în care nu toți excelează din primul moment.

Cînd am hotărît alcătuirea unui capitol special destinat cercurilor de elevi am avut în vedere această structură și această funcționalitate. Gazeta Matematică ne-a oferit materiale remarcabile fiindcă ea însăși a fost concepută ca o revistă destinată cercurilor de elevi formate spontan sau sub îndemnul unor profesori pasionați și dornici de a descoperi și forma vocații matematice.

Ca și în capitolul precedent, strategia metodologică ne îndeamnă să punem în deschidere probleme de teoria numerelor. Cititorul care va fi exersat cu atenție problemele din capitolul pregătitor va observa imediat caracterul competitiv al problemelor destinate cercurilor. Astfel problema (CE 2) necesită folosirea inducției pe baza observației că pentru $m = 1$ se regăsește teorema lui *Wilson*. Semnată de *A. Simionov* această problemă este de fapt o notă matematică pe care *G. Nichifor* o reia în problema (CE 3). unde o folosește pentru un rezultat ce se obține cu o tehnică simplă.

Vom găsi ca și în capitolul precedent colaborări internaționale prestigioase ca cea a lui *V. Thébault* (CE 7), precum și probleme de examene de admitere ca (CE 11).

Algebra este bine reprezentată prin probleme semnate de *N. Abramescu* (CE 13), *A. G. Ioachimescu* (CE 14) *V. Vâlcovici* (CE 15), precum și de numeroși alți autori cunoscuți și apreciați de-a lungul anilor de apariție neîntreruptă a G.M. Probleme ca (CE 18), (CE 19), (CE 23), (CE 24) sau (CE 26). pot stimula aptitudini și comentarii rodnice în cercuri. În general toate problemele de algebră aduc tehnici, metode și rezultate antrenante.

Geometria ocupă o parte însemnată în activitățile de cercuri. De aceea au fost alese probleme instructive și adesea purtătoare de dificultăți de demonstrație din care se învață mult. Vom găsi și aici nume ca cele ale lui *S. Stoilov* (CE 23) și *N. Ciorănescu* (CE 35.), mai puțin așteptate în probleme de geometrie, dar doveditoare de necesitatea unei culturi matematice cît mai largi.

Analiza constituie pentru cercuri o piatră de încercare a grijii pentru rigoare, ca și a stăpînirii algebrei și geometriei, care se găsesc prezente în metodele de rezolvare analitice, deși nu sînt anunțate în mod special. Exemplele (CE 57), (CE 58), (CE 61) sînt grăitoare. De asemenea, teoremele celebre se găsesc folosite cu pricepere și ingeniozitate în probleme ca (CE 42) sau (CE 50).

Parcurgerea acestui capitol cu creionul și cu marcarea etapelor dificile sau ingenioase este utilă oricărui iubitor de matematică și cu atît mai mult elevilor din cercuri.

CE 1. *Să se demonstreze că nu există nici o pereche de numere naturale m și n astfel ca expresiile $m^2 + 4n$ și $n^2 + 4m$ să fie simultan pătrate perfecte.*

I. Cucurezeanu, G. M. 3/1979

Soluție. Presupunem prin absurd că există numerele naturale m și n astfel că $m^2 + 4n$ și $n^2 + 4m$ sînt pătrate perfecte. Expresiile fiind simetrice în m și n, putem fixa o ordonare între acestea, să zicem $m \leqslant n$. Deoarece $n^2 + 4m > n^2$ și $n^2 + 4m$ este pătrat, rezultă

$$n^2 + 4m \geqslant (n + 1)^2. \tag{1}$$

Pe de altă parte

$$n^2 + 4m \leqslant n^2 + 4n < (n + 2)^2. \tag{2}$$

Din (1) și (2) rezultă în mod necesar $n^2 + 4m = (n + 1)^2$ sau $4m = 2n + 1$, care este o contradicție.

CE 2. *Dacă p este număr prim și $m \in \{1, 2, ..., p\}$ avem*

$$(m - 1)\,!\,(p - m)\,! = \mathcal{M}p + (-1)^m.$$

A. Simionov, G. M., vol. XIV

Soluție. Vom demonstra prin inducție după m. Pentru $m = 1$ rezultatul devine $(p-1)! = \mathcal{M}p - 1$, care este chiar teorema lui Wilson. Să presupunem că este adevărat pentru m și să arătăm și pentru $m+1$ $(m < p)$. Avem așadar

$$(m-1)!(p-m)! = \mathcal{M}p + (-1)^m. \tag{1}$$

De asemenea avem evident

$$(m-1)!(p-m-1)!p = \mathcal{M}p. \tag{2}$$

Scăzînd (1) din (2) obținem

$$(m-1)!(p-m-1)!(p-p+m) = \mathcal{M}p + (-1)^{m+1} \quad \text{sau}$$

$$m!(p-m-1)! = \mathcal{M}p + (-1)^{m+1},$$

ceea ce încheie demonstrația prin inducție.
Este util să menționăm că în demonstrația prin inducție am presupus $m < p$. Dacă însă $m = p$, rezultatul se menține, fiind iarăși vorba de teorema lui Wilson.

CE 3. *Dacă p este prim, $p \geqslant 3$, avem*

$$[1!\ 2!\ 3! \ldots (p-1)!]^2 = \mathcal{M}p + (-1)^{\frac{p+1}{2}}.$$

G. Nichifor, G. M., vol. XIV

Soluție. Conform problemei precedente a lui A. Simionov, vom avea (făcînd $m = 1, 2, 3, \ldots, p$):

$$0!(p-1)! = \mathcal{M}p + (-1)^1,$$

$$1!(p-2)! = \mathcal{M}p + (-1)^2,$$

$$2!(p-3)! = \mathcal{M}p + (-1)^3,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(p-2)! \cdot 1! = \mathcal{M}p + (-1)^{p-1}$$

$$(p-1)!0! = p + (-1)^p.$$

Înmulțind aceste egalități se obține

$$[1!\ 2!\ 3! \ldots (p-1)!]^2 = \mathcal{M}p + (-1)^{\frac{p(p+1)}{2}} =$$

$$= \mathcal{M}p + [(-1)^p]^{\frac{p+1}{2}} = \mathcal{M}p + (-1)^{\frac{p+1}{2}}.$$

CE 4. *Să se rezolve în numere întregi ecuația*

$$x^3 + y^3 + z^3 = 4^2 + x^2 + y^2 + z^2,$$

x, y, z fiind termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice.

G. Dumitrescu, G. M., vol. XXIII, 1917

Soluție. Fie $x = y + u$, iar $z = y - u$ $(x, y, z \in \mathbf{Z}, u \in \mathbf{Z}_+)$.

Rezultă, $3y^3 + 6u^2y = 16 + 3y^2 + 2u^2$ sau $2(3y - 1)u^2 = 16 - 3y^2(y - 1)$.

Dacă $y \leqslant 0$ rezultă deci că primul membru este un număr negativ.
Dacă $y > 0$ al doilea membru este pozitiv, dacă și numai dacă $y = 1$ sau $y = 2$.
În aceste cazuri avem $4u^2 = 16$ sau $10u^2 = 4$. Rezultă deci $u = 2$, adică $x = -1$, $y = 1$ și $z = 3$.

CE 5. *Se știe că produsul a patru numere naturale consecutive nenule mărit cu 1 este un pătrat perfect.*

1) *Cîte pătrate perfecte distincte mai mici sau egale cu p putem obține considerînd toate produsele distincte de patru numere consecutive inferioare lui p mărite cu 1* $(p \geqslant 4, p \in \mathbf{N}^*)$?

2) *Cîte pătrate perfecte mai există, în afară de cele de mai sus, care nu depășesc pe cel mai mare de la punctul 1).*

Gh. Niculescu, G. M., vol. XXXVIII, 1932

Soluție. 1) Ne interesează așadar cîte numere de forma $a(a + 1)(a + 2)(a + 3) + 1$, cu $a \in \mathbf{N}$, sînt mai mici sau egale cu p. Avem succesiv:

$$a(a + 1)(a + 2)(a + 3) + 1 \leqslant p \Leftrightarrow (a^2 + 3a)(a^2 + 3a + 2) + 1 \leqslant p \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a^2 + 3a)^2 + 2(a^2 + 3a) + 1 \leqslant p \Leftrightarrow (a^2 + 3a + 1)^2 \leqslant p \Leftrightarrow a^2 + 3a +$$

$$+ 1 \leqslant \sqrt{p} \Leftrightarrow a^2 + 3a + 1 - \sqrt{p} \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{-3 - \sqrt{5 + 4\sqrt{p}}}{2} \leqslant a \leqslant$$

$$\leqslant \frac{-3 + \sqrt{5 + 4\sqrt{p}}}{2}.$$

Cum $a \in \mathbf{N}$, inegalitatea din stînga se verifică ușor, așa că reținem numai inegalitatea din dreapta, adică

$$a \leqslant \frac{-3 + \sqrt{5 + 4\sqrt{p}}}{2} \quad \text{Rezultă} \quad a \in \left\{0, 1, 2, \ldots, \left[\frac{-3 + \sqrt{5 + 4\sqrt{p}}}{2}\right]\right\},$$

ceea ce înseamnă că există $\left[\frac{-3 + \sqrt{5 + 4\sqrt{p}}}{2}\right] + 1$ pătrate perfecte de tipul celor căutate.

2) Să notăm $\left[\frac{-3 + \sqrt{5 + 4\sqrt{p}}}{2}\right] = k$. Cel mai mare pătrat perfect de tipul celor de la 1) este $k(k + 1)(k + 2)(k + 3) + 1 = (k^2 + 3k + 1)^2$. Toate pătratele perfecte care nu-l depășesc pe acesta sînt $1^2, 2^2, \ldots, (k^2 + 3k + 1)^2$ adică sînt în număr de $k^2 + 3k + 1$.

Dacă le dăm la o parte pe cele de la pct. 1), care sînt în număr de $k+1$, constatăm că rămîn k^2+2k pătrate perfecte, unde $k=\left[\frac{-3+\sqrt{5+4\sqrt{p}}}{2}\right]$.

CE 6. *Să se rezolve în* $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ *ecuația*:

$$x+y=mxy$$

știind că m *este un număr natural dat.*

L. Pîrșan, G. M. 1984

Soluție. Dacă $m=0$, ecuația devine $x+y=0$ cu soluțiile $(a,-a)$, $a\in\mathbf{Z}$. Dacă $m=1$, obținem ecuația $x+y=xy$ cu soluțiile $(0,0)$ și $(2,2)$. Dacă $m=2$ obținem ecuația $x+y=2xy$ cu soluțiile $(0,0)$ și $(1,1)$.

Să presupunem prin absurd că ecuația $x+y=2xy$, care se mai scrie $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=2$ (pentru $x\neq 0$ și $y\neq 0$) admite și soluții cu proprietatea că $|x|>1$ sau $|y|>1$. Dacă $x=0\Rightarrow y=0$; dacă $x=1\Rightarrow y=1$; dacă $x=-1\Rightarrow y\notin\mathbf{Z}$. Analog pentru $|y|\leqslant 1$. Rămîne deci $|x|>1$ și $|y|>1$. În acest caz $\frac{1}{|x|}+\frac{1}{|y|}<2$. Pe de altă parte $2=\left|\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right|\leqslant\left|\frac{1}{x}\right|+\left|\frac{1}{y}\right|<2$, cea ce este absurd. Dacă $m\geqslant 3$ ecuația admite numai soluția $(0,0)$ și demonstrația se face ca în cazul $m=2$.

CE 7. *Să se găsească un pătrat de forma* $\overline{abc\,90\,abc}$.

V. Thébault, G. M. vol. XLII, 1936

Soluție. Dacă N^2 este pătratul căutat, atunci rezultă

$$100\,90100<N^2<99990999 \text{ sau } 3176<N<9999. \tag{1}$$

Din enunț avem

$$N^2=\overline{abc90abc}=\overline{abc}\,(10^5+1)+90000=11\times 9091+\overline{abc}$$

sau

$$(N-300)(N+300)=11\times 9091\times\overline{abc}.$$

Cum $N+300$ și $N-300$ nu sînt simultan multipli de 9091 și nici de 11, (pentru că și diferența lor 600 ar trebui să fie) nu putem avea, ținînd cont de (1), decît:

$$\begin{cases} N+300=11\times\overline{abc} \\ N-300=9091 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} N+300=9091 \\ N-300=11\times\overline{abc}. \end{cases}$$

Rezultă deci $N=9391$ ($\overline{abc}=881$) și $N=8791$, care nu este soluție a problemei, deoarece $8791^2=76581681$.

CE 8. *Să se rezolve în numere întregi sistemul*

$$\begin{cases} x + y - z = xy \\ x^2 + y^2 - z^2 = 0 \end{cases}$$

I. Păsăricâ, G. M., vol. XXIV, 1919

Soluţie. Din a doua ecuaţie rezultă

$(x + y)^2 - z^2 = 2xy$, $(x + y + z)(x + y - z) = 2xy$ şi, ţinînd seama de prima, $xy(x + y + z) = 2xy$.

Deci $x = 0$ sau $y = 0$ sau $x + y + z = 2$

Dacă $x = 0$, rezultă $y = z$, deci avem soluţiile $x = 0$, $y = z = m$ $(m \in \mathbf{Z})$

Analog pentru $y = 0$, obţinînd soluţiile $x = z = m$ $(m \in \mathbf{Z})$, $y = 0$.

Dacă $x + y + z = 2$, adunînd cu prima ecuaţie obţinem

$$2(x + y) = xy + 2 \text{ sau } y = \frac{2(x - 1)}{x - 2}, \quad x \neq 2.$$

Dar $(x - 1, x - 2) = 1$, deci $(x - 2)/2$, adică $x - 2 = 1$, $x - 2 = -1$, $x - 2 = 2$, $x - 2 = -2$, de unde rezultă $x = 3$, $x = 1$, $x = 4$, $x = 0$.

Calculînd valorile corespunzătoare ale lui y şi z rezultă

$y = 4$, $y = 0$, $y = 3$, $y = 1$ respectiv $z = -5$, $z = 1$, $z = -5$, $z = 1$.

Reunind toate soluţiile obţinute, avem în final soluţiile sistemului:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = m \\ z = m \end{cases} \quad \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \\ z = -5 \end{cases} \quad \begin{cases} x = m \\ y = 0 \\ z = m \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \\ z = -5 \end{cases} \qquad (m \in \mathbf{Z})$$

CE 9. *Să se demonstreze că dacă produsul a două numere naturale nenule M, N este de forma $2^m - 1$ $(m \in \mathbf{N}^*)$, atunci $M + 1$ şi $N - 1$ se divid prin aceeaşi putere a lui 2.*

Gh. Buicliu, G. M. 4/1955

Soluţie. Din egalitatea $M \cdot N = 2^m - 1$ rezultă că M şi N sînt două numere impare. Prin urmare $M + 1$ şi $N - 1$ sînt numere pare.

Fie deci $M + 1 = 2^n q$ $(n, q \in \mathbf{N}^*, q$ impar). Egalitatea precedentă devine

$$2^m - 1 = (2^n q - 1) N.$$

Rezultă $N - 1 = 2^n qN - 2^m$ şi deoarece $n < m$ atunci $N - 1 = 2^n(Nq - 2^{m-n})$ ($Nq - 2^{m-n}$ este un număr pozitiv impar pentru că în cazul în care am avea $Nq - 2^{m-n} < 0$ ar rezulta $N - 1 < Nq - 2^m$ sau $2^m - 1 < N(q - 1) < N(2^n q - 1) = M \cdot N$, relaţie ce contrazice ipoteza).

CE 10. *Să se arate că expresia*

$$E = 5^{5n+10} + 2 \cdot 7^{5n+5} + 5^{3n+5} \cdot 7^{4n+5} + 2 \cdot 5^{2n+5} \cdot 7^n$$

se divide prin 1947 oricare ar fi valoarea întreagă și pozitivă a lui n.

M. Sarian, G. M. vol. LIII, 1947

Soluție. Expresia dată se mai poate scrie

$$E = (5^{2n+5} + 7^{4n+5})(2 \cdot 7^n + 5^{3n+5}).$$

Pe de altă parte rezultă că $1947 = 33 \times 59$.

Avem: $5^{2n+5} + 7^{4n+5} = 5^3 \cdot 25^{n+1} + 7 \cdot 2401^{n+1} = 5^3 \cdot 25^{n+1} +$

$$+ 7(25 + 33m)^{n+1} = (125 + 7)\, 25^{n+1} + 33m = 33\,(4 \cdot 25^{n+1} + m) = \mathcal{M}33 \quad (m \in \mathbf{N}^*).$$

De asemenea avem

$$2 \cdot 7^n + 5^{3n+5} = 2 \cdot 7^n + 5^5 (7 + 59m)^n = (2 + 3125)\, 7^n + 59m =$$

$$= 33 \cdot 59 \cdot 7^n + 59m = 59(33 \cdot 7^n + m) = \mathcal{M}59.$$

Rezultă deci că produsul celor două expresii este divizibil prin 33×59, adică prin 1947.

CE 11. *Să se determine un număr natural care îndeplinește următoarele condiții:*

a) *nu are ca factori primi decît pe 2 și 3*; b) *suma tuturor divizorilor naturali este egală cu 28*; c) *suma pătratelor acelorași divizori este egală cu* 210.

Admitere la Fac. Matematică—Fizică, București, 1960, G. M. F. B., vol. 12, 1961

Soluție. Deoarece numărul are ca factori primi numai pe 2 și 3, este de forma $N = 2^\alpha \cdot 3^\beta$ unde α și β sînt numere naturale.

Suma tuturor divizorilor naturali ai numărului N va fi

$$\sum_{\substack{0 \leqslant j \leqslant \alpha \\ 0 \leqslant i \leqslant \beta}} 2^i 3^j = \sum_{i=0}^{\alpha} 2^i \cdot \sum_{j=0}^{\beta} 3^j = \frac{(2^{\alpha+1} - 1)(3^{\beta+1} - 1)}{2} =$$

$$= 28 \Rightarrow (2^{\alpha+1} - 1)(3^{\beta+1} - 1) = 56.$$

Suma pătratelor acelorași divizori este (calculată ca mai înainte):

$$\frac{(2^{2(\alpha+1)} - 1)(3^{2(\beta+1)} - 1)}{24} = 210 \Rightarrow ((2^{(\alpha+1)2} - 1)((3^{\beta+1})^2 - 1) = 5040.$$

Fie $t = 2^{\alpha+1} - 1$ și $v = 3^{\beta+1} - 1$. Relațiile de mai sus devin

$$\begin{cases} tv = 56 \\ tv(t+2)(v+2) = 5040 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} tv = 56 \\ 60 + 2(t+v) = 90 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t + v = 15 \\ tv = 56 \end{cases} \quad \text{adică } t \text{ și } v \text{ sînt soluțiile ecuației}$$

$$z^2 - 15z + 56 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 8 \\ v = 7 \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} v = 8 \\ t = 7 \end{cases}.$$

Singura soluție acceptabilă este

$$\begin{cases} 2^{\alpha+1} - 1 = 7 \\ 3^{\beta+1} - 1 = 8 \end{cases} \Rightarrow \alpha = 2 \text{ și } \beta = 1, \text{ adică } N = 2^2 \cdot 3 = 12$$

CE 12. *Să se arate că*

$$\frac{n!}{\prod_{i=1}^{n}(x-i)} = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \frac{C_n^i}{x-i},$$

(unde x este un număr real diferit de 0, 1, 2, 3, ..., n*).*

L. Pîrșan, G. M. 5/1968

Soluție. Ținînd cont de descompunerea în fracții simple rezultă

$$\frac{n!}{x(x-1)(x-2)\ldots(x-n)} = \frac{A_0}{x} + \frac{A_1}{x-1} + \ldots +$$

$$+ \frac{A_n}{x-n}, \quad (\forall) x \in \mathbf{R} \setminus \{0, 1, \ldots, n\}. \tag{1}$$

Determinăm pe A_k prin înmulțire în ambii membri ai identității (1) cu $x - k$ și apoi prin trecere la limită după $x \to k$. Rezultă

$$\frac{n!}{k(k-1)\ldots 1 \cdot (-1)(-2)\ldots(k-n)} = A_k, \text{ deci}$$

$$A_k = \frac{n!}{k!(n-k)}(-1)^k = (-1)^k C_n^k.$$

Înlocuind valorile coeficienților A_k în (1) rezultă

$$\frac{n!}{x(x-1)(x-2)\ldots(x-n)} = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \frac{C_n^i}{x-i}$$

sau

$$\frac{n!}{\prod_{i=0}^{n}(x-i)} = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \frac{C_n^i}{x-i}.$$

CE 13. *Să se rezolve sistemul*

$$\frac{a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_nx_n - 1}{a_1} = \frac{a_1x_1 + a_3x_3 + \ldots + a_nx_n - 1}{a_2} =$$

$$= \ldots = \frac{a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_{n-1}x_{n-1} - 1}{a_n} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}.$$

Să se arate că dacă $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 0$, *atunci*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = \frac{n}{n-1}\cdot$$

N. Abramescu, G. M., vol. XI

Soluţie. Conform unei proprietăţi a şirului de rapoarte egale, valoarea fiecărui raport este egală cu raportul dintre suma numărătorilor şi suma numitorilor primelor n rapoarte, adică

$$\frac{(n-1)(a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n) - n}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}. \tag{1}$$

Notăm $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = S$. Conform aceleiaşi proprietăţi, valoarea fiecărui raport este egală cu rapoartele ce se obţin scăzînd din numărătorul, respectiv numitorul lui (1), numărătorul, respectiv numitorul fiecărui raport, înmulţite cu $n - 1$. Obţinem egalităţile

$$\frac{(n-1)a_1x_1 - 1}{S - (n-1)a_1} = \frac{(n-1)a_2x_2 - 1}{S - (n-1)a_1} = \ldots = \frac{(n-1)a_nx_n - 1}{S - (n-1)a_n} =$$

$$= \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + a_n^2} = t.$$

Dacă vom determina pe t, numerele $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se vor determina astfel

$$\begin{aligned}
x_1 &= \left[\frac{S}{(n-1)a_1} - 1\right]t + \frac{1}{(n-1)a_1}; \\
x_2 &= \left[\frac{S}{(n-1)a_2} - 1\right]t + \frac{1}{(n-1)a_2}; \\
&\cdots\cdots \\
x_n &= \left[\frac{S}{(n-1)a_n} - 1\right]t + \frac{1}{(n-1)a_n}.
\end{aligned} \tag{3}$$

Pentru a determina pe t, ridicăm la pătrat egalităţile (3) şi le adunăm.

Notînd $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n} = b_1$, $\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \ldots + \frac{1}{a_n^2} = b_2$ avem

$$t^2 = \left[\frac{S^2}{(n-1)^2}b_2 - \frac{2S}{n-1}b_1 + n\right]t^2 + 2\left[\frac{S}{(n-1)^2}b_2 - \frac{b_1}{n-1}\right]t +$$

$$+ \frac{1}{(n-1)^2}b_2$$

sau

$$\left[\frac{S^2}{(n-1)^2}b_2 - \frac{2S}{n-1}b_1 + n - 1\right]t^2 + 2\left[\frac{S}{(n-1)^2}b_2 - \frac{b_1}{n-1}\right]t +$$

$$+ \frac{1}{(n-1)^2}b_2 = 0.$$

Din această ecuație se determină valorile lui t, iar din (3) se obțin soluțiile sistemului (două soluții).

Dacă $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 0$, atunci $x_i = -t + \dfrac{1}{(n-1)a_i}$, deci

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = -t\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n-1} = \frac{n}{n-1}.$$

CE 14. *Să se determine un polinom neconstant* $f \in \mathbf{C}[X]$ *și un număr complex* a, *astfel încît* $f(ax) = f(x)$, $(\forall)x \in \mathbf{C}$.

A. G. Ioachimescu, G. M., vol. XI

Soluție. Dacă $f = b_0 + b_1X + \ldots + b_n X^n$, condiția din enunț este echivalnetă cu

$$b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_nx^n = b_n + ab_1x + a^2b_2x^2 + \ldots + a^nb_nx^n$$

sau

$$b_1(a-1) = 0;\ b_2(a^2-1) = 0;\ \ldots;\ b_n(a^n-1) = 0. \qquad (1)$$

Polinomul fiind neconstant, cel puțin unul din numerele complexe $b_1, b_2, \ldots, b_n$ este nenul și atunci paranteza corespunzătoare trebuie să fie nulă, ceea ce arată că a este o rădăcină a unității de un anumit ordin.
Să notăm cu k cel mai mic număr natural nenul cu proprietatea $a^k = 1$ (k este ordinul elementului a în grupul rădăcinilor unității din care face parte a). Ținînd cont de teorema împărțirii cu rest aplicată numerelor p și k ($p = 1, 2, \ldots, n$) obținem ușor că $(a^p = 1) \Leftrightarrow (p$ este multiplu de $k)$.
Rezultă că pentru $p \neq$ multiplu de k, datorită condițiilor (1), trebuie să avem $b_p = 0$. Prin urmare, polinomul f va avea forma

$f = b_0 + b_kX^k + b_{2k}X^{2k} + \ldots + b_{jk}X^{jk}$ (unde $b_0, b_k, b_{2k}, \ldots, b_{jk} \in \mathbf{C}$), iar a este o rădăcină a unității, cu proprietatea că numărul k este cel mai mic astfel ca $a^k = 1$.

CE 15. *Dacă polinomul* $P(X)$ *cu coeficienți raționali admite o rădăcină primitivă a ecuației* $x^{2n} - 1 = 0$, *atunci*

$$\prod_{i=0}^{m} P(X^{2i+1}) = (X^{2^{n-1}} + 1)^{m+1} P_1(X)$$

unde $P_1(X)$ *este un polinom cu coeficienți raționali* ($m \in \mathbf{N}^*$).

V. Vîlcovici, G. M. vol. XI

Soluție. Dacă ζ este rădăcina primitivă de ordinul 2^n a unității, cu proprietatea că $P(\zeta) = 0$, atunci se știe că polinomul $P(X)$ se divide cu polinomul minimal al lui ζ peste corpul $\mathbf{Q}$. Acest polinom minimal al lui ζ este polinomul ciclotomic de ordinul 2^n, notat

$\varnothing_{2^n}(X)$. Se știe că dacă p este număr prim, atunci $\varnothing_{p^n}(X) = \varnothing_p(X^{p^{n-1}})$. Pentru $p = 2$, ținînd seama că $\varnothing_2(X) = X+1$, vom avea $\varnothing_{2^n}(X)=X^{2^{n-1}}+1$. Așadar există un polinom $F(X)$ cu coeficienți raționali, astfel încît $P(X) = (X^{2^{n-1}} + 1)F(X)$. Făcînd schimbarea $X \to X^{2i+1}$ și ținînd seama că $(X^{2i+1})^{2^{n-1}} + 1 = (X^{2^{n-1}})^{2i+1} + 1$, care se divide cu $X^{2^{n-1}} + 1$, vom putea scrie $P(X^{2i+1}) = (X^{2^{n-1}} + 1) f_i(X)$, unde $f_i(X)$ este un polinom cu coeficienți raționali ($i = 0, 1, 2, \ldots, m$). Înmulțind aceste egalități obținem egalitatea din enunț.

CE 16. *Să se arate că*

$$\sum_{k=0}^{p} C_p^k A_m^k A_{n-p}^{m-k} = A_n^m.$$

Adrian Bușilă, G. M. vol. XLII, 1937

Soluție. Fie identitatea

$$(1 + x)^p (x + 1)^{n-p} = (1 + x)^n.$$

Se egalează coeficientul lui x^m din ambii membri și rezultă

$$\sum_{k=0}^{p} C_p^k C_{n-p}^{m-k} = C_n^m$$

sau

$$m! \cdot \sum_{k=0}^{p} C_p^k C_{n-p}^{m-k} = A_n^m,$$

de unde

$$\sum_{k=0}^{p} C_p^k \frac{m!}{(m-k)!} A_{n-p}^{m-k} = \sum_{k=0}^{p} C_p^k A_m^k A_{n-p}^{m-k} = A_n^m.$$

CE 17. *Să se arate că*

a) $\sum_{k=0}^{n} (p + k) C_n^k = 2^{n-1}(n + 2p)$;

b) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k (p + k) C_n^k = 0.$

Ș. Strătilă, G. M. F. B. 7/1961

Soluție. a) Suma se poate scrie

$$\sum_{k=0}^{n} (p + k) C_n^k = p \sum_{k=0}^{n} C_n^k + \sum_{k=0}^{n} k C_n^k = p \cdot 2^n + \sum_{k=0}^{n} k C_n^k.$$

Însă $$\sum_{k=0}^{n} kC_n^k = C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \ldots + nC_n^n.$$

Pe de altă parte avem

$$(x+1)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^k x^k + \ldots + C_n^n x^n.$$

Derivăm această relaţie şi obţinem

$$n(x+1)^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2 x + \ldots + kC_n^k x^{k-1} + \ldots + nC_n^n x^{n-1}.$$

Făcînd $x = 1$ în relaţia de mai sus, rezultă

$$n\,2^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2 + \ldots + kC_n^k + \ldots + nC_n^n = \sum_{k=0}^{n} kC_n^k.$$

Deci

$$\sum_{k=0}^{n} (p+k)\,C_p^k = p2^n + n\,2^{n-1} = 2^{n-1}(n+2p).$$

b) Suma mai poate fi scrisă sub forma

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k (p+k) = p\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k + \sum_{k=0}^{n} (-1)^k\, kC_n^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k\, kC_n^k, \text{ deoarece am ţinut cont că } \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0.$$

Să considerăm identitatea

$$(x-1)^n = C_n^0 - C_n^1 x + C_n^2 x^2 - C_u^3 x^3 + \ldots + (-1)^k C_n^k x^k + \ldots +$$

$$+ (-1)^n C_n^n x^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k x^{k-1}.$$

Derivînd, avem $n(x-1)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k C_n^k k x^{k-1}$ şi făcînd $x = 1$ se obţine $\sum_{k=1}^{n} (-1)^k\, C_n^k\, k = 0$ sau $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k k C_n^k = 0$ şi de aici rezultă identitatea din enunţ.

CE 18. *Să se demonstreze identitatea*

$$\left(\sum_{k=0}^{n} 2^k\, C_{2n}^{2k}\right)^2 - 2\left(\sum_{k=0}^{n-1} 2^k C_{2n}^{2k+1}\right)^2 = 1.$$

I. Tomescu, G. M. B. 10/1966

Soluție. Pornim de la dezvoltarea

$$(1+\sqrt{2})^{2n} = 1+\sqrt{2}\,C_{2n}^1 + 2C_{2n}^2 + \ldots + 2^kC_{2n}^{2k} + \sqrt{2}\cdot 2^kC_{2n}^{2k+1} + \ldots +$$

$$+ 2^n = 1 + 2C_{2n}^2 + \ldots + 2^kC_{2n}^{2k} + \ldots + 2^n + \sqrt{2}\,(C_{2n}^1 + 2C_{2n}^3 + \ldots +$$

$$+ 2^kC_{2n}^{2k+1} + \ldots + 2^{n-1}C_{2n}^{2n-1}) = \sum_{k=0}^{n} 2^kC_{2n}^{2k} + \sqrt{2}\cdot\sum_{k=0}^{n=1} 2^kC_{2n}^{2k+1}$$

Analog se obține

$$(1-\sqrt{2})^{2n} = \sum_{k=0}^{n} 2^kC_{2n}^{2k} - \sqrt{2}\cdot\sum_{k=0}^{n=1} 2^kC_{2n}^{2k+1}$$

Înmulțind cele două relații membru cu membru, rezultă

$$(1-2)^{2n} = \left(\sum_{k=0}^{n} 2^k\,C_{2n}^{2k}\right)^2 - \left(\sqrt{2}\cdot\sum_{k=0}^{n-1} 2^k\,C_{2n}^{2k+1}\right)^2$$

$$\text{sau}\left(\sum_{k=0}^{n} 2^k\,C_{2n}^{2k}\right)^2 - 2\left(\sum_{k=0}^{n=1} 2^k\,C_{2n}^{3k+1}\right)^2 = 1.$$

CE 19. *Se dă polinomul* $P(X) = X^n + aX^{n-1} + \ldots + a_{n-1}X + a_n$, *avînd numai rădăcini simple, toate numere prime. Facem notația* $(-1)^n = \omega$.

a) *Să se arate că oricare ar fi numărul natural* m, *astfel ca* m *să nu se dividă prin nici o rădăcină a lui* $P(X)$, *ecuația* $x\,\omega\,a_n + 1 - m^{\omega P(1)} = 0$ *admite rădăcină naturală.*

b) *Dacă numărul* $\omega\,a_n + 1$ *este prim să se găsească efectiv o rădăcină a lui* $P(X)$.

V. Greu, G. M. 2/1975

Soluție. a) Observăm că $\omega^2 = 1$. Calculăm $P(1)$. Fie $p_1, p_2, \ldots, p_n$ rădăcinile lui $P(X)$. Ținînd cont de relațiile între rădăcini și coeficienți avem

$$P(1) = 1 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 1 - (p_1 + p_2 + \ldots + p_n) + (p_1p_2 +$$

$$+ \ldots + p_{n-1}p_n) + \ldots + (-1)^n p_1p_2 \ldots p_n = (1-p_1)(1-p_2)\ldots(1-p_n) =$$

$$= (-1)^n (p_1-1)(p_2-1)\ldots(p_n-1) = \omega\,(p_1-1)(p_2-1)\ldots(p_n-1).$$

Rezolvînd ecuația obținem

$$x = \frac{m^{\omega P(1)} - 1}{\omega a_n} = \frac{m^{\omega^2(p-1)\cdots(p_n-1)} - 1}{\omega(-1)^n\,p_1p_2\ldots p_n} = \frac{m^{(p_1-1)(p_2-1)\cdots(p_n-1)} - 1}{p_1p_2\ldots p_n}.$$

Notînd cu φ indicatorul lui Euler, se știe că $\varphi(p_1p_2\ldots p_n) = (p_1-1)(p_2-1)\ldots(p_n-1)$ și aplicînd teorema lui Euler, avem

$$x = \frac{m^{\varphi(p_1p_2\cdots p_n)} - 1}{p_1p_2\ldots p_n} = \frac{kp_1p_2\ldots p_n}{p_1p_2\ldots p_n} = k, \text{ unde } k \text{ este un număr natural.}$$

b) Avem $\omega a_n + 1 = p_1 p_2 \dots p_n + 1$ și acesta fiind un număr prim, nu poate fi 2, deoarece fiecare $p_i \geqslant 2$ deci $p_1 p_2 \dots p_n + 1 > 2$. Rezultă că $p_1 p_2 \dots p_n + 1$ va fi un număr prim impar. De aici, $p_1 p_2 \dots p_n$ va fi par adică se va divide cu 2. Rezultă că unul din numerele p_i este egal cu 2, adică $x = 2$ este o rădăcină a lui $P(X)$.

CE 20. *Fie* $P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$ *un polinom cu coeficienți* ***complecși, cu rădăcinile*** $x_1, x_2, \dots, x_n$ ***distincte, iar*** $x'_1, x'_2, \dots, x'_{n-1}$ *rădăcinile* ***derivatei*** $P'(x)$. *Dacă* $|x_i - x'_j| = r > 0$, $(\forall) i = 1, 2, \dots, n$ și $(\forall) j = 1, 2, \dots, n-1$, atunci

$$x'_1 = x'_2 = \dots = x'_{n-1} = -\frac{a_1}{n a_0}.$$

N. N. Burcea, G. M. 4/1979

Soluție. Evident, problema este nebanală, dacă $n \geqslant 3$ (căci dacă $n = 1$, derivata nu are rădăcini, iar dacă $n = 2$ derivata are doar o rădăcină). Să presupunem prin absurd că nu toate numerele complexe $x'_1, x'_2, \dots, x'_{n-1}$ sînt egale, deci că există cel puțin două din ele distincte, fie de exemplu acestea x'_p și x'_p.
Deoarece $|x_i - x'_p| = r$, $(\forall) i = 1, 2, \dots, n$ rezultă că imaginile geometrice ale numerelor complexe $x_1, x_2, \dots, x_n$ se găsesc pe cercul de centru x'_p și rază r, fie acesta (C_1). Deoarece $|x_i - x'_q| = r$, $i = 1, 2, \dots, n$ rezultă că numefele $x_1, x_2, \dots, x$ se găsesc pe cercul de centru x'_p și rază r, fie acesta (C_2). Cercurile (C_1) și (C_2) avînd aceeași rază și centre diferite se intersectează în cel mult două puncte. Pe de altă parte ele au $n \geqslant 3$ puncte comune $x_1, x_2, \dots, x_n$. Aceasta este o contfadicție. Rezultă așadar $x'_1 = x'_2 = \dots = x'_{n-1}$ și din relațiile lui Viete pentru polinomul $P'(x)$, deducem imediat că valoarea lor comună este $-a_1/na_0$.

CE 21. *Fie* $P \in \mathbf{R}[X]$, $P(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^{n-i}$ *și fie* x_j, $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ *rădăcinile ecuației* $P(X) = 0$. *Dacă* $|x_j| = 1$ *și* $x_j \neq 1$, $(\forall) j \in \{1, 2, \dots, n\}$ *să se arate că:* a) *Dacă* a_i *sînt coeficienții polinomului* $P'(X)$, *atunci*

$$\sum_{i=0}^{n-1} a'_i = \frac{n}{2} \cdot \sum_{j=0}^{n} a_j.$$

b) *Dacă există* $y \in \mathbf{C}$ *cu* $|y| = 1$ *și* $|P(y)| = |a_o| 2^n$, *atunci*

$$P(X) = a_o (X + 1)^n.$$

I. Mărăndici, G. M. 3/1979

Soluție. a) Pentru $x \in \mathbf{C} \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ se cunoaște identitatea

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{x - x_j}.$$

Făcînd $x = 1$, ținînd cont că $P(1) = \sum_{j=0}^{n} a_j$ iar $P'(1) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i'$, precum și de faptul că putem scrie $x_j = \cos \alpha_j + i \sin \alpha_j$, $j = \overline{1, n}$, vom avea

$$\frac{\sum_{i=0}^{n-1} a_i'}{\sum_{j=0}^{n} a_j} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{1 - \cos \alpha_j - i \sin \alpha_j} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2 \sin \frac{\alpha_j}{2} \left(\sin \frac{\alpha_j}{2} - i \cos \frac{\alpha_j}{2} \right)} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{\sin \frac{\alpha_j}{2} + i \cos \frac{\alpha_j}{2}}{2 \sin \frac{\alpha_j}{2}} = \frac{n}{2} + i \sum_{j=1}^{n} \frac{\operatorname{cotg} \frac{\alpha_j}{2}}{2}.$$

Egalînd părțile reale rezultă $\frac{\sum_{i=0}^{n-1} a_i'}{\sum_{j=0}^{n} a_j} = \frac{n}{2}$, adică egalitatea din enunț.

b) Avem în general $P(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)$, $(\forall)\, x \in \mathbf{C}$, deci $P(y) = a_0(y - x_1)(y - x_2) \ldots (y - x_n)$. Aplicînd modulul obținem

$$|a_0| 2^n = |P(y)| = |a_0| |y - x_1| |y - x_2| \ldots |y - x_n| \leqslant$$

$$\leqslant |a_0| (|y| + |x_1|)(|y| + |x_2|) \ldots (|y| + |x_n|) = |a_0| 2^n,$$

ceea ce obligă la egalitățile:

$$|y - x_1| = 2,\ |y - x_2| = 2,\ \ldots,\ |y - x_n| = 2.$$

Aceste relații arată că în planul complex punctele $x_1, x_2, \ldots, x_n$ aparțin cercului (C_1) de centru y și rază 2. Pe de altă parte ele aparțin cercului (C_2), de centru originea și rază 1, cerc pe care se află și y. Dar cercul (C_2) este tangent interior cercului (C_1), deci ele au un singur punct comun. Rezultă atunci $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$ și cum suma lor este reală, rezultă că ele sînt numere reale. Așadar aparțin mulțimii $\{-1, 1\}$, dar cum prin ipoteză $x_j \neq 1$, rezultă: $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = -1$. Atunci $P(X) = a_0(X + 1)^n$.

CE 22. *Să se demonstreze că pentru orice polinom $P(x)$ cu rădăcinile simple $x_1, x_2, \ldots, x_n$ avem relația*

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{P''(x_i)}{P'(x_i)} = 0.$$

Al. Oțet, G. M. 9/1981

Soluție. Din relația cunoscută $P'(x) = P(x) \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x - x_i}$,

$$(\forall)\ x \in \mathbf{R} \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}$$

obținem prin derivare

$$P''(x) = P'(x) \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x - x_i} + P(x) \cdot \left(-\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(x - x_i)^2} \right) = P(x) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x - x_i} \right)^2 -$$

$$- P(x) \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(x - x_i)^2}, \text{ de unde}$$

$$\frac{P''(x)}{P(x)} = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x - x_i} \right)^2 - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(x - x_i)^2} = 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{1}{(x - x_i)(x - x_j)}. \quad (1)$$

Înmulțind (1) cu $x - x_k$ obținem

$$\frac{P''(x) \cdot (x - x_k)}{P(x)} = 2 \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \frac{1}{x - x_i} + 2 \sum_{\substack{1 \leqslant i < j \leqslant n \\ i, j \neq k}} \frac{x - x_k}{(x - x_i)(x - x_j)}. \quad (2)$$

În relația (2), valabilă pentru $x \in \mathbf{R} \setminus \{x_1\ x_2, \ldots, x_n\}$, facem $x \to x_k$ și cum

$$\lim_{x \to x_k} \frac{x - x_k}{P(x)} = \lim_{x \to x_k} \frac{x - x_k}{P(x) - P(x_k)} = \frac{1}{P'(x_k)},$$

$$\text{obținem } \frac{P''(x_k)}{P'(x_k)} = 2 \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}} \frac{1}{x_k - x_i}.$$

$$\text{Atunci } \sum_{k=1}^{n} \frac{P''(x_k)}{P'(x_k)} = 2 \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \frac{1}{x_k - x_i} = 0.$$

CE 23. *Fie A un inel finit, care nu este corp și avînd proprietatea că mulțimea elementelor sale inversabile împreună cu 0 constituie un corp.*

a) *Să se arate că numărul elementelor lui A este egal cu $(n + 1)^p$, unde n este numărul elementelor inversabile din A, iar $p \geqslant 2$ este un număr natural.*

b) *Să se arate că există într-un astfel de inel cel puțin două elemente neinversabile a căror sumă este un element inversabil.*

c) *Dați exemplu de un asemenea inel.*

Marcel Țena, G. M. 2–3/1982

Soluție. a) Fie K corpul format din elementele inversabile împreună cu 0. Evident A este un K-spațiu vectorial. Notînd cu p dimensiunea lui, vom avea

$$\text{Card } A = (\text{Card } K)^p = (n+1)^p.$$

Nu putem avea $p = 0$, căci atunci Card $A = 1$, adică $0_A = 1_A$, ceea ce nu se poate în corpul K. Nu putem avea nici $p = 1$, căci atunci Card A = Card K, deci $K = A$, adică A ar fi corp, contradicție. Așadar $p \geqslant 2$.

b) Fie B mulțimea elementelor neinversabile din A. Presupunem prin absurd că suma oricăror două elemente din B este tot un element din B; rezultă că B este subgrup aditiv al grupului aditiv al corpului K și observînd că produsul dintre un element din K și un element din B, este un element din B, rezultă că B este un K-spațiu vectorial. Fie q dimensiunea lui, deci Card $B = (n+1)^q$. Avem $q \geqslant 1$, căci dacă am presupune $q = 0$, ar rezulta Card $B = 1$, adică $B = \{0_A\}$, deci A ar fi corp, contradicție. Cum inelul A are $(n+1)^p$ elemente, dintre care n inversabile și $(n+1)^q$ neinversabile, deducem egalitatea:

$$(n+1)^p = n + (n+1)^q.$$

De aici rezultă că n se divide cu $n+1$, contradicție. Așadar există elemente în B a căror sumă nu este în B.

c) $A = \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$.

CE 24. a) *Să se demonstreze identitatea*

$$\sum_{k=2}^{2^n} [\log_2 k] = (n-2) \cdot 2^n + n + 2, \quad (\forall)\, n \in \mathbf{N}.$$

b) *Să se calculeze suma*

$$S_n = \sum_{k=1}^{\frac{n(n+1)}{2}} \left[\frac{-1 + \sqrt{1+8k}}{2} \right], \quad n \in \mathbf{N}.$$

Dorin Andrica și *Titu Andreescu*, G. M. 2–3/1982

Soluție. a) Avem $[\log_2 k] = p \Leftrightarrow p \leqslant \log_2 k < p+1 \Leftrightarrow 2^p \leqslant k < 2^{p+1}$.

Deci $\sum_{k=2}^{2^n} [\log_2 k] = \sum_{2 \leqslant k < 2^2} [\log_2 k] + \sum_{2^2 \leqslant k < 2^3} [\log_2 k] + \ldots + \sum_{2^{n-1} \leqslant k < 2^n} [\log_2 k] +$

$+ [\log_2 2^n] = \sum_{2 \leqslant k < 2^2} 1 + \sum_{2^2 \leqslant k < 2^3} 2 + \ldots + \sum_{2^{n-1} \leqslant k < 2^n} (n-1) + n =$

$= 1 \cdot (2^2 - 2) + 2(2^3 - 2^2) + \ldots + (n-1)(2^n - 2^{n-1}) + n =$

$= [1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2^3 + \ldots + (n-1) \cdot 2^n] - [1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + \ldots + (n-1) \cdot 2^{n-1}] +$

$+ n = S_1 - S_2 + n$. Pentru calculul sumelor S_1 și S_2 se folosește identi-

tatea $1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} = \frac{x_n - 1}{x - 1}$, care se derivează, obținînd $1 +$

$+ 2x + \ldots + (n-1)\,x^{n-2} = \frac{(n-2)\,x^{n-1} - (n-1)\,x^{n-2} + 1}{(x-1)^2}$, $(\forall) x \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$.

Înmulțind această ultimă egalitate cu x^2 și făcînd $x = 2$ se obține S_1, iar înmulțind-o cu x și făcînd apoi $x = 2$ se obține S_2.

b) $\left[\frac{-1 + \sqrt{1 + 8k}}{2}\right] = p \Leftrightarrow p \leqslant \frac{-1 + \sqrt{1 + 8k}}{2} < p + 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{p(p+1)}{2} \leqslant k < \frac{(p+1)(p+2)}{2}$.

Atunci $S_n = \sum_{\frac{1\cdot 2}{1} \leqslant k < \frac{2\cdot 3}{2}} 1 + \sum_{\frac{2\cdot 3}{1} \leqslant k < \frac{3\cdot 4}{2}} 2 + \ldots + \sum_{\frac{(n-1)n}{2} \leqslant k < \frac{n(n+1)}{2}} (n-1) + n =$

$= 1 \cdot \left(\frac{2\cdot 3}{2} - \frac{1\cdot 2}{2}\right) + 2\left(\frac{3\cdot 4}{2} - \frac{2\cdot 3}{2}\right) + \ldots + (n-1)\left[\frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2}\right] +$

$+ n = \frac{1}{2}[1\cdot 2\cdot 3 + 2\cdot 3\cdot 4 + \ldots + (n-1)\,n(n+1)] - \frac{1}{2}[1^2\cdot 2 + 2^2\cdot 3 + \ldots$

$\ldots + (n-1)^2\,n] + n = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(k-1)\,k\,(k+1) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(k-1)^2\,k =$

$= \sum_{k=1}^{n}(k^2 - k) = \left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2}\right] = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}$.

CE 25. *Să se calculeze* $\log_{30} 7{,}2$, *considerînd că* $\log_{30} 5 = a$.

B. Huhulea, G. M. 12/1958

Soluție. Avem $\log_{30} 7{,}2 = \log_{30} \frac{36}{5} = \log_{30} 36 - \log_{30} 5 = 2 \log_{30} 6 - a$.

Notăm $\log_{30} 6 = b$ și avem $6 = 30^b$, iar din enunț $5 = 30^a$. Înmulțind, avem $30 = 30^{a+b}$, deci $a + b = 1$, adică $b = \log_{30} 6 = 1 - a$. Deci $\log_{30} 7{,}2 = 2\,(1 - a) - a = 2 - 3a$.

CE 26. *Fie* P *un polinom de gradul* n, $n \geqslant 2$, *dat de*

$$P = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n,$$

cu $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$. *În ipoteza că polinomul are toate rădăcinile de modul unu, să se arate că* $(\forall)$ $k, j \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ *avem*

$$\mathrm{Im}\left(\frac{a_k + a_{n-k}}{a_j + a_{n-j}}\right) = 0, \quad \textit{unde } a_0 = 1 \textit{ și } (\forall) j = 0, 1, 2, \ldots, n,\ a_j + a_{n-j} \neq 0.$$

Liviu Pîrșan G. M. 8/1980

Soluție. Să notăm $A = \frac{a_k + a_{n-k}}{a_j + a_{n-j}}$. Vom arăta că $\bar{A} = A$. Dacă x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ sînt rădăcinile polinomului, din relațiile lui Viète avem $\Sigma x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_p} = (-1)^p a_p$, suma făcîndu-se după toate p-uplurile $(i_1\, i_2, \ldots i_p)$ cu $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i^d \leqslant n$. Deducem

$$a_p = (-1)^p \Sigma x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_p}, \quad p = 1, 2, \ldots, n. \tag{1}$$

De asemenea din faptul că

$$|x_i| = 1, \text{ rezultă } \bar{x}_i = \frac{1}{x_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{2}$$

Avem, folosind (1) și (2):

$$\bar{A} = \frac{(-1)^k \cdot \Sigma \overline{x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k}} + (-1)^{n-k} \Sigma \overline{x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_{n-k}}}}{(-1)^j \Sigma \overline{x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_j}} + (-1)^{n-j} \Sigma \overline{x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_{n-j}}}} =$$

$$= \frac{(-1)^k \Sigma \dfrac{1}{x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_j}} + (-1)^{n-k} \Sigma \dfrac{1}{x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_{n-k}}}}{(-1)^j \Sigma \dfrac{1}{x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_j}} + (-1)^{n-j} \Sigma \dfrac{1}{x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_{n-j}}}}. \tag{3}$$

Aducînd la același numitor, care este produsul $x_1 x_2 \ldots x_n$, și ținînd seama de egalitățile evidente $(-1)^k = (-1)^{-k}$, $(-1)^{n-k} = (-1)^{n+k}$, $(-1)^j = (-1)^{-j}$, $(-1)^{n-j} = (-1)^{n+j}$, putem continua în (3) și obținem

$$\bar{A} = \frac{(-1)^{-k} \Sigma x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_{n-j}} + (-1)^{n+k} \Sigma x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k}}{(-1)^{-j} \Sigma x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_{n-k}} + (-1)^{n+j} \Sigma x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_j}}. \tag{4}$$

În sfîrșit, dacă în (4) amplificăm cu $(-1)^k$ obținem

$$\bar{A} = \frac{(-1)^{n-k} \Sigma x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_{n-k}} + (-1)^k \Sigma x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k}}{(-1)^{n-j} \Sigma x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_{n-j}} + (-1)^j \Sigma x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_j}} =$$

$$= \frac{a_{n-k} + a_k}{a_{n-j} + a_j} = A, \text{ ceea ce încheie soluția.}$$

CE 27. *Fie $F(x, y)$ o fracție rațională în raport cu x, y avînd coeficienți reali. Să se arate că putem determina trei polinoame cu coeficienți reali $P(x, y)$, $Q(x, y)$, $R(x, y)$ simetrice în raport cu x și y, astfel încît să avem*

$$F(x, y) = \frac{P(x, y) + (x - y) Q(x, y)}{R(x, y)}.$$

A. G. Ioachimescu, G. M. vol. V, 1899

Soluție. Avem $F(x, y) = \dfrac{f(x, y)}{\varphi(x, y)}$ unde $f,\ \varphi \in \mathbf{R}\ [x, y]$.

Atunci

$$F(x, y) + F(y, x) = \frac{f(x, y)}{\varphi(x, y)} + \frac{f(y, x)}{\varphi(y, x)} = \frac{f(x, y)\ \varphi(y, x) + f(y, x)\ \varphi(x, y)}{\varphi(x, y)\ \varphi(y, x)} \tag{1}$$

și

$$F(x, y) - F(y, x) = \frac{f(x, y)}{\varphi(x, y)} - \frac{f(y, x)}{\varphi(y, x)} = \frac{f(x, y)\ \varphi(y, x) - f(y, x)\ \varphi(x, y)}{\varphi(x, y)\ \varphi(y, x)}. \tag{2}$$

Vom lua $R(x, y) = \varphi(x, y)\ \varphi(y, x)$, care este un polinom simetric. Polinomul $f(x, y)\ \varphi(y, x) + f(y, x)\ \varphi(x, y)$ fiind simetric, putem scrie $(x, y)\ \varphi(y, x) + f(y, x)\ \varphi(x, y) = 2P(x, y)$ unde $P(x, y)$ este un polinom simetric. Egalitatea (1) devine

$$F(x, y) + F(y, x) = \frac{2P(x, y)}{R(x, y)}. \tag{3}$$

Polinomul $f(x, y)\ \varphi(y, x) - f(y, x)\varphi(x, y)$ este antisimetric și divizibil prin $x - y$ (deoarece pentru $x = y$ se anulează). Atunci putem scrie

$$f(x, y)\ \varphi(y, x) - f(y, x)\ \varphi(x, y) = 2(x - y)\ Q(x, y). \tag{4}$$

Dacă în (4) schimbăm pe x și y între ele, ținînd cont că polinomul din membrul stîng este antisimetric și la fel și polinomul $x - y$, rezultă $Q(x, y) = Q(y, x)$, ceea ce înseamnă că polinomul $Q(x, y)$ este simetric.
Folosind (2) și (4) rezultă:

$$F(x, y) - F(y, x) = \frac{2(x - y)\,Q(x, y)}{R(x, y)}. \tag{5}$$

Din (3) și (5) prin adunare obținem egalitatea din enunțul problemei.

CE 28. *Se consideră polinomul* $z^{n+1} - \alpha z^n - \alpha z + 1$, *unde* α *este real și* $|\alpha| > 1$, *iar* $n \in \mathbf{N}$. *Să se arate că toate rădăcinile polinomului au modulul egal cu* 1.

A. Halanay, G. M. 9/1975

Soluție. Fie $z = r(\cos t + i \sin t)$ o rădăcină oarecare a polinomului. Vom studia cele două condiții, care rezultă din enunț: $|\alpha|^2 < 1$ și $\alpha \in \mathbf{R}$, din care va rezulta că $r = 1$. Deoarece z este rădăcină avem

$$\alpha = \frac{z^{n+1} + 1}{z^n + z} = \frac{[1 + r^{n+1} \cos (n + 1)\, t] + ir^{n+1} \sin (n + 1)\, t}{(r^n \cos nt + r \cos t) + i(r^n \sin nt + r \sin t)}.$$

Atunci

$$|\alpha|^2 = \frac{[1 + r^{n+1}\cos(n+1)t]^2 + [r^{n+1}\sin(n+1)t]^2}{(r^n\cos nt + r\cos t)^2 + (r^n\sin nt + r\sin t)^2} =$$

$$= \frac{1 + 2r^{n+1}\cos(n+1)t + r^{2n+2}}{r^{2n} + 2r^{n+1}\cos(n+1)t + r^2}.$$

Observăm că numitorul este mai mare sau egal cu $r^{2n} - 2r^{n+1} + r^2 = (r^n - r)^2 \geqslant 0$, deci în inegalitatea $|\alpha|^2 < 1$ putem elimina numitorul:

$$1 + 2r^{n+1}\cos(n+1)t + r^{2n+2} < r^{2n} + 2r^{n+1}\cos(n-1)t + r^2.$$

Grupînd convenabil avem

$$(1 - r^2)(1 - r^{2n}) < 4r^{n+1}\sin nt\sin t. \tag{1}$$

Condiția a doua, $\alpha \in \mathbf{R}$, revine la

$$[1 + r^{n+1}\cos(n+1)t](r^n\sin nt + r\sin t) - r^{n+1}\sin(n+1)t \cdot [r^n\cos nt + r\cos t] = 0.$$

Efectuînd calculele:

$$r^{n-1}\sin nt + \sin t - r^{2n}\sin t - r^{n+1}\sin nt = 0,$$

$$(1 - r^{2n})\sin t + (1 - r^2)r^{n-1}\sin nt = 0,$$

$$(1 - r^2)[(1 + r^2 + r^4 + \ldots + r^{2n-2})\sin t + r^{n-1}\sin nt] = 0. \tag{2}$$

Vom evalua paranteza mare din (2); considerînd-o egală cu A avem (1)

$$4r^2 A\sin t = (1 + r^2 + r^4 + \ldots + r^{2n-2})\,4r^2\sin^2 t + 4r^{n+1}\sin nt\sin t >$$

$$> (1 + r^2 + r^4 + \ldots + r^{2n-2})\,4r^2\sin^2 t + (1 - r^2)^2(1 + r^2 + r^4 + \ldots +$$

$$+ r^{2n-2}) = (1 + r^2 + r^4 + \ldots + r^{2n-2}) \cdot (1 - 2r^2\cos 2t + r^4) \geqslant (1 + r^2 +$$

$$+ r^4 + \ldots + r^{2n-2})(1 - r^2)^2 \geqslant 0, \text{ deci } 4r^2 A\sin t > 0, \text{ adică } A \neq 0.$$

Atunci din (2) rezultă $r = 1$.

CE 29. *Se consideră funcțiile $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, g fiind surjectivă.*

a) *Să se arate că dacă G_f și G_g admit centrul de simetrie $C(a, b)$, atunci graficele funcțiilor $f + g$ și $f - g$ admit centre de simetrie, ale căror coordonate se cer.*

b) *Dacă $f \circ g$ este injectivă, să se arate că graficul funcției $f \circ g$ admite centrul de simetrie $C(a, b)$ dacă, și numai dacă C aparține primei bisectoare.*

Paul Lefter, G. M. 3/1978

Soluție. a) Condiția necesară și suficientă pentru ca graficul funcției f să admită punctul $C(a, b)$ drept centru de simetrie este ca punctul C să

fie mijlocul oricărui segment $|MN|$, avînd capetele pe graficul funcției și abscisele simetrice față de a. Dacă $M(a-t, f(a-t))$, $N(a+t, f(a+t))$, vom avea așadar

$$\frac{f(a-t)+f(a+t)}{2}=b, \quad (\forall)\, t\in\mathbf{R}. \tag{1}$$

În mod analog, putem scrie

$$\frac{g(a-t)+g(a+t)}{2}=b, \quad (\forall)\, t\in\mathbf{R}. \tag{2}$$

Adunînd cele două egalități obținem

$$\frac{(f+g)(a-t)+(f+g)(a+t)}{2}=2b$$

ceea ce arată că punctul $C_1(a, 2b)$ este centrul de simetrie al graficului funcției $f+g$. Asemănător, prin scăderea egalităților de mai înainte, obținem că punctul $C_2(a, 0)$ este centrul de simetrie al graficului funcției $f-g$.

b) Vom arăta că g surjectivă și $f\circ g$ injectivă, implică f injectivă. Fie $x_1, x_2\in\mathbf{R}$ cu $f(x_1)=f(x_2)$; din surjectivitatea lui g, $(\exists)$ α_1 și $\alpha_2\in\mathbf{R}$ cu $x_1=g(\alpha_1)$, $x_2=g(\alpha_2)$. Deci $f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow (f\circ g)(\alpha_1)=(f\circ g)(\alpha_2) \Rightarrow$ $\Rightarrow \alpha_1=\alpha_2 \Rightarrow g(\alpha_1)=g(\alpha_2) \Rightarrow x_1=x_2$.

Să presupunem că funcția $f\circ g$ are centrul de simetrie $C(a, b)$. Avem:

$$\frac{(f\circ g)(a-t)+(f\circ g)(a+t)}{2}=b, \qquad (\forall)t\in\mathbf{R}$$

și pentru $t=0$ avem $f(g(a))=b$. Din (1) și (2) pentru $t=0$ avem $f(a)=b$ și $g(a)=b$. Rezultă $f(g(a))=f(a)$ și cum f este injectivă, deducem $g(a)=a$; cum avem și $g(a)=b$, deducem $a=b$. Așadar C aparține primei bisectoare. Reciproc, presupunem că C este pe prima bisectoare, deci $b=a$. Atunci, egalitățile (1) și (2) devin

$$f(a+t)+f(a-t)=2a, \qquad (\forall)t\in\mathbf{R}, \tag{3}$$

$$g(a+t)+g(a-t)=2a, \qquad (\forall)t\in\mathbf{R}. \tag{4}$$

Să arătăm că $C(a, a)$ este centru de simetrie și pentru graficul lui $f\circ g$, adică să arătăm

$$(f\circ g)(a+t)+(f\circ g)(a-t)=2a, \qquad (\forall)\, t\in\mathbf{R}.$$

În adevăr, avem, din relațiile (4) și (3):

$$(f\circ g)(a+t)+(f\circ g)(a-t)=f[g(a+t)]+f[2a-g(a+t)]=$$

$$= (\text{notînd } g(a + t) \text{ cu } t_1) = f(t_1) + f(2a - t_1) =$$

$$= f[a - (a - t_1)] + f[a + (a - t_1)] = (\text{notînd } a - t_1 \text{ cu } t_2) =$$

$$= f(a - t_2) + f(a + t_2) = 2a, \text{ ceea ce încheie soluția.}$$

CE 30. *Se dă un triunghi oarecare ABC și un punct M mobil în interiorul său.* Se duc MP, MN paralele cu AB, AC. ($P \in |AC|$ $N \in |AB|$). *Să se afle locul geometric al punctului M dacă are loc relația*

$$\|AP\| \cdot \|AB\| + \|AN\| \cdot \|AC\| = \textit{constant.}$$

V. Brînzănescu, G. M. 12/1964

Soluție. Se unesc M cu A, B, C; N cu C; P cu B. Înmulțim relația dată cu $\frac{\sin A}{2}$ și avem

$$E = \frac{\|AP\| \cdot \|AB\|}{2} \sin A + \frac{\|AN\| \cdot \|AC\|}{2} \sin A = \text{constant}$$

sau $\sigma[ABP] + \sigma[ANC] = \text{const}$; dar $\sigma[APB] = \sigma[AMB]$ (deoarece $MP \| AB$) și $\sigma[ANC] = \sigma[AMC]$ ($MN \| AC$) deci $\sigma[AMB] + \sigma[AMC] = \text{constant}$. Dar $\sigma[BMC] = \sigma[ABC] - (\sigma[AMB] + \sigma[AMC]) = \text{constant}$. Rezultă că M descrie un segment dintr-o paralelă la BC, limitat de intersecțiile cu AB și AC.

CE 31. *Pe laturile $|AB|$ și $|AC|$ ale unui triunghi ABC luăm punctele C' respectiv B' astfel încît să avem relația* $\frac{\|AC'\|}{\|C'B\|} + \frac{\|AB'\|}{\|B'C\|} = 1$. *Să se arate că BB' și CC' se intersectează pe linia mijlocie corespunzătoare laturii $|BC|$.*

Gh. Szőllosy, G. M. 1964

Soluție. Fie $\{O\} = BB' \cap CC'$, $\{A'\} = AO \cap BC$. Conform relației lui Van Aubel avem $\frac{\|AC'\|}{\|C'B\|} + \frac{\|AB'\|}{\|B'C\|} = \frac{\|AO\|}{\|OA'\|}$. Ținînd seama de ipoteză rezultă $\frac{\|AO\|}{\|OA'\|} = 1$, adică O se află pe linia mijlocie corespunzătoare laturii $|BC|$.

CE 32. *Un cerc variabil (C) care trece printr-un punct fix P taie un cerc fix (O) în punctele A și B. Fie M punctul diametral opus lui P în cercul (C). Care este locul geometric al lui M, cînd cercul (C) variază astfel ca* $m(\widehat{AMB}) = 90°$.

V. Vâlcovici, G. M. vol. XIII

Soluție. Vom nota centrele cercurilor tot cu literele care desemnează și cercurile. Să presupunem că punctul P este exterior cercului (O) (fig. CE 32). Unghiul $\widehat{AMB}$ fiind drept, rezultă că $|AB|$ este diametru în cercul (C). Linia centrelor fiind perpendiculară pe coarda comună, deducem $OC \perp AB$.

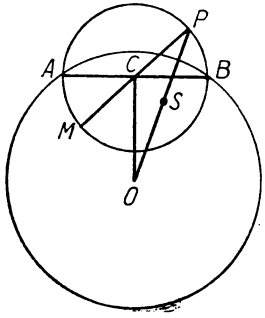


Fig. CE32

Semicercul $\widehat{APB}$ al cercului (C) va fi exterior cercului (O), deci semicercul $\widehat{AMB}$ va fi interior acestui cerc. Așadar punctul M este interior cercului (O). Deoarece $\|CP\| = \|CB\|$ (raze în cercul (C)), putem scrie

$$\|CO\|^2 + \|CP\|^2 = \|CO\|^2 + \|CB\|^2 = \|OB\|^2 = \text{constant},$$

adică suma pătratelor distanțelor lui C la punctele fixe O și P este constantă. Rezultă că C este pe un cerc (S) cu centrul în S (mijlocul segmentului $|OP|$). Cum C este interior cercului (O) (fiind pe coarda $|AB|$) deducem că locul lui C este intersecția dintre cercul (S) și interiorul cercului (O), adică în general un arc de cerc (putînd fi și un cerc întreg). Dar punctul M este omoteticul punctului C prin omotetia de centru P și raport 2. Rezultă că locul geometric al lui M este transformatul locului lui C, adică un arc de cerc făcînd parte dintr-un cerc cu centrul în O (deoarece omoteticul lui S prin omotetia de mai sus este O) . Acest arc este interior cercului (O). Dacă am fi presupus că punctul P este interior cercului (O) se obținea că locul lui M este un arc de cerc, făcînd parte dintr-un cerc concentric cu (O) și exterior acestuia. Cînd punctul P aparține cercului (O), locul lui M este cercul (O). În sfîrșit, să mai observăm că în cazul în care P este exterior cercului (O), distanța de la O la cel mai depărtat punct al cercului (C) este $\|OC\| + \|PC\|$. Așadar, în acest caz $\|OP\| = \|OC\| + \|PC\|$ deci $\|OP\|^2 = \|OC\|^2 + \|PC\|^2 + 2\|OC\| \cdot \|PC\|$. Cum $\|OC\|^2 + \|PC\|^2 = \text{constant}$, deducem că $\|OP\|^2$ este maxim cînd $\|OC\| \cdot \|PC\|$ este maxim, deci cînd $\|OC\|^2 \cdot \|PC\|^2$ este maxim și suma acestor factori fiind constantă, aceasta se realizează cînd $\|OC\| = \|PC\|$. Dar $\|PC\| = \|CB\|$, deci vom avea $\|OC\| = \|CB\| = \frac{1}{\sqrt{2}}\|OB\|$. Rezultă că distanța maximă a lui P față de O (pentru ca problema să aibă soluție) este $\|OP\| = \|OC\| + \|CP\| = \frac{1}{\sqrt{2}}\|OB\| + \frac{1}{\sqrt{2}}\|OB\| = \|OB\|\sqrt{2}$. În cazul în care $\|OP\| > \|OB\|\sqrt{2}$ problema nu are sens (locul geometric fiind mulțimea vidă).

CE 33. *Două puncte mobile se mișcă pe o dreaptă cu viteze constante diferite, pornind din același punct și fiecare menținîndu-și sensul de mișcare. În*

fiecare moment se construiesc arcele capabile de un unghi de măsură constantă, corespunzătoare segmentului determinat de cele două puncte mobile.

Să se afle locul geometric al centrelor cercurilor din care fac parte aceste arce.

S. Stoilov, G. M. vol. XII, 1907

Soluție. Fie P, P' cele două puncte mobile, d dreapta pe care se mișcă și I punctul de unde începe mișcarea (fig. CE 33). Să presupunem mai întîi că mișcarea are loc în același sens și fie M centrul cercului, care conține arcul capabil de unghiul de măsură α, arc situat față de dreapta d în semiplanul σ (în acest cerc segmentul $|PP'|$ este coardă).

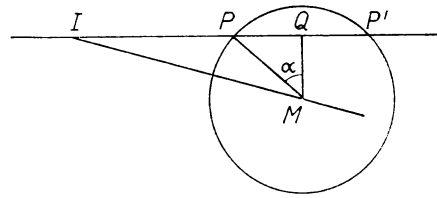


Fig. CE33

Notînd cu Q proiecția lui M pe dreapta d, vom avea $m(\widehat{PMP'}) = 2\alpha$ deci $m(\widehat{PMQ}) = \alpha$. Avem $\frac{\|PM\|}{\|PQ\|} = \frac{1}{\sin\alpha} = \text{constant}$ și atunci și $\frac{\|PM\|}{\|PP'\|} = \text{constant}$ (1).

Fie v, v' vitezele celor două mobile, $v < v'$ și fie t timpul cît s-au mișcat acestea pînă au ajuns în pozițiile P și P'.

Avem $\frac{\|PP'\|}{\|IP\|} = \frac{\|IP'\| - \|IP\|}{\|IP\|} = \frac{v't - vt}{vt} = \frac{v' - v}{v} = \text{constant}.$

Deci

$$\frac{\|PP'\|}{\|IP\|} = \text{constant}. \qquad (2)$$

Înmulțind relațiile (1) și (2) rezultă $\frac{\|PM\|}{\|IP\|} = \text{constant}.$

Cum $m(\widehat{IPM}) = \alpha + 90° = \text{constant}$, rezultă că triunghiul IPM rămîne asemenea cu el însuși, deci $m(\widehat{PIM}) = \text{constant}$. Aceasta arată că M descrie o semidreaptă cu originea în I. Dacă $\alpha < 90°$, punctul M este în semiplanul σ deci semidreapta este inclusă în acest semiplan. Dacă $\alpha = 90°$ semidreapta respectivă este inclusă în dreapta d, iar dacă $\alpha > 90°$ semidreapta pe care o descrie M este inclusă în semiplanul opus σ'.

Centrul celuilalt cerc (din care face parte celălalt arc capabil de unghiul α corespunzător segmentului $|PP'|$) fiind simetric cu M față de dreapta d, rezultă că locul acestui punct va fi o semidreaptă simetrică în raport cu dreapta d.

Dacă mișcarea mobilelor are loc în sensuri diferite, printr-un studiu analog se obțin drept locuri ale celor două centre tot două semidrepte simetrice față de dreapta d.

CE 34. *Se dau două axe dreptunghiulare Ox, Oy și un punct A fix pe Oy. Pe paralela AA, la Ox se ia un punct mobil M. Fie B mijlocul lui |AM|. Se consideră hiperbola echilateră (H), care trece prin A și M și este tangentă în O la Ox. Se cere:*

a) *Locul intersecției lui (H) cu paralela la OB dusă prin M.*

b) *Locul proiecției centrului lui (H) pe această paralelă.*

Gh. Buicliu G. M., vol. XXXV, 1929/1930

Soluție. Fie $A(O, a)$, $B(k, a)$, $M(2k, a)$ (fig. CE 34). Ecuațiile dreptelor determinate de punctele A, M și O fiind, (AM): $y - a = 0$; (OA): $x = 0$; (OM): $ax - 2ky = 0$, iar cea a tangentei în O la hiperbolă: $y = 0$, familia de conice ce trec prin A, M și sînt tangente în O axei Ox va fi:

$$y(y - a) + mx(ax - 2ky) = 0 \text{ sau } max^2 - 2mkxy + y^2 - ay = 0.$$

Conica va fi de gen hiperbolă, dacă $ma - k^2m^2 < 0$, adică $m \in (-\infty, 0) \cup \cup \left(\frac{a}{k^2}, +\infty\right)$. Direcțiile asimptotice în acest caz vor fi date de rădăcinile ecuației $t^2 - 2mkt + ma = 0$.

Pentru ca hiperbola să fie echilateră, va trebui ca cele două direcții asimptotice să fie ortogonale, adică $t_1 \cdot t_2 = -1$, de unde rezultă $ma = -1$, deci $m = -1/a$. Ecuația hiperbolei căutate va fi deci:

$$ax^2 - 2kxy - ay^2 + a^2y = 0. \tag{1}$$

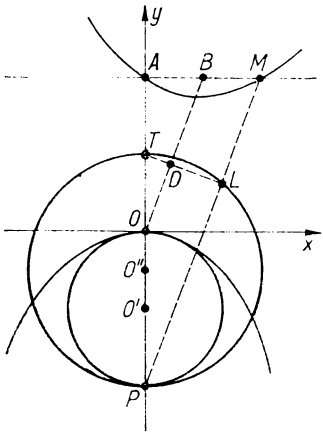


Fig. CE 34

Paralela prin M la OB are ecuația

$$ax - ky - ak = 0. \tag{2}$$

a) Locul lui N se află eliminînd pe k între (1) și (2). Rezultatul eliminării, ușor de efectuat, este $(y - a)(x^2 + y^2 + ay) = 0$ și locul cerut se compune din dreapta $y - a = 0$, care corespunde locului lui M și cercul $x^2 + y^2 + ay = 0$, care corespunde locului lui N cerut la primul punct. Acest cerc trece prin origine și prin punctul $P(0, -a)$ și are raza egală cu $a/2$.

b) Se găsește ușor că centrul hiperbole este

$$D\left(\frac{a^2k}{2a^2 + 2k^2}, \frac{a^3}{2a^2 + 2k^2}\right)$$

iar dreapta DL, perpendiculară pe MP de ecuație (2), are ecuația

$$y - \frac{a^3}{2a^2 + 2k^2} = -\frac{k}{a}\left(x - \frac{a^2k}{2a^2 + 2k^2}\right).$$

Eliminînd pe k între această ecuație și (2) se găsește că locul lui L este cercul $2x^2 + 2y^2 + ay - a^2 = 0$ de centru $\left(0, -\frac{a}{4}\right)$ și rază $\frac{3a}{4}$, adică cercul de diametru $|PT|$.

CE 35*. *Dacă a, b, c sînt lungimile laturilor unui triunghi, să se arate că avem, oricare ar fi $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{k\pi}{2}\right\}_{k\in\mathbf{Z}}$, inegalitatea*

$$a^2 < \frac{b^2}{\cos^2 \alpha} + \frac{c^2}{\sin^2 \alpha}.$$

N. Ciorănescu, G. M. vol. XLIII

Soluție. a) Se pleacă de la inegalitatea

$$(b \operatorname{tg} \alpha - c \operatorname{cotg} \alpha)^2 \geqslant 0$$

și se obține succesiv $b^2 \operatorname{tg}^2 \alpha + c^2 \operatorname{cotg}^2 \alpha - 2bc \geqslant 0$;

$$b^2\left(\frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1\right) + c^2\left(\frac{1}{\sin^2 \alpha} - 1\right) - 2bc \geqslant 0;$$

$$\frac{b^2}{\cos^2 \alpha} + \frac{c^2}{\sin^2 \alpha} \geqslant (b + c)^2.$$

Cum în orice triunghi $b + c > a$, rezultă $\frac{b^2}{\cos^2 \alpha} + \frac{c^2}{\sin^2 \alpha} > a^2$.

O altă soluție. Inegalitatea dată devine $a^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha < b^2 \sin^2 \alpha + c^2 \cos^2 \alpha$ și înlocuind $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$ se obține

$$a^2 \sin^4 \alpha - (a^2 - b^2 + c^2) \sin^2 \alpha + c^2 > 0. \quad (1)$$

Avem

$$\Delta = (a^2 - b^2 + c^2)^2 - 4a^2c^2 = (a^2 - b^2 + c^2 + 2ac)(a^2 - b^2 + c^2 - 2ac) =$$

$$= [(a + c)^2 - b^2][(a - c)^2 - b^2] = -(a + b + c)(a + c - b)(b + a - c)(b - a + c) = -2p \cdot (2p - 2b)(2p - 2c)(2p - 2a) = -2^2 S^2 < 0.$$

Rezultă că inegalitatea (1) este adevărată și deci și cea inițială, fiind echivalentă cu (1).

CE 36. *Un punct M se mișcă pe latura $|BC|$ a unui triunghi oarecare ABC. Fie O_1 și O_2 centrele cercurilor care trec prin M, A, C respectiv M, A, B. Să se afle locul geometric al mijlocului segmentului $[O_1O_2]$.*

Dan Bretan, G. M. F. B., 1961

* Vezi inegalitatea analoagă pentru funcțiile hiperbolice în problema T_1 35.

Soluție. Vom considera într-un sistem de axe xHy, un triunghi oarecare cu vîrfurile în punctele $A(O, y_A)$; $B(x_B, 0)$; $C(x_C, 0)$ și un punct curent $M(\lambda, 0)$ pe latura $|BC|$ (fig. CE 26). Centrele O_1 și O_2 se vor afla la intersecția mediatoarelor N_1O_1 cu P_1O_1 din triunghiul AMC, respectiv N_2O_2 cu P_2O_2 din triunghiul AMB.

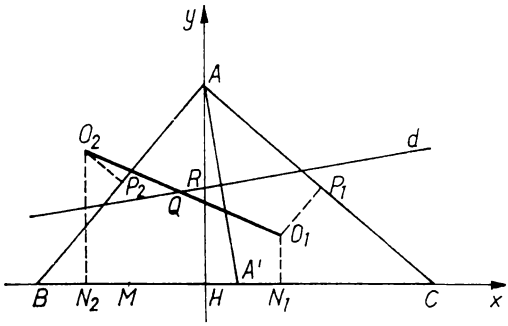


Fig. CE 36

Ecuația dreptei N_1O_1 se scrie imediat ca fiind:

$$x = \frac{1}{2}(x_C + \lambda) \qquad (1)$$

iar cea a dreptei P_1O_1, observînd că ea trece prin punctul $P_1\left(\frac{x_C}{2}, \frac{y_A}{2}\right)$ și are panta $k_1 = -\frac{1}{k_1'} = \frac{x_C}{y_A}$, unde $k_1' = -\frac{y_A}{x_C}$ este panta dreptei AC, se va scrie

$$y - \frac{y_A}{2} = \frac{x_C}{y_A}\left(x - \frac{x_C}{2}\right). \qquad (2)$$

Din (1) și (2) rezultă imediat prin eliminare, coordonatele punctului $O_1(x_{01}, y_{01})$:

$$x_{01} = \frac{1}{2}(x_C + \lambda); \quad y_{01} = \frac{\lambda_A}{2} + \frac{1}{2}\frac{x_C}{y_A}\, y. \qquad (3)$$

Analog rezultă coordonatele lui $O_2(x_{02}, y_{02})$:

$$x_{02} = \frac{1}{2}(x_B + \lambda); \quad y_{02} = \frac{y_A}{2} + \frac{1}{2}\frac{x_B}{y_A}\,\lambda. \qquad (4)$$

Vom putea scrie acum ușor coordonatele mijlocului Q al segmentului $[O_1O_2]$ din relațiile (3) și (4), ca fiind

$$x_Q = \frac{1}{2}\left[\lambda + \frac{1}{2}(x_B + x_C)\right]; \quad y_Q = \frac{1}{2}\left[y_A \oplus \frac{1}{2}\frac{\lambda}{y_A}(x_B + x_C)\right]. \qquad (5)$$

Prin eliminarea parametrului λ între ele rezultă ecuația locului geometric căutat

$$y = \frac{1}{2}\frac{x_B + x_C}{y_A}\, x + \frac{1}{2}\, y_A - \frac{1}{4}\frac{(x_B + x_C)^2}{y_A}, \qquad (6)$$

care va fi un segment inclus într-o dreaptă d.

Coeficientul unghiular al dreptei d este $k = \frac{1}{2}\,\frac{x_B + x_C}{y_A}$, iar al medianei AA' este $k' = -\frac{2y_A}{x_B + x_C}$, adică $kk' = -1$, ceea ce ne arată că dreapta care conține locul geometric este perpendiculară pe mediana AA'.

Cel de-al doilea element al dreptei d, ordonata la origine, se află făcînd în (6) pe $x = 0$ și dă

$$\|HR\| = \frac{1}{2}\,y_A - \frac{1}{4}\,\frac{(x_B + x_C)^2}{y_A}\,.$$

Deoarece $y_A = \|AH\|$; $\frac{1}{2}(x_B + x_C) = \|HA'\|$ și notînd $\theta = m(\widehat{HAA'})$, $\frac{1}{2y_A}(x_B + x_C) = \operatorname{tg}\theta$, rezultă

$$\|HR\| = \frac{1}{2}\|AH\| - \|AH\|\operatorname{tg}^2\theta = \frac{1}{2}\|AH\|\,(1 - 2\operatorname{tg}^2\theta)$$

adică $\|HR\|$ se exprimă prin elementele cunoscute ale triunghiului.

În cazul particular al triunghiului dreptunghic în A avem: $\|AH\| = \frac{bc}{a}$, iar $\theta = B - C$, valori care înlocuite în (7) ne dau

$$\|HR\| = \frac{1}{2}\,\frac{bc}{a}\,[1 - 2\operatorname{tg}^2(B - C)],$$

notațiile fiind cele obișnuite.

CE 37. *Fie $[AA']$ un diametru al unui cerc cu centrul O și M un punct al acestui cerc. Prin punctul O se duce o paralelă la dreapta $A'M$, care întîlnește perpendiculara din M pe AA' într-un punct N. Se cere locul punctului N.*

Gheorghe Țițeica, G. M. vol. I, 1895/1896

Soluție. Fie m coeficientul unghiular variabil al dreptei $A'M$; ecuația ei va fi, r însemnînd raza cercului cu diametrul $[AA']$: $y = m(x + r)$.

Abscisele punctelor de intersecție A' și M ale dreptei $A'M$ cu cercul $x^2 + y^2 - r^2 = 0$ sînt date de ecuația

$$x^2 + m^2\,(x + r)^2 - r^2 = 0. \qquad (1)$$

Ecuația paralelei NO dusă prin O la dreapta $A'M$ este

$$y = mx. \qquad (2)$$

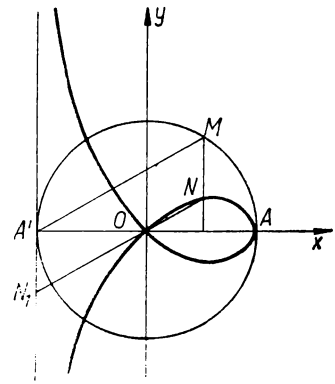


Fig. CE 37

Eliminînd m între relațiile (1) și (2), vom obține ecuația locului geometric al punctelor de intersecție N_1 și N ale dreptei NO cu perpendicularele duse pe AA' prin A' și M, adică vom obține dreapta $A'N_1$ și locul căutat. Găsim

$(x + r)\,[x^2(x - r) + y^2\,(x + r)] = 0$, deci N descrie curba (fig. CE 37)

$$y = \pm x\sqrt{\frac{r - x}{r + x}}$$

(*strofoidă* cu vîrful în A și dreapta $A'N_1$ ca asimptotă).

CE 38. *Un cerc (O) de rază R este împărțit în n arce congruente prin punctele de diviziune $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Se ia pe $|OA_1|$ punctul B_1 așa ca $\|OB_1\| = \|OA_1\|/n$; pe $|OA_2|$ punctul B_2 așa ca $\|OB_2\| = \dfrac{\|OA_2\|}{n-1}$; pe $|OA_3|$ punctul B_3 așa ca $\|OB_3\| = \dfrac{\|OA_3\|}{n-2}$ și așa mai departe. Să se arate că aria suprafeței poligonale $[B_1B_2 \ldots B_{n-1}A_n]$ este egală cu $1/n$ din aria suprafeței poligonale $[A_1A_2 \ldots A_n]$.*

Corneliu Georgescu, G. M. 12/1958

Soluție. Se știe că raportul ariilor a două triunghiuri care au cîte un unghi congruent este egal cu raportul produselor lungimilor laturilor ce cuprind acest unghi. Avem (fig. CE 38):

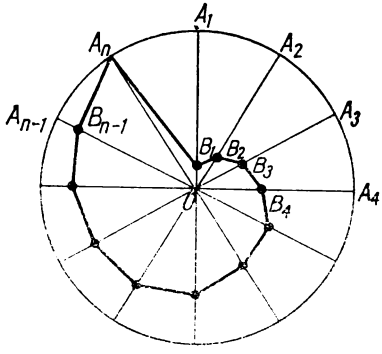


Fig. CE 38

$\|OB_1\| = \dfrac{R}{n}$, $\|OB_2\| = \dfrac{R}{n-1}$ și notînd $\sigma[OA_1A_2] = S_1$ putem scrie

$$\frac{\sigma[OB_1B_3]}{S_1} = \frac{\frac{R^2}{n(n-1)}}{R^2} = \frac{1}{n(n-1)};$$

$$\frac{\sigma[OB_2B_3]}{S_1} = \frac{1}{(n-1)(n-2)}; \ldots;$$

$$\frac{\sigma[OB_{n-1}A_n]}{S_1} = \frac{1}{2 \cdot 1}; \quad \frac{\sigma[A_nOB_1]}{S_1} = \frac{1}{n}.$$

Adunînd aceste relații (notînd $S = \sigma[B_1B_2 \ldots B_{n-1}A_n]$) obținem:

$$\frac{S}{S_1} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \ldots + \frac{1}{(n-1)n} + \frac{1}{n} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) +$$

$$+ \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} = 1. \text{ Deci } S = S_1. \text{ De aici rezultă enunțul.}$$

CE 39. *Să se arate că într-un triunghi oarecare există relația* $\frac{a}{\sin A} \cdot (b \cos B + c \cos C) = b^2 \operatorname{ctg} B + c^2 \operatorname{ctg} C$ *și încă două relații analoge.*

G. M. 12/1958

Soluție. Folosim relația sinusurilor $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ și deci:

$$\frac{a}{\sin A}(b \cos B + \cos C) = \frac{b}{\sin B} b \cos B + \frac{c}{\sin C} c \cos C = b^2 \operatorname{ctg} + B + c^2 \operatorname{ctg} C.$$

CE 40. *Considerăm trapezul $ABCD$ $(AB \| CD)$ în care punctele A și B sînt fixe, $\|AB\| = a$, $\|CD\| = b$ (constant), iar intersecția O a diagonalelor descrie un cerc (C) al cărui centru Q se află pe segmentul $|AB|$ astfel încît* $\frac{\|QA\|}{\|QB\|} = \frac{b}{a}$. *Să se determine locurile geometrice descrise de punctele C și D.*

Liliana Niculescu, G. M. 4/1978

Soluție. (fig. CE 40). Folosind asemănarea triunghiurilor AOB și COD avem

$$\frac{\|AC\|}{\|AO\|} = 1 + \frac{\|OC\|}{\|AO\|} = 1 + \frac{b}{a},$$

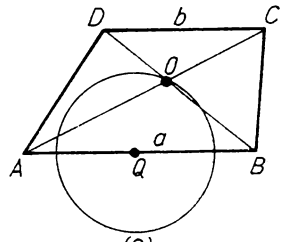


Fig. CE 40

ceea ce arată că punctul C este transformatul punctului O prin omotetia de centru A și raport $1 + \frac{b}{a}$. Cum O descrie cercul (C), mai puțin punctele de intersecție ale acestui cerc cu dreapta AB, rezultă că transformatul său, adică C, va descrie tot un cerc mai puțin două puncte (situate de asemenea pe dreapta AB). În mod asemănător, punctul D descrie omoteticul cercului (C) prin omotetia de centru B și raport $1 + \frac{b}{a}$, mai puțin două puncte de pe dreapta AB. Cercul descris de punctul D are centrul chiar în A, deoarece $\frac{\|BA\|}{\|BQ\|} = 1 + \frac{b}{a}$, ceea ce arată că A este transformatul centrului Q al cercului (C), prin omotetia de centru B și raport $1 + \frac{b}{a}$.

CE 41. a) *În triunghiul ABC ducem cercul lui Euler și înscriem în acesta triunghiul $A_1B_1C_1$, ce are laturile paralele cu primul. Notăm aria acestui cerc cu C_1 și ducem cercul lui Euler pentru triunghiul $A_1B_1C_1$ a cărui arie este C_2. Repetînd această operație de k ori, să se calculeze în funcție de o latură a triunghiului ABC și unghiul opus acesteia:* $\lim_{k \to \infty} \sum_{i=1}^{k} C_i$.

b) *Notăm cu P perimetrul triunghiului ABC, cu P_1 perimetrul triunghiului $A_1B_1C_1$, ..., cu P_k perimetrul triunghiului $A_kB_kC_k$.*

Să se calculeze în funcție de P, $\lim\limits_{k\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{k} P_i$.

Costel Chiteș, G. M. 1/1980

Soluție. a) Fie H ortocentrul triunghiului ABC și A_1, B_1, C_1 respectiv mijloacele segmentelor $|HA|$, $|HB|$, $|HC|$ (fig. CE 41).

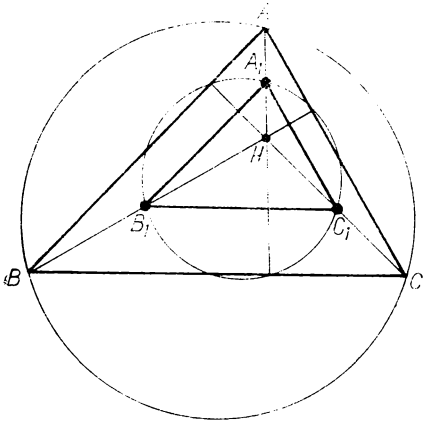


Fig. CE 41

Să notăm cu C_0 aria cercului circumscris triunghiului ABC. După cum se știe cercul lui Euler al triunghiului ABC este omoteticul cercului circumscris triunghiului, prin omotetia de centru H și raport 1/2. Atunci avem $C_1 = (1/4)\, C_0$. Triunghiul înscris în cercul lui Euler al triunghiului ABC și având laturile paralele cu ale triunghiului ABC, este tocmai $A_1B_1C_1$, unde A_1, B_1, C_1 au fost construite ca mai sus. Acest triunghi $A_1B_1C_1$ este omoteticul triunghiului ABC prin aceeași omotetie de centru H și raport 1/2. În mod analog cercul lui Euler al triunghiului $A_1B_1C_1$ este omoteticul cercului $(A_1B_1C_1)$, iar triunghiul $A_2B_2C_2$ este omoteticul triunghiului $A_1B_1C_1$ prin aceeași omotetie etc. Rezultă că vom avea egalitățile

$$C_2 = \frac{1}{4} C_1 = \frac{1}{4^2} C_0; \quad C_3 = \frac{1}{4} C_2 = \frac{1}{4^3} C_0; \ \ldots\ ; C_k = \frac{1}{4^k} C_0. \text{ Atunci } \sum_{i=1}^{k} C_i =$$

$$= C_0 \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{4^i} = \frac{1}{3} C_0 \left(1 - \frac{1}{4^k}\right) \text{ deci } \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} C_i = \frac{1}{3} C_0.$$

Notînd cu R_0 raza cercului circumscris triunghiului ABC, cu a lungimea laturii $|BC|$ și cu A măsura unghiului $\hat{A}$ avem $R_0 = \dfrac{a}{2 \sin A}$, deci $C_0 =$

$= \pi R_0^2 = \dfrac{\pi a^2}{4 \sin^2 A}$. Rezultă $\lim\limits_{k\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{k} C_i = \dfrac{\pi a^2}{12 \sin^2 A}$.

b) În baza considerentelor de la *a*) avem

$$P_1 = \frac{1}{2} P; \quad P_2 = \frac{1}{2} P_1 = \frac{1}{2^2} P; \ \ldots\ ; \quad P_k = \frac{1}{2^k} P. \text{ Atunci}$$

$$\sum_{i=1}^{k} P_i = P \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2^i} = P\left(1 - \frac{1}{2^k}\right) \text{ deci } \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} P_i = P.$$

CE 42. *Se consideră o funcție bijectivă și continuă* $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *și funcția* $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, *care satisface relația*

$$f(x) + g(x) = 2, (\forall) x \in \mathbf{R}.$$

Să se arate că există un singur punct $x_0 \in \mathbf{R}$ *pentru care* $f^n(x) + g^n(x) = 2$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant 2$.

Gh. Fătu, G. M. 7/1977

Soluție. Deoarece $g(x) = 2 - f(x)$ rezultă ușor că funcția g este de asemenea continuă și bijectivă. Datorită surjectivității lui f există $x_0 \in \mathbf{R}$ astfel încît $f(x_0) = 1$. Rezultă $g(x_0) = 1$ și atunci $f^n(x_0) + g^n(x_0) = 1 + 1 = 2$, $(\forall) n \in \mathbf{N}$.

Să arătăm acum că punctul x_0 este unic determinat. Fie pentru aceasta $x_1 \in \mathbf{R}$ astfel încît $f^n(x_1) + g^n(x_1) = 2$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}$. Dacă $f(x_1) \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ luînd $n = 2k$ și trecînd la limită după $k \to \infty$, obținem $\infty = 2$; prin urmare nu putem avea $f(x_1) \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$. Dacă $f(x_1) \in (-1, 1)$, trecînd la limită după $n \to \infty$ obținem $[g(x_1)]^\infty = 2$, ceea ce iarăși este imposibil; deci nu putem avea $f(x_1) \in (-1, 1)$. Dacă $f(x_1) = -1$ rezultă $g(x_1) = 3$ și făcînd $n = 2k$ și $k \to \infty$ obținem $\infty = 2$; deci nu putem avea nici $f(x_1) = -1$. Rezultă că singura posibilitate este $f(x_1) = 1$ și deci $g(x_1) = 1$. Dar atunci $(x_1) = f(x_0)$ și cum f este injectivă rezultă $x_1 = x_0$, ceea ce încheie demonstrația unicității punctului x_0.

CE 43. *Să se determine* $n \in \mathbf{N}$ *astfel ca*

$$\int_0^1 \frac{(1+x)^n + (1-x)^n}{1+x^2}\, dx \in \mathbf{Q}.$$

Marcel Chiriță, G. M. 5/1976

Soluție. Fie $R(x) = ax + b$, restul împărțirii numărătorului la numitor și $C(x)$ cîtul, unde polinoamele le considerăm cu coeficienți complecși. Avem $(1+x)^n + (1-x)^n = (1+x^2)\,C(x) + ax + b$ $(a, b \in \mathbf{Q})$ și această egalitate are loc pentru orice $x \in \mathbf{C}$. Făcînd $x = i$ obținem

$$(1+i)^n + (1-i)^n = ai + b \text{ sau } \left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^n +$$

$$+\left[\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\right]^n = b + ai.$$

$$\text{sau } (\sqrt{2})^n\left(\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4} + \cos\frac{n\pi}{4} - i\sin\frac{n\pi}{4}\right) = b + ai.$$

Obținem $a = 0$, $b = 2(\sqrt{2})^n \cos\dfrac{n\pi}{4}$. Atunci

$$\int_0^1 \frac{(1+x)^n + (1-x)^n}{1+x^2}\, dx = \int_0^1 C(x)\, dx + b\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^1 C(x)\, dx + \frac{b\pi}{4}.$$

Polinomul $C(x)$ are coeficienți raționali deci $\int_0^1 C(x)\,dx \in \mathbf{Q}$. Atunci condiția ca integrala din enunț să fie număr rațional este echivalentă cu

$$b\pi \in \mathbf{Q} \quad \text{sau} \quad 2(\sqrt{2})^n \pi \cos\frac{n\pi}{4} \in \mathbf{Q}. \tag{1}$$

Cum $\cos\frac{n\pi}{4} \in \left\{-1, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right\}$, rezultă că este un număr algebric și cum și $2(\sqrt{2})^n$ este algebric rezultă că și $2(\sqrt{2})^n \cos n\pi/4$ este algebric. Atunci din (1) deducem $\cos n\pi/4 = 0$ (în caz contrar, ar rezulta că π este algebric) deci $n = 4k + 2$, $k \in \mathbf{N}$.

CE 44. *Să se studieze natura seriei*

$$\sum_{n\geqslant 0} \operatorname{arctg}\frac{2}{2n^2 + 6n + 3}.$$

Petre Lupițu, G. M. 7/1982

Soluție. Se arată ușor că pentru orice $k \in \mathbf{N}^*$ avem egalitatea

$$\operatorname{arctg}\frac{2}{2k^2 + 6k + 3} + \operatorname{arctg}\frac{k}{k+1} = \operatorname{arctg}\frac{k+2}{k+3},$$

sau

$$\operatorname{arctg}\frac{2}{2k^2 + 6k + 3} = \operatorname{arctg}\frac{k+2}{k+6} - \operatorname{arctg}\frac{k}{k+1}. \tag{1}$$

Făcînd în (1) $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ și adunînd egalitățile obținute avem

$$\sum_{k=0}^{n} \operatorname{arctg}\frac{2}{2k^2 + 6k + 3} = \operatorname{arctg}\frac{n+1}{n+2} + \operatorname{arctg}\frac{n+2}{n+3} - \operatorname{arctg}\frac{1}{2}.$$

Trecînd la limită obținem

$$\sum_{n\geqslant 0} \operatorname{arctg}\frac{2}{2n^2 + 6n + 3} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{1}{2}$$ deci seria dată este convergentă.

CE 45. *Să se afle limita șirului*

$$\sqrt[n+1]{(n+1)!} - \sqrt[n]{n!}.$$

Traian Lalescu G. M. vol. VI, 1901

Soluție.[1] Notăm $L_n = \sqrt[n+1]{(n+1)!} - \sqrt[n]{n!}$.

[1] Soluția este a lui Marcel Țena.

Se știe că dacă $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este un șir de numere pozitive și $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l$, atunci există și $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$ și avem $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=l$.

Luînd $a_n=\frac{n^{n-1}}{(n-1)!}$ avem $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)^n}{n!}\,\frac{(n-1)!}{n^{n-1}}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\to e$, deci $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^{n-1}}{(n-1)!}}=e$; înlocuind pe n cu $n+1$ se obține aceeași limită, prin urmare

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n+1]{\frac{(n+1)^n}{n!}}=e. \tag{1}$$

Luînd acum $a_n=\frac{n^n}{n!}$ avem $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{n^n}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\to e$, deci:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}=e. \tag{2}$$

Pe baza lui (1) calculăm următoarele două limite

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n(n+1)]{\frac{[(n+1)!]^n}{(n!)^{n+1}}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sqrt[n+1]{\frac{(n+1)^n}{n!}}}=e^0=1; \tag{3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}}\right]^n=\lim_{n\to\infty}\left[\sqrt[n(n+1)]{\frac{[(n+1)!]^n}{(n!)^{n+1}}}\right]^n=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n+1]{\frac{(n+1)^n}{n!}}=e. \tag{4}$$

Conform cu (3), în (4) „prin înlocuire directă" se obține nedeterminarea 1^∞.

Pentru calculul limitei, dată de relația (4), putem scrie

$$\left[\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}}\right]^n=\left[\left(1+\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}-\sqrt[n]{n!}}{\sqrt[n]{n!}}\right)^{\frac{\sqrt[n]{n!}}{\sqrt[n+1]{(n+1)!}-\sqrt[n]{n!}}}\right]^{\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}\cdot L_n} \tag{5}$$

Deoarece șirul din membrul stîng este convergent, iar paranteza mare din membrul drept, precum și șirul $\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$ sînt de asemenea convergente, rezultă că și L_n este un șir convergent (aceasta, deoarece L_n se poate exprima cu ajutorul șirurilor de mai înainte).

Fie $L = \lim\limits_{n\to\infty} L_n$. Trecînd la limită în (5) și ținînd seama de (4) și (2) obținem $e = e^{eL}$, de unde $eL = 1$, adică $L = 1/e$.

CE 46. *Să se calculeze suma seriei*

$$1 + \frac{1}{2\cdot 3} - \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 8} - \frac{1}{8\cdot 13} + \cdots$$

unde cei doi factori ai unui numitor reprezintă sumele factorilor de la cei doi numitori anteriori.

V. Vâlcovici, G. M. vol. XII

Soluție. Seria se poate scrie sub forma:

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{a_n b_n}, \text{ unde } a_0 = 2,\ b_0 = 3, \tag{1}$$

$a_1 = 3,\ b_1 = 5$ și $a_n = a_{n-2} + b_{n-2},\ b_n = a_{n-1} + b_{n-1},\quad (\forall)\ n \geqslant 2.$

Din aceste relații de recurență rezultă ușor

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad \text{și} \quad b_n = a_{n+1},\quad (\forall)\ n \in \mathbf{N}. \tag{2}$$

Prin inducție se arată imediat că $a_n > n$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}$ și atunci termenul general al seriei va fi, în modul,

$$\left|(-1)_u \frac{1}{a_n b_n}\right| = \frac{1}{a_n b_n} = \frac{1}{a_n a_{n+1}} < \frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n^2},$$

ceea ce arată că seria este absolut convergentă.

Arătăm prin inducție egalitatea

$$a_n a_{n+2} - a_{n+1}^2 = (-1)^n,\quad (\forall) n \in \mathbf{N}. \tag{3}$$

Pentru $n = 0$, $n = 1$ se verifică ușor. Dacă presupunem egalitatea (3) valabilă pînă la n, avem după aceea

$$a_{n+1}a_{n+3} - a_{n+2}^2 = (a_{n+1} + a_n)(a_{n+1} + a_{n+2}) - (a_n + a_{n+1})^2 =$$

$$= a_{n-1}a_{n+1} - a_n^2 + a_n a_{n+2} - a_{n+1}^2 + a_n a_{n+1} + a_{n-1}a_{n+2} - 2a_n a_{n+1} =$$

$$= (-1)^{n-1} + (-1)^n + a_{n-1}a_{n+2} - a_n a_{n+1} = a_{n-1}(a_n + a_{n+1}) - a_n a_{n+1} =$$

$$= a_n a_{n-1} + a_{n-1}a_{n+1} - a_n(a_n + a_{n-1}) = a_{n-1}a_{n+1} - a_n^2 = (-1)^{n-1} = (-1)^{n+1},$$

adică afirmația este adevărată și pentru $n+1$.

Folosind (3), putem scrie termenul general astfel:

$$(-1)^k \cdot \frac{1}{a_k b_k} = \frac{a_k a_{k+2} - a_{k+1}^2}{a_k a_{k+1}} = \frac{a_{k+2}}{a_{k+1}} - \frac{a_{k+1}}{a_n}. \tag{4}$$

Facem în (4), $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ și obținem

$$\frac{1}{a_0 b_0} = \frac{a_2}{a_1} - \frac{a_1}{a_0},$$

$$-\frac{1}{a_1 b_1} = \frac{a_3}{a_2} - \frac{a_2}{a_1},$$

$$\frac{1}{a_2 b_2} = \frac{a_4}{a_3} - \frac{a_3}{a_2},$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$(-1)^n \cdot \frac{1}{a_n b_n} = \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} - \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Adunînd aceste egalități obținem suma parțială a seriei $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{a_n b_n}$

$$S_n = \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} - \frac{3}{2}.$$

Cum S_n este un șir convergent, rezultă că și $\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}$ este un șir convergent. Folosind (2) avem

$$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \frac{a_{n+1} + a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{1}{\frac{a_{n+1}}{a_n}}.$$

Dacă notăm $l = \lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}$, trecînd la limită în egalitatea precedentă obținem

$$l = 1 + \frac{1}{l} \quad \text{de unde} \quad l = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}.$$

În final, ținînd seama de (1) rezultă că suma seriei inițiale este

$$1 + \lim_{n \to \infty} S_n = 1 + \frac{\sqrt{5} + 1}{2} - \frac{3}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

CE 47. *Să se calculeze*

$$L = \lim_{x \to 2} \frac{\sqrt[3]{x^3 - 5x + 3} - \sqrt{x^2 + 3x - 9}}{x^2 + x - 6}.$$

Ilie Constantinescu, G. M. 12/1964

Soluție. Avem

$$\frac{\sqrt[3]{x^3-5x+3}-\sqrt{x^2+3x-9}}{(x-2)(x+3)}=\frac{1}{x+3}\left(\frac{\sqrt[3]{x^3-5x+3}-1}{x-2}-\right.$$

$$\left.-\frac{\sqrt{x^2+3x-9}-1}{x-2}\right).$$

Să calculăm pe rînd limitele termenilor.

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{x^2-5x+3}-1}{x-2}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+2}{(x-2)\left[\sqrt[3]{(x^3-5x+3)^2}+\sqrt[3]{x^3-5x+3}+1\right]}=$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x-1)}{x-2}=\frac{7}{3}\cdot$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+3x-9}-1}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+3x-10}{(x-2)(\sqrt{x^2+3x-9}+1)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+5)}{(x-2)(\sqrt{x^2+3x-9}+1)}=\frac{7}{2}\cdot$$

Deci $\quad L=\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{7}{3}-\frac{7}{2}\right)=-\frac{7}{30}\cdot$

CE 48. *Să se demonstreze că în șirul lui Lame*

$$\frac{1}{1},\ \frac{2}{1},\ \frac{3}{2},\ \frac{5}{3},\ \frac{8}{5},\ \frac{13}{8},\ \frac{21}{13},\ldots$$

(a cărui lege de formare este evidentă) inversul unui termen mărit cu **2** *este egal cu produsul celor doi termeni următori.*

I. Ionescu, G. M. vol. **XV**

Soluție. Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ acest șir, $x_n=\frac{a_n}{b_n}\cdot$

Legea de formare a șirului constă în relațiile:

$$\begin{cases} a_n=a_{n-1}+b_{n-1}, & n\geq 2 \\ b_n=a_{n-1} \end{cases} \tag{1}$$

și

$$a_1=b_1=1.$$

Din (1) rezultă $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, $(\forall)\ n \geqslant 3$ și $a_1 = 1$, $a_2 = 2$. Ecuația caracteristică asociată șirului $(a_n)_{n\geqslant 1}$ este $t^2 = t + 1$, care dă ca rădăcini numerele $\alpha = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ și $\beta = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Atunci,

$$a_n = A\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + B\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n,\ (\forall)\ n \geqslant 1.$$

Făcînd $n = 1$ și $n = 2$, ținînd seama că $a_1 = 1$ și $a_2 = 2$, se obține un sistem în A și B, de unde deducem

$$A = -\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}},\quad B = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}.$$

Prin urmare

$$a_n = -\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right] = \frac{1}{\sqrt{5}}(\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}).$$

Rezultă

$$x_n = \frac{a_n}{b_n} = \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}}{\beta^n - \alpha^n},\ (\forall)\ n \geqslant 1.$$

Ținînd seama că $\alpha^2 = \alpha + 1$ și $\beta^2 = \beta + 1$, vom putea scrie

$$x_{n+1} \cdot x_{n+2} = \frac{\beta^{n+2} - \alpha^{n+2}}{\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}} \cdot \frac{\beta^{n+3} - \alpha^{n+3}}{\beta^{n+2} - \alpha^{n+2}} = \frac{\beta^{n+3} - \alpha^{n+1}}{\beta^{n+1} - \alpha^{n+3}} =$$

$$= \frac{\beta^2 \cdot \beta^{n+1} - \alpha^2 \cdot \alpha^{n+1}}{\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}} = \frac{(\beta+1)\beta^{n+1} - (\alpha+1)\alpha^{n+1}}{\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}} =$$

$$= 1 + \frac{\beta^{n+2} - \alpha^{n+2}}{\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}} = 1 + \frac{\beta^2 \cdot \beta^n - \alpha^2 \cdot \alpha^n}{\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}} =$$

$$= 1 + \frac{(\beta+1)\beta^n - (\alpha+1)\alpha^n}{\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}} = 2 + \frac{\beta^n - \alpha^n}{\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}} = 2 + \frac{1}{x_n}.$$

Așadar $x_{n+1} \cdot x_{n+2} = 2 + \dfrac{1}{x_n}$, ceea ce era de demonstrat.

CE 49. *Se dau ecuațiile de gradul al doilea în* y:

$$y^2 + yf(x) + f'(x) = 0, \tag{1}$$

$$y^2 + y\varphi(x) + \varphi'(x) = 0. \tag{2}$$

1° *Să se determine funcțiile* $f(x)$ *și* $\varphi(x)$ *astfel încît rădăcinile ecuației* (2) *să fie inversele rădăcinilor ecuației* (1).

2° *Între funcțiile* $f(x)$ *și* $\varphi(x)$ *astfel determinate există relația* $f(x) - \varphi(x) = cf(x) \cdot \varphi(x)$, *c fiind o constantă.*

Cerchez Mihu, G. M. vol. XLV

Soluție. 1° Ecuația care admite rădăcinile inverse ecuației

$$y^2 + y\varphi(x) + \varphi'(x) = 0 \quad \text{este} \quad y^2\varphi'(x) + y\varphi(x) + 1 = 0.$$

Deoarece ecuațiile

$$y^2 + yf(x) + f'(x) = 0, \quad y^2\varphi'(x) + y\varphi(x) + 1 = 0$$

trebuie să aibă aceleași rădăcini, coeficienții lor trebuie să fie proporționali:

$$\frac{\varphi'(x)}{1} = \frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{1}{f'(x)}. \tag{1}$$

Eliminînd pe $f(x)$ și $f'(x)$ găsim ecuația diferențială $\varphi'^2 - \varphi\varphi'' - \varphi' = 0$. Se face substituția $\varphi' = g$ de unde rezultă

$$\varphi'' = \frac{dg}{dx} = \frac{dg}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dx} = g\frac{dg}{d\varphi}.$$

Se obține ecuația

$$g^2 - g\varphi\frac{dg}{d\varphi} - g = 0 \quad (g \neq 0).$$

Se integrează și se obține

$$\frac{d\varphi}{\varphi} = \frac{dg}{g-1}, \quad \text{de unde} \quad \ln|\varphi| = \ln|g-1| + \ln A \text{ și de aici } \varphi = A(1-g)$$

$$(A = \text{constant}). \tag{2}$$

Din (1) rezultă atunci

$$f = \frac{\varphi}{\varphi'} = \frac{A(1-g)}{g} = A\left(\frac{1}{g} - 1\right). \tag{3}$$

Prin substituția $g = \varphi'$ se obține $g = -Ag'$ sau $\frac{g'}{g} = -\frac{1}{A}$ de unde $g =$

$$= Be^{-\frac{x}{A}} \quad (B = \text{constant}).$$

Deci

$$\varphi(x) = A\left(1 - Be^{-\frac{x}{A}}\right), \quad f(x) = A\,\frac{\left(1 - Be^{-\frac{x}{A}}\right)}{Be^{-\frac{x}{A}}}.$$

2° Avem, folosind (2) și (3), $f - \varphi = A(1-g)\left(\frac{1}{g} - 1\right)$ și $f \cdot \varphi = A^2(1-g)\left(\frac{1}{g} - 1\right)$,

sau $f - \varphi = Afg$, ceea ce trebuia demonstrat.

CE 50. *Să se determine condiția necesară și suficientă ca funcția* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ $f(x) = |P_n(x)|$, *unde* $P_n(x)$ *este un polinom de gradul* n *cu coeficienți reali, să fie derivabilă.*

L. Panaitopol, G. M. A 4/1970

Soluție. Dacă P_n nu are rădăcini reale, atunci avem

$$|P_n(x)| = P_n(x), \ (\forall)x \in \mathbf{R} \quad \text{sau} \quad |P_n(x)| = -P_n(x), \ (\forall)x \in \mathbf{R},$$

deci f este o funcție derivabilă.

Să presupunem că P_n are rădăcini reale. Pe intervalele deschise dintre două rădăcini reale consective sau pe intervalele deschise din afara rădăcinilor, funcția polinomială P_n menține semn constant, deci funcția f va fi derivabilă. Rămîne să studiem derivabilitatea în punctele care sînt rădăcini reale. Fie x_0 o rădăcină reală a polinomului P_n și fie k ordinul de multiplicitate al acestei rădăcini. Atunci putem scrie $P_n(x) = (x - x_0)^k \cdot Q_{n-k}(x)$, unde Q_{n-k} este un polinom cu coeficienți reali de gradul $n - k$, ce nu admite rădăcina x_0. Avem

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{|P_n(x)| - |P_n(x_0)|}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{|P_n(x)|}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{|x - x_0|^k \cdot |Q_{n-k}(x)|}{x - x_0}.$$

Această limită există și este finită, dacă și numai dacă $k \geqslant 2$. Din cele de mai sus rezultă că condiția necesară și suficientă căutată este ca polinomul P să nu admită rădăcini reale simple.

CE 51. *Să se determine funcția* $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ *știind că satisface relația* $f(x) + f(\omega x) = x$, *unde* ω *este una din rădăcinile cubice nereale ale unității.*

Liviu Pîrșan, G. M. A 10/1971

Soluție. Înlocuind x cu ωx și apoi cu $\omega^2 x$ în relația din enunț, obținem respectiv:

$$f(\omega x) + f(\omega^2 x) = \omega x,$$
$$f(\omega^2 x) + f(x) = \omega^2 x.$$

Adăugînd și relația inițială $f(x) + f(\omega x) = x$ se obține un sistem cu necunoscutele $f(x)$, $f(\omega x)$, $f(\omega^2 x)$. Rezultă

$$f(x) = \frac{(1 - \omega + \omega^2)x}{2} = -\omega x.$$

CE 52. *Fie p_1 și p_2 două polinoame cu coeficienți reali de grad mai mic sau egal cu doi. Se consideră funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dată de relația $f(x) = \max\{p_1(x), p_2(x)\}$. Să se arate că dacă f este derivabilă, atunci este satisfăcută numai una din inegalitățile*

$$p_1(x) \leqslant p_2(x), \quad (\forall) x \in \mathbf{R}$$

sau

$$p_2(x) \leqslant p_1(x).$$

N. Boboc, G. M. A 10/1972

Soluție. Fie funcția $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(x) = p_2(x) - p_1(x)$. Vom arăta că dacă f este derivabilă, atunci g nu își schimbă semnul. Avem

$$f(x) = \max\{p_1(x), p_2(x)\} = \frac{|p_2(x) - p_1(x)| + p_1(x) + p_2(x)}{2} =$$

$$= \frac{|g(x)| + p_1(x) + p_2(x)}{2}.$$

Deoarece f, p_1, p_2 sînt funcții derivabile, rezultă că $|g|$ va fi o funcție derivabilă. Funcția polinomială g este de grad cel mult 2.

a) Dacă: grad g este 0 sau $-\infty$, atunci g este o funcție constantă, deci nu își schimbă semnul.

b) Dacă: grad $g = 1$, atunci g este o funcție de gradul 1 și are o rădăcină reală α. Se arată ușor că funcția $|g|$ nu este derivabilă în punctul α, deci acest caz este exclus.

c) Dacă: grad $g = 2$, atunci g este o funcție de gradul 2. Se arată ușor că funcția $|g|$ este derivabilă pe $\mathbf{R}$, numai dacă discriminantul este negativ sau nul (în cazul în care discriminantul este pozitiv, funcția $|g|$ nu este derivabilă în punctele care constituie rădăcinile reale distincte ale funcției g). Dar în aceste cazuri rezultă că g nu își schimbă semnul și soluția este încheiată.

CE 53. *Fie $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ o funcție continuă pe intervalul $[a, b]$ și astfel încît $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \neq 0$. Să se arate că există un punct $\xi \in (a, b)$ astfel încît să avem*

$$\int_a^{\xi} f(t)\,dt = \frac{f(\xi)\,(\xi - a)\,(\xi - b)}{a + b - 2\xi}.$$

Ilie Iliescu, G. M. A, 4/1973

Soluție. Fie funcția $\varphi: [a, b] \to \mathbf{R}$, $\varphi(x) = (x - a)\,(x - b) \int_a^x f(t)dt$.

Această funcție este evident derivabilă pe $[a, b]$, iar $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. Conform teoremei lui Rolle rezultă că există $\xi \in (a, b)$ astfel încît $\varphi'(\xi) = 0$, ceea ce este echivalent cu

$$(2\xi - a - b)\int_a^{\xi} f(t)\,dt + (\xi - a)\,(\xi - b)\,f(\xi) = 0. \qquad (1)$$

În mod necesar avem $\xi \neq \frac{a+b}{2}$, deoarece dacă am presupune $\xi = \frac{a+b}{2}$, din (1) ar rezulta $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$, ceea ce contrazice ipoteza. Atunci împărțind în (1) prin $(2\xi - a - b)$ se obține egalitatea din enunțul problemei.

CE 54. *Se dă șirul* $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ *de numere reale despre care se presupune că pentru* $n > p$ *satisface relația* $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_{n-p}}{p}$ (p fixat)·
Să se arate că acest șir este convergent și că limita sa este numărul

$$a = \frac{a_1 + 2a_2 + \ldots + pa_p}{1 + 2 + \ldots + p}.$$

N. Boboc, G. M. A, 1/1973

Soluție. Să arătăm mai întîi că șirul este mărginit. Într-adevăr, pentru $n \leqslant p$ avem

$$\min_{1 \leqslant i \leqslant p} a_i \leqslant a_n \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant p} a_i.$$

Presupunînd acum că această inegalitate este adevărată pentru toate numerele naturale mai mici sau egale decît un număr natural k, vom arăta că este valabilă și pentru $k + 1$. Într-adevăr

$$\min_{1 \leqslant i \leqslant p} a_i \leqslant \min_{0 \leqslant t \leqslant p-1} a_{k-t} \leqslant a_{k+1} = \frac{a_k + a_{k-1} + \ldots + a_{k-p+1}}{p} \leqslant \max_{0 \leqslant t \leqslant p-1} a_{k-t} \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant p} a_i$$

și astfel demonstrația prin inducție este încheiată.
Fie acum $l = \lim\limits_{n \to \infty} \inf a_n$, $L = \lim\limits_{n \to \infty} \sup a_n$.
Pentru a arăta că șirul este convergent, vom arăta că $l = L$. Să presupunem prin absurd că $l \neq L$, deci, de fapt $l < L$. Conform unei proprietăți cunoscute, există două subșiruri $(a_{n_k})_{k \in \mathbf{N}}$, $(a_{m_t})_{t \in \mathbf{N}}$ ale lui $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$, astfel încît $\lim\limits_{t \to \infty} a_{m_t} = l$, $\lim\limits_{k \to \infty} a_{n_k} = L$. Mai întîi, putem presupune că șirul $(a_{n_k})_{k \in \mathbf{N}}$ conține orice termen $a_n \geqslant L$ al șirului inițial; de asemenea șirul $(a_{m_t})_{t \in \mathbf{N}}$ poate fi ales încît $m_{t+1} - m_t \leqslant p$. Într-adevăr

$$a_{m_t} = \frac{a_{m_t-1} + a_{m_t-2} + \ldots + a_{m_t-p}}{p},$$

deci există $1 \leqslant j \leqslant p$ astfel încît $a_{m_t-j} < a_{m_t}$.
Atunci, dacă am avea $m_t - m_{t-1} > p$, putem intercala în șir pe a_{m_t-j}; dacă $(m_t - j) - m_{t-1} > p$ din nou continuăm cu același procedeu. În felul acesta

se obține un șir $(a_{m_t})_{t\in\mathbf{N}}$ cu proprietatea cerută. Fie acum $n_0 \in \mathbf{N}$ cu proprietatea că dacă $n_k > n_0$ atunci

$$|a_{n_k} - L| < \frac{L-l}{2p},$$

iar dacă $m_t \geqslant n_0$, atunci $|a_{m_t} - l| < \frac{L-l}{2p}$.

Fie de asemenea $k_0 \in \mathbf{N}$ astfel încît $n_{k_0} \geqslant n_0 + p$.
Atunci, în particular, vom avea

$$a_{n_{k_0}} > L - \frac{L-l}{p}. \tag{1}$$

Pe de altă parte

$$a_{n_{k_0}} = \frac{a_{n_{k_0}-1} + a_{n_{k_0}-2} + \ldots + a_{n_{k_0}-p}}{p}$$

și, conform proprietății șirului $(a_{m_t})_{t\in\mathbf{N}}$, există $t_0 \in \mathbf{N}$ și $1 \leqslant j \leqslant p$ astfel încît $a_{m_{t_0}} = a_{n_{k_0}-j}$ și cum $m_{t_0} \geqslant n_0$ rezultă

$$a_{m_{t_0}} < l + \frac{L-l}{2p}.$$

Deoarece $a_{k_0} - p \geqslant n_0$, conform proprietății șirului $(a_{n_k})_{k\in\mathbf{N}}$ rezultă că ceilalți termeni care apar la numărător sînt mai mici ca $L + \frac{L-l}{2p}$. Putem atunci scrie

$$a_{n_{k_0}} < \frac{1}{p}\left(l + \frac{L-l}{2p}\right) + \frac{p-1}{p}\left(L + \frac{L-l}{2p}\right) = L - \frac{L-l}{2p}. \tag{2}$$

Se vede că (1) și (2) sînt contradictorii. Cu aceasta convergența șirului este demonstrată. Pentru a stabili valoarea limitei, observăm că pentru orice $k \in \mathbf{N}$, avem egalitatea

$$a_k + 2a_{k+1} + \ldots + pa_{k+p-1} = a_1 + 2a_2 + \ldots + pa_p, \tag{3}$$

ceea ce se arată ușor prin inducție după k.
Trecînd la limită după $k \to \infty$ în (3), găsim (ținînd seama că $\lim\limits_{k\to\infty} a_{k+1} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ pentru $i = 0, 1, \ldots, p-1$).

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{a_1 + 2a_2 + \ldots + pa_p}{1 + 2 + \ldots + p}$$

ceea ce trebuia demonstrat.

CE 55. *Fie $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcție cu proprietatea lui Darboux astfel încît $f^{-1}(x)$ este o mulțime închisă oricare ar fi $x \in \mathbf{R}$. Atunci f este continuă.*

Alexandru Dimca, G. M. A 6/1974

Soluție. Să presupunem prin absurd că există $x_0 \in \mathbf{R}$ în care f este discontinuă, adică $f(x_0)$ nu este limita funcției în punctul x_0. Atunci $(\exists)\varepsilon > 0$ astfel încît $(\forall)n \geqslant 1$,

$$(\exists)\ x_n \in \mathbf{R} \text{ cu } |x_n - x_0| < \frac{1}{n} \quad \text{și} \quad |f(x_n) - f(x_0)| \geqslant 2\varepsilon.$$

Din (1) deducem că există un subșir al șirului $(x_n)_{n\geqslant 1}$, fie acesta $(x_{n_k})_{k\in\mathbf{N}}$ avînd proprietatea $f(x_{n_k}) \geqslant f(x_0) + 2\varepsilon$, $(\forall)\ k \in \mathbf{N}^*$ sau $f(x_{n_k}) \leqslant f(x_0) - 2\varepsilon$, $(\forall)\ k \in \mathbf{N}^*$. Presupunem, de exemplu, îndeplinită prima condiție. Atunci pentru orice $k \in \mathbf{N}^*$ avem $f(x_{n_k}) \geqslant f(x_0) + \varepsilon > f(x_0)$ și cum f are proprietatea lui Darboux $(\exists)y_{n_k}$ cuprins între x_{n_k} și x_0 astfel încît $f(y_{n_k}) = f(x_0) + \varepsilon$, $(\forall)\ k \in \mathbf{N}^*$. Aceasta înseamnă că $y_{n_k} \in f^{-1}(f(x_0) + \varepsilon)$. Cum $|y_{n_k} - x_0| \leqslant |x_{n_k} - x_0| \to 0$ rezultă că $y_{n_k} \to x_0$. Dar din ipoteză mulțimea $f^{-1}(f(x_0)+\varepsilon)$ este închisă și deci conține limita oricărui șir din această mulțime; rezultă că $x_0 \in f^{-1}(f(x_0) + \varepsilon)$ deci $f(x_0) = f(x_0) + \varepsilon$, contradicție.

Observație. Se poate stabili ușor și reciproca afirmației din enunț. În adevăr, fie f continuă și $x_0 \in \mathbf{R}$. Să notăm $A = f^{-1}(x_0)$ și să arătăm că A este mulțime închisă. Pentru aceasta arătăm că $(\forall)\ (y_n)_{n\in\mathbf{N}^*} \subset A$ cu $y_n \to y_0$, atunci $y_0 \in A$. În adevăr $f(y_n) = x_0$, deci $f(y_n) \to x_0$; pe de altă parte $f(y_n) \to f(y_0)$ și atunci rezultă $f(y_0) = x_0$, adică $y_0 \in A$. Evident dacă f este continuă are și proprietatea lui Darboux.

CE 56. a) *Dacă f este o funcție reală definită pe un interval, continuă și dacă satisface egalitatea*

$$f(x) - f(y) = (y - x) f(x) f(y) \tag{1}$$

atunci ea este indefinit derivabilă. În plus

$$f^{(n)} = (-1)^n\, n!\, f^{n+1}.$$

b) *Să se calculeze derivata de ordinul n a funcției f definită prin*

$$f(x) = \frac{1}{a + x}.$$

c) *Să se găsească funcțiile reale de o variabilă reală care satisfac egalitatea* (1).

Aristide Leonte, G. M. 8/1975

Soluție. a) Demonstrăm prin inducție că $(\forall)\ n \in \mathbf{N}$ funcția este derivabilă de n ori și avem: $f^{(n)} = (-1)^n\, n!\, f^{n+1}$. Pentru $n = 1$, fie x_0 un punct fixat din domeniul de definiție. Făcînd în (1) $y = x_0$ obținem, pentru $x \neq x_0$:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -f(x) f(x_0).$$

Trecînd la limită după $x \to x_0$, folosind continuitatea lui f în x_0, deducem că $f'(x_0)$ există și avem $f'(x_0) = -f^2(x_0)$. Cum x_0 a fost arbitrar, rezultă că f este derivabilă și că $f'(x) = -f^2(x)$, deci afirmația pentru $n = 1$ este dovedită. Presupunem că afirmația este adevărată pentru n și să o dovedim pentru $n + 1$. Deci știm că funcția f este derivabilă de n ori și avem $f^{(n)} = (-1)^n n! f^{n+1}$. Cum membrul drept al acestei egalități este o funcție derivabilă, înseamnă că și $f^{(n)}$ este derivabilă, adică f este derivabilă de $n + 1$ ori. Derivînd obținem $[f^{(n)}]' = (-1)^n n! (n + 1) f^n f'$, adică

$$f^{(n+1)} = (-1)^n (n + 1)! f^n(-f^2) = (-1)^{n+1}(n + 1)! f^{n+2},$$

deci afirmația este dovedită și pentru $n + 1$.

b) Prin inducție se arată că $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n n!}{(a + x)^{n+1}}$, ceea ce arată că această funcție verifică relația de la punctul *a*).

c) Fie f o funcție ce satisface (1). Avem $f' = -f^2$ sau $-\mathrm{d}f/f^2 = \mathrm{d}x$ și integrînd această ecuație diferențială obținem $1/f = x + a$ $(a \in \mathbf{R})$, de unde $f(x) = \dfrac{1}{x + a}$ $(a \in \mathbf{R})$. Deci singurele funcții ce satisfac (1) sînt cele de a punctul b).

CE 57. *Să se arate că o condiție necesară și suficientă pentru ca graficul unei funcții polinomiale a unui polinom cu coeficienți reali $P(x)$ să admită ca axă de simetrie dreapta $x = a$ este ca să existe un alt polinom cu coeficienți reali $Q(x)$ astfel încît:*

$$P(x) = Q[(x - a)^2], \quad (\forall)\ x \in \mathbf{R}.$$

Marcel Țena, G. M. 8/1976

Soluție. Condiția necesară și suficientă ca $P(x)$ să aibă proprietatea că graficul funcției $P(x)$ să fie simetric față de dreapta $x = a$ este ca $P(a - t) = P(a + t)$, $(\forall)\ t \in \mathbf{R}$. Facem schimbarea de variabilă $y = x - a$ și notăm $P(x) = P(a + y) = Q_1(y)$. Pentru $x = a - t$ obținem $y = -t$, iar pentru $x = a + t$ obținem $y = t$. Condiția de mai sus este deci mai departe echivalentă cu

$$Q_1(-t) = Q_1(t), \ (\forall)\ t \in \mathbf{R}.$$

Dacă $Q_1(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n$, din relația de mai sus obținem $a_1 = a_3 = a_5 = \ldots = 0$ și astfel $Q_1(t) = a_0 + a_2 t^2 + \ldots + a_{2p} t^{2p}$, unde $2p$ este cel mai mare număr par $\leqslant n$. Rezultă $Q_1(t) = Q(t^2)$, unde am notat $Q(x) = a_0 + a_2 x + \ldots + a_{2p} x^p$.

Avem în final: $P(x) = Q_1(y) = Q(y^2) = Q[(x - a)^2]$.

Observație. Dacă $P(x) = ax^2 + bx + c$, luînd $Q(x) = ax - \Delta/4a$ obținem $P(x) = Q[(x + b/2a)^2]$, ceea ce arată faptul cunoscut că graficul funcției de gradul al doilea are axa de simetrie $x = -b/2a$.

CE 58. *Să se arate că o condiție necesară și suficientă ca graficul unei funcții polinomiale a unui polinom cu coeficienți reali $P(x)$ să admită centrul de simetrie $C(a, b)$ este ca să existe un alt polinom cu coeficienți reali $Q(x)$ astfel încît*

$$P(x) = b + (x - a)\,Q[(x - a)^2],\ (\forall)\ x \in \mathbf{R}.$$

Marcel Țena, G. M. 9/1976

Soluție. Condiția necesară și suficientă ca $C(a, b)$ să fie centrul de simetrie al graficului lui $P(x)$ este ca acest punct $C(a, b)$ să fie mijlocul oricărui segment de capete $M(a - t,\ P(a - t))$ și $N(a + t,\ P(a + t))$, $t \in \mathbf{R}$. Adică

$$P(a - t) + P(a + t) = 2b,\ (\forall)\ t \in \mathbf{R}. \tag{1}$$

Facem schimbarea de variabilă $y = x - a$ și fie $P(x) = P(y + a) = Q_1(y)$. Dacă $x = a - t \Rightarrow y = -t$, iar dacă $x = a + t \Rightarrow y = t$. Atunci condiția (1) devine $Q_1(t) + Q_1(-t) = 2b$, $(\forall)\ t \in \mathbf{R}$. Dacă $Q_1(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n$, rezultă prin identificare $a_0 = b$, $a_2 = 0$, $a_4 = 0$, ... Astfel, $Q_1(t) = b + a_1 t + a_3 t^3 + \ldots + a_{2p+1} t^{2p+1}$, unde $2p + 1$ este cel mai mare număr impar $\leqslant n$. Așadar $Q_1(t) = b + tQ(t^2)$, unde $Q(t) = a_1 + a_3 t + \ldots + a_{2p+1} t^p$. Atunci $P(x) = Q_1(y) = b + yQ(y^2) = b + (x - a)\,Q[(x - a)^2]$.

CE 59. *Pentru orice $x \in \mathbf{R}$, fie $u_n(x) = \underbrace{\sin \sin \ldots \sin}_{n \text{ ori}}\, x$. Să se demonstreze că seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ are sumă pentru orice $x \in \mathbf{R}$ și să se determine suma sa.*

Stelian Găină, G. M. 11/1978

Soluție. Evident, pentru $x = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ avem $u_n(x) = 0$, $(\forall) n \in \mathbf{N}^*$, deci seria dată este convergentă și are suma egală cu 0. Fie $x \in \mathbf{R}$ astfel încît $u_1(x) = \sin x \neq 0$. Dacă $\sin x < 0$, atunci $u_n(x) < 0$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}^*$, deoarece funcția sinus este strict crescătoare pe intervalul $[-\pi/2, \pi/2]$ și $\sin x \in [-1, 0) \subset [-\pi/2, \pi/2]$. Rezultă că este suficient să considerăm cazul în care $\sin x > 0$. Atunci există $k \in \mathbf{N}^*$ astfel încît $\sin x \geqslant 1/k$. Vom demonstra prin inducție că $u_n(x) \geqslant 1/kn$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}^*$. Pentru $n = 1$ relația este adevărată datorită alegerii lui k. Presupunem că este adevărată pentru n. Deoarece $u_{n+1}(x) = \sin u_n(x)$ și $u_n(x) \in (0, 1]$, rezultă

$$u_{n+1}(x) = \sin u_n(x) \geqslant \sin 1/kn \geqslant (1/kn)/(1 + 1/kn) = \frac{1}{kn + 1} \geqslant \frac{1}{k(n + 1)},$$ unde

am ținut seama și de inegalitatea $\sin x \geqslant \dfrac{x}{1 + x}$, valabilă pentru orice $x \in [0, \pi/2]$. Astfel, suma parțială de ordinul n va fi

$$s_n(x) = \sum_{i=1}^{n} u_i(x) \geqslant \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \text{ și cum } \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = +\infty,$$

rezultă $\lim\limits_{n \to \infty} s_n(x) = +\infty$. Deci în acest caz seria este divergentă și are suma

$+\infty$. Deducem că în cazul sin $x < 0$ seria este divergentă și are suma $-\infty$. Prin urmare:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \begin{cases} -\infty & \text{dacă } \sin x < 0, \\ 0 & \text{dacă } \sin x = 0, \\ +\infty & \text{dacă } \sin x > 0. \end{cases}$$

CE 60. *Fie* $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ *o funcție de două ori derivabilă. Dacă pe graficul funcției există trei puncte coliniare, atunci* $(\exists)\ c \in (a, b)$ *astfel încît* $f''(c) = 0$.

Marcel Chiriță, G. M. 7/1978

Soluție. Fie $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$, $C(x_3, f(x_3))$ cele trei puncte coliniare de pe graficul funcției, unde $a < x_1 < x_2 < x_3 < b$. Scriind că punctul B este pe segmentul $|AC|$ avem

$$\begin{cases} x_2 = tx_1 + (1 - t)\, x_3 \\ f(x_2) = tf(x_1) + (1 - t) f(x_3), \end{cases} \quad \text{unde } t \in (0, 1). \tag{1}$$

Conform teoremei lui Lagrange aplicată funcției f pe intervalul $[x_1, x_2]$, $(\exists)\ \xi_1 \in (x_1, x_2)$ cu

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) f'(\xi_1). \tag{2}$$

Din (1) avem $f(x_1) = \frac{1}{t} f(x_2) + \frac{t-1}{t} f(x_3)$ și $x_1 = \frac{1}{t} x_2 + \frac{t-1}{t} x_3$, pe care înlocuindu-le în (2) vom obține după simplificări:

$$f(x_2) - f(x_3) = (x_2 - x_3) f'(\xi_1). \tag{3}$$

Teorema lui Lagrange aplicată funcției f pe intervalul $[x_2, x_3]$ asigură existența unui punct $\xi_2 \in (x_2, x_3)$ cu $f(x_2) - f(x_3) = (x_2 - x_3) f'(\xi_2)$, și introducînd în (3) obținem $f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$. În sfîrșit conform teoremei lui Rolle, $(\exists)\ c \in (\xi_1, \xi_2)$ cu $f''(c) = 0$.

CE 61. *Figura* $F(r)$ *este formată din punctele planului situate la o distanță mai mică decît numărul real strict pozitiv* r *sau egală cu* r, *față de un triunghi oarecare și are aria* $A(r)$. *Să se arate că* $\lim\limits_{r \to \infty} \dfrac{A(r)}{r^2} = \pi$.

Ioana Scare, G. M. 8/1979

Soluție. Vom concepe triunghiul ABC ca fiind linia poligonală respectivă (frontiera) reunită cu interiorul triunghiului (de altfel rezultatul ar rămîne valabil și dacă am înțelege în rolul triunghiului numai frontiera).

După cum ușor se constată, mulțimea respectivă este reuniunea următoarelor mulțimi

— triunghiul ABC (deoarece punctele acestuia au distanța nulă pînă la triunghiul ABC).

— dreptunghiurile (concepute ca linii poligonale reunite cu interioarele respective) BB_1C_1C, CC_2A_1A, AA_2B_2B, care au bazele de lungimi respectiv a, b, c și înălțimea de lungime r.

— sectoarele de cerc AA_1A_2, BB_1B_2, CC_1C_2, cu centrele în A, B, C, raza r, iar unghiurile la centru **de măsuri** respectiv $\pi - \mu(\widehat{A})$, $\pi - \mu(\widehat{B})$, $\pi - \mu(\widehat{C})$. Notînd cu S aria **triunghiului** ABC, vom putea scrie

$$A(r) = S + ar + br + cr + \frac{[\pi - \mu(\widehat{A})]r^2}{2} + \frac{[\pi - \mu(\widehat{B})]r^2}{2} +$$

$$+ \frac{[\pi - \mu(\widehat{C})]r^2}{2} = S + (a + b + c)r + \pi r^2, \text{ iar}$$

$$\lim_{r\to\infty} \frac{A(r)}{r^2} = \lim_{r\to\infty} \left[\frac{S}{r^2} + \frac{a+b+c}{r} + \pi\right] = \pi.$$

CE 62. *a) Fie* $P \in \mathbf{R}[X]$ *un* ***polinom de*** *gradul trei cu proprietatea că ecuația* $P(x) = 0$ *are toate rădăcinile* ***reale și distincte,*** *iar* $I \subset \mathbf{R}$ *un interval. Să se demonstreze că, dacă o* ***funcție neconstantă*** $f : I \to \mathbf{R}$ *are proprietatea că* $(P' \circ f)(x) = 0$, $(\forall)\ x \in I$, *atunci* f ***nu admite primitive*** *pe* I.

b) *Fie* $I \subset \mathbf{R}$ *un interval și* ***fie*** $a \in \mathbf{R}^*$. ***Există*** *funcții* $f : I \to \mathbf{R}$ *cu proprietatea că* $(f \circ f)(x) = ax$, $(\forall)\ x \in I$, ***care admit primitive pe*** I?

D. M. Bătinețu, G. M. 21/979

Soluție. a) Fie $x_1 < x_2 < x_3$ **rădăcinile reale distincte** ale lui P. Conform teoremei lui Rolle există $y_1 \in (x_1, x_2)$ și $y_2 \in (x_2, x_3)$ astfel încît $P'(y_1) = 0$ și $P'(y_2) = 0$. Cum P' are **gradul doi, rezultă că** singurele rădăcini ale acestui polinom sînt y_1 și y_2, care **sînt reale și distincte.** Deoarece $P'(f(x)) = 0$, $(\forall)\ x \in I$, deducem că $f(x)$ este **rădăcină pentru** P', deci $f(x) \in \{y_1, y_2\}$, $(\forall)\ x \in I$. Dar f fiind neconstantă, **ia efectiv ambele valori** y_1 și y_2, ceea ce înseamnă că $f(I) = \{y_1, y_2\}$. Dar atunci f **nu are proprietatea** lui Darboux și deci nu admite primitive.

b) Să presupunem că ar **exista o funcție** $f : I \to \mathbf{R}$ care are primitive și astfel că $f(f(x)) = ax$, $(\forall)\ x \in I$, **unde** $a < 0$. Se arată ușor că f este injectivă, iar din faptul că ar admite **primitive, rezultă că are** proprietatea lui Darboux.

Fiind injectivă și cu **proprietatea lui** Darboux, înseamnă că este strict monotonă pe intervalul I; dar **atunci** $f \circ f$ **este** funcție strict crescătoare, în timp ce funcția de gradul I, $x \to ax$ **este** strict descrescătoare, contradicție. Așadar nu există funcții cu **proprietățile** cerute.

CE 63. *Să se demonstreze că:*

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{kq^k} = \ln \frac{q}{q-1}$, $q > 1$.

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)q^{2k+1}} = \frac{1}{2} \ln \frac{q+1}{q-1}$, $q > 1$.

Dorin Andrica, G. M. 1/1981

Soluție. Se utilizează **dezvoltarea în serie de puteri** a funcției $f(x) = \ln(1 + x)$, $x > -1$. Avem

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!(1+x)^{-n},\ (\forall)\ n \geqslant 1$$

deci

$$f(0) = 0 \text{ și } f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)! \text{ pentru } n \geqslant 1.$$

Atunci

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot x^n. \tag{1}$$

1) **În** egalitatea (1) se face $x = -1/q$ și se obține

$$\ln\left(1 - \frac{1}{q}\right) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nq^n} = -\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{kq^k},$$

de unde

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{n=1}^{n} \frac{1}{kq^k} = \ln \frac{q}{q-1}$$

2) **În** (1) se face $x = 1/q$, apoi $x = -1/q$ și se scad egalitățile obținute, rezultînd

$$\ln\left(1 + \frac{1}{q}\right) - \ln\left(1 - \frac{1}{q}\right) = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)\, q^{2n+1}} =$$

$$= 2 \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k+1)\, q^{2k+1}},$$

de unde

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k+1)\, q^{2k+1}} = \frac{1}{2} \ln \frac{q+1}{q-1}.$$

Capitolul III

PROBLEME PENTRU TREAPTA ÎNTÎI (T_1)

Introducere

Treapta I trebuie înțeleasă, în această lucrare, într-un sens mai larg decît cel obișnuit, adică învățămîntul claselor IX și X, fiindcă atunci cînd elevul se găsește în fața unui examen de selecție pentru treapta I, el a parcurs materiile claselor I—VIII și i se cere să le stăpînească. De aceea, în acest capitol vom găsi probleme care presupun astfel de cunoștințe, grupate pe disciplinele respective din planurile de învățămînt în vigoare, fără a ne lua ca limite aceste planuri.

Din nou se acordă o atenție susținută teoriei numerelor prin probleme de divizibilitate ca ($T_1$1), (T_1 2), (T_1 6), de determinare a unor numere naturale prin proprietăți ale cifrelor și grupurilor lor de cifre ca (T_1 3), (T_1 9), semnată de *I. Ionescu*, (T_1 13) de *N. Ciorănescu* sau (T_1 14) de *G. Buicliu*; de asemenea vom găsi probleme privind numerele prime ca (T_1 4), (T_1 5) sau cuburi perfecte ca (T_1 7), (T_1 8). Prin varietatea tematicii, cititorul se va simți atras de acest domeniu prestigios, care în prezent capătă valențe noi prin introducerea unor metode analitice sau informatice.

Algebra, de-a lungul celor patru ani, în care se predă pînă la examenul de admitere în treapta a II-a, prezintă o largă varietate tematică și în consecință vom găsi probleme atractive și de dificultăți adesea considerabile. Rezolvări de ecuații și sisteme ca (T_1 17), (T_1 19), (T_1 31) sau (T_1 35), ultima fiind semnată de *A. Angelescu*, se îmbină cu inegalități în (T_1 18), cu calcule de sume în (T_1 22) pentru a se trece la proprietăți ale numerelor reale sau complexe în (T_1 21) și (T_1 23). Nu sînt neglijate nici probleme cu caracter mai general precum cele privitoare la polinoame, ca (T_1 25), (T_1 26), (T_1 29) sau funcții ca (T_1 24);

de asemenea nici proprietăți ale rădăcinilor primitive ale unității pe care le evidențiază (T_1 27) sub semnătura lui *A. G. Ioachimescu*, acest stîlp al Gazetei Matematice, inginer și matematician de impresionantă cultură și profunzime. Geometriei sintetice i s-a acordat locul cel mai vast în acest capitol. Din punct de vedere metodologic, trebuie să mărturisim că nici manualele nici revistele nu ajută pe începători să se orienteze în rezolvarea problemelor de geometrie. În schimb pretențiile sînt mari, în toate ocaziile, inclusiv la examenele de treapta I.

Încercarea noastră de a realiza o culegere antologică și metodologică se concretizează în special în punerea în evidență a cît mai multe și mai rodnice metode de rezolvare a problemelor de geometrie. Vom avea în general probleme de relații metrice ca (T_1 58), semnată de *N. Abramescu*, (T_1 50), (T_1 44) sub semnătura lui *D. V. Ionescu*, (T_1 61) semnată de *Gh. Bazacov*, (T_1 59) propusă de *V. Thébault* sau (T_1 67) propusă de *Gh. Țițeica*.

Nu lipsesc aici proprietățile de concurență ca (T_1 45) semnată de *O.N. Țino*, de perpendicularitate ca (T_1 54), asemănare ca (T_1 53), puncte fixe ca (T_1 52), nici relații de inegalitate ca (T_1 47) sau (T_1 60). Astfel, capitolul, prin cele 27 probleme de geometrie, mai ales plană, este instructiv prin bogăția de noțiuni și metode pe care le oferă.

Mai modestă este contribuția în domeniul trigonometriei, explicabilă prin estomparea prezenței ei ca disciplină în programele școlare. Totuși cele 8 probleme aduc în actualitate proprietăți interesante și nebanale ca inegalitatea din (T_1 35), rezolvarea unor ecuații în (T_1 38), (T_1 39) sau stabilirea unor relații ca în (T_1 40).

Considerăm că prin această incursiune în conținutul capitolului, cititorul va putea avea o bună orientare în tehnicile și metodele utile treptei I.

T_1 1. *Să se arate că numărul*

$$E = 1848^{18^n} + 96^{14^n} - 2 \text{ este divizibil cu } 19,\ n \in \mathbf{N}.$$

C. Istrati, G. M. 5/1915

Soluție. $E = (1848^{18^n} - 1) + (96^{14^n} - 1)$. Însă $1848^{18^n} - 1 = \mathcal{M}(1848^{18} - 1) = \mathcal{M}(1848^{19-1} - 1) = \mathcal{M}19$, unde pentru ultima egalitate am ținut seama de teorema lui Fermat. Apoi $96^{14^n} - 1 = \mathcal{M}(96 - 1) = \mathcal{M}\,95 = \mathcal{M}(5 \cdot 19) = \mathcal{M}\,19$.

T_1 2. *Dacă p este un număr* **natural** $\geqslant 3$, *să se găsească restul împărțirii numărului $p!$ prin numărul*

$$1(p-2) + 2(p-3) + 3(p-4) + \ldots + (p-2)1.$$

S. Mirea, G. M. vol. XV

Soluție. Dacă $p = 3$, avem $p! = 6$, iar împărțitorul este $1 \cdot 1 = 1$, deci restul împărțirii respective este **0**.

acum $p > 3$. Notînd cu I împărţitorul avem $I = \sum_{k=1}^{p-2} k(p-k-1) =$

$$= p\sum_{k=1}^{p-2} k - \sum_{k=1}^{p-2}(k^2+k) = (p-1)\sum_{k=1}^{p-2} k - \sum_{k=1}^{p-2} k^2 = (p-1)\cdot\frac{(p-2)(p-1)}{2} -$$

$$-\frac{(p-2)(p-1)(2p-3)}{6} = \frac{(p-2)(p-1)p}{6}.$$

Dar $p = \frac{(p-2)(p-1)p}{6}\cdot(p-3)!\cdot 6$, ceea ce înseamnă că împărţirea se face exact şi deci restul este **0. Aşadar pentru** orice $p \geqslant 3$ număr natural restul împărţirii respective **este 0.**

T_1 3. *Să se găsească* ***un număr natural care*** *se descompune în doi factori, astfel ca primul factor să fie* ***cubul unui număr****, iar al doilea factor să fie un număr prim de trei cifre,* ***în care cifra sutelor*** *este egală cu rădăcina cubică a primului factor, iar diferenţa* ***dintre cifra unităţilor*** *şi a zecilor adunată cu a sutelor dă o sumă egală cu* ***primul factor.***

A. Bunescu, G. M. vol. XXI, 1914

Soluţie. Fie N **numărul căutat. Din enunţ** rezultă

$$N = a^3\,(100a + 10b + c), \tag{1}$$

$$c - b + a = a^3. \tag{2}$$

Din relaţia (2) rezultă: $c - b = (a-1)\,a(a+1)$, adică diferenţa $c - b$ este un produs de trei numere **consecutive. Acest** lucru se întîmplă cînd:

a) $c - b = 0$ adică $c = b$ **şi deci** $a = 1$.

Urmează deci $N = 100 + 10b + c$, **adică** N **coincide** cu factorul prim de trei cifre. Dar c nu poate fi decît **un număr impar**, adică $c \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$. Deci avem numerele 111, 133, 155, **177 sau 199.** Dintre acestea numai 199 este număr prim, deci $N = 199$.

b) $c - b = 6$. Rezultă $a - 1 = 1$ **adică** $a = 2$.

Deci avem $N = 8(200 + 10b + c)$.

Cum c este un număr **impar adică 1, 3, 5,** 7 **sau 9,** iar pe de altă parte $c - b = 6$, rezultă soluţiile: $N = 8 \cdot 217$, **ceea ce nu convine** problemei (217 este neprim) **şi** $N = 8 \cdot 239 = 1912$. Deci **soluţiile problemei** sînt 199 şi 1912.

T_1 4. *Fie* p *un* ***număr natural prim.*** *Să se determine toţi* $k \in \mathbf{Z}$ *pentru care* $\sqrt{k^2 - pk} \in \mathbf{N}$.

Liviu Pîrşan, G. M. 4/1981

Soluție. Fie $\sqrt{k^2 - pk} = m \in \mathbf{N} \Leftrightarrow k^2 - pk - m^2 = 0$ de

$$k = \frac{p \pm \sqrt{p^2 + 4m^2}}{2}.$$

Trebuie ca $p^2 + 4m^2 = q^2$ (unde $q \in \mathbf{N}$) adică $p^2 = (q + 2m)(q -$. Cum $q = 2m \geqslant q - 2m$ avem posibilitățile:

I. $\begin{cases} q + 2m = p^2 \\ q - 2m = 1 \end{cases}$ II. $\begin{cases} q + 2m = p \\ q - 2m = p. \end{cases}$

Din I rezultă $m = \frac{p^2 - 1}{4}$ și pentru ca $m \in \mathbf{N}$ trebuie ca p să fie prim impar ($p \neq 2$); din (1) se obțin

$$k_1 = \left(\frac{p + 1}{2}\right)^2, \quad k_2 = -\left(\frac{p - 1}{2}\right)^2.$$

Din II rezultă $m = 0$ și apoi din (1) obținem

$$k_3 = p, \quad k_4 = 0.$$

În concluzie dacă $p = 2$ avem numai soluțiile k_3, k_4, iar dacă $p \geqslant 3$ avem soluțiile k_1, k_2, k_3, k_4.

T$_1$ 5. *Fie p un număr prim, $p \geqslant 3$. Definim șirul $(a_k)_{k \in \mathbf{N}^*}$ astfel: $a_1 = p$; $a_{k+1} = 2a_k + 1$, $k \geqslant 1$. Notăm cu $l(p)$ acel număr natural n, care are proprietatea că numerele a_1, a_2, ..., a_n sînt prime, iar a_{n+1} nu mai este prim. Să se arate că*

$$l(p) \leqslant p - 1.$$

Marcel Țena, G. M. 3/1981

Soluție. Se stabilește prin inducție după k formula:

$$a_k = 2^{k-1}p + 2^{k-1} - 1, \quad (\forall)\, k \in \mathbf{N}^*.$$

Atunci pentru $k = p$ obținem $a_p = 2^{p-1}p + 2^{p-1} - 1$ și folosind teorema lui Fermat, rezultă că a_p este multiplu de p. Cum $a_p > p$ rezultă că a_p nu este număr prim, ceea ce arată că $l(p) \leqslant p - 1$.

Există și numere prime pentru care se poate atinge egalitatea, de exemplu $l(5) = 5 - 1 = 4$.

T$_1$ 6. *Pentru orice $n \geqslant 3$ să se arate că numărul $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (2^n - 1) - 1$ se divide cu 2^n.*

Corneliu Avram, G. M. 2/1981

Soluție. Demonstrăm prin inducție după n. Să notăm cu a_n numărul din enunțul problemei. Avem $a_3 = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 - 1 = 2^3 \cdot 13$. Presupunem că $a_n = 2^n \cdot k$ și să arătăm că a_{n+1} este multiplu de 2^{n+1}.

Avem

$$a_{n+1} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots (2^n - 1)(2^n + 1)(2^n + 3)(2^n + 5) \ldots [2^n + (2^n - 1)] - 1 =$$

$$= (a_n + 1)(2^n + 1)(2^n + 3)(2^n + 5) \ldots [2^n + (2^n - 1)] - 1. \quad (1)$$

Considerînd polinomul $f = (X + 1)(X + 3)(X + 5) \ldots (X + 2^n - 1)$, observăm că termenul său liber este $a_n + 1$, iar termenul de gradul I are drept coeficient o sumă cu un număr par de termeni impari, adică un număr par Rezultă

$$f = X^2 \cdot g + 2pX + a_n + 1,$$

unde g este un polinom cu coeficienţi întregi, iar $p \in N$.
Luînd $X = 2^n$, obţinem egalitatea
$(2^n + 1)(2^n + 3)(2^n + 5) \ldots [2^n + (2^n - 1)] = 2^{2n} q + 2^{n+1} p + a_n + 1$, unde $q \in \mathbf{N}$. Atunci, continuînd în (1) vom obţine
$a_{n+1} = (a_n + 1)(2^{2n} q + 2^{n+1} p + a_n + 1) - 1 = \mathcal{M}2^{n+1} + (a_n + 1)^2 - 1 =$
$= \mathcal{M}2^{n+1} + 2^{2n} \cdot k^2 + 2 \cdot 2^n \cdot k + 1 - 1 = \mathcal{M}2^{n+1}$, ceea ce termină demonstraţia prin inducţie.

T$_1$ 7. *Fie $a \in \mathbf{N}^*$. Să se determine $n \in \mathbf{N}^*$ astfel încît $A = a^{3n} + 3a^2 + 3a + 1$ să fie un cub perfect.*

O. Ciotloş, G. M. 12/1981

Soluţie. 1) Dacă $a = 1$, avem $A = 8$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}^*$, deci este cub perfect.
2) Fie $a > 1$. Dacă $n = 1$, avem $A = (a + 1)^3$, care este cub perfect.
Dacă $n > 1$, avem

$$(a^n)^3 < a^{3n} + 3a^2 + 3a + 1 < a^{3n} + 3a^{2n} + 3a^n + 1 = (a^n + 1)^3,$$

ceea ce înseamnă că A nu poate fi cub perfect.

T$_1$ 8. *Să se demonstreze că oricare ar fi $n \in \mathbf{Z}$, numerele $n + 1$ şi $8n + 1$ nu pot fi simultant cabluri p rfecte.*

Titus Andreescu, G.M. 10/1978

Soluţie. Vom arăta că dacă $n + 1$ este cub, atunci $8n + 1$ nu mai poate fi cub. Fie aşadar $n + 1 = a^3$, $a \in \mathbf{Z}$. Atunci $n = a^3 - 1$, deci $8n + 1 = 8a^3 - 7$.
Pentru $a \in \{(-\infty, -1] \cup [2, \infty)\} \cap \mathbf{Z}$ avem inegalităţile

$$(2a - 1)^3 < 8a^3 - 7 < (2a)^3,$$

ceea ce arată că $8a^3 - 7$ nu mai poate fi cub perfect.
Pentru $a = 0$ avem $n = -1$ deci $8n + 1 = -7$, care nu este cub
Pentru $a = 1$ avem $n = 0$, ceea ce contrazice ipoteza $n \in \mathbf{Z}^*$.

T$_1$ 9. *Ce număr natural nenul trebuie scris la dreapta unui număr natural nenul pentru ca el să crească cu 1000?*

I. Ionescu, G. M. vol. XXVIII 1922

Soluție. Fie N un număr după care scriem un număr natural nenul n de m cifre, astfel ca numărul format să fie $N + 1000$. Deci

$$10^m N + n = N + 1000 \quad \text{sau} \quad (10^m - 1)\, N = 1000 - n.$$

Rezultă că $n < 1000$, adică n poate avea una, două sau cel mult trei cifre. Fie $m = 1$. Ecuația devine

$$9N = 1000 - n \text{ sau } N = 111 + \frac{1 - n}{9}.$$

Dar pentru ca N să fie întreg trebuie ca n să fie egal cu 1 (ținem seama că n are o singură cifră).

Urmează deci $N = 111$, adică numărul obținut este 1111.

Fie $m = 2$. Atunci rezultă

$$99N = 1000 - n \quad \text{sau} \quad N = 10 + \frac{10 - n}{99}.$$

Rezultă $n = 10$ și $N = 10$ adică numărul obținut în acest caz este 1010.

Fie $m = 3$. Rezultă $999\ N = 1000 - n$.

Cum N este cel puțin 1, rezultă că n nu poate avea trei cifre. Deci în acest caz nu avem soluții.

T_1 10. *Să se determine un număr de forma $\overline{abba}$, știind că în orice bază este un cub perfect.*

Lucian Mănescu, G. M. 1/1960

Soluție. Fie x baza în care este scris numărul dat. Rezultă

$$N = ax^3 + bx^2 + bx + a = a(x^3 + 1) + bx(x + 1) =$$

$$= a(x + 1)(x^2 - x + 1) + bx(x + 1) = (x + 1)[ax^2 + (b - a)x + a].$$

Pentru ca numărul natural N să fie cub în orice bază, trebuie ca

$ax^2 + (b - a)x + a = (x + 1)^2$, $(\forall)\ x \in \mathbf{N}$, $x \geqslant 2$ adică $a = 1$ și $b - a = 2$.

Rezultă deci $a = 1$ și $b = 3$, adică numărul căutat este $N = 1331$.

T_1 11. *Să se găsească numărul $\overline{abcd}$ care este produsul a trei numere consecutive dintre care două prime, știind că $\overline{ab}$ și $\overline{cd}$ sînt două numere consecutive.*

V. Lungu, G. M. vol. XXII, 1916

Soluție. Numărul căutat este de forma

$$\overline{abcd} = n^3 - n \ (n \in \mathbf{N}^*).$$

Prin urmare rezultă

$$1000 < n^3 - n < 10\,000 \quad \text{sau} \quad 10 < n < 22.$$

Dar între 10 și 22 singurele trei numere consecutive dintre care două sînt numere prime sînt 11, 12, 13 sau 17, 18, 19; produsul lor este respectiv 1716

și respectiv 5814. Dintre aceste produse primul îndeplinește condiția din enunț ca să fie format din juxtapunerea a două numere consecutive.

T_1 12. *Să se găsească toate numerele naturale nenule scrise cu cifre diferite, la care cifrele sînt proporționale cu rangul lor de la dreapta la stînga.*

I. Ionescu, G. M. vol. XXXVIII, 1932

Soluție. Numărul maxim de cifre va fi nouă, de aceea vom considera cazul general, rămînînd ca numerele cu mai puține cifre să fie deduse din acesta. Fie numărul $\overline{ihgfedcba}$. Din enunț rezultă

$$\frac{a}{1}=\frac{b}{2}=\frac{c}{3}=\frac{d}{4}=\frac{e}{5}=\frac{f}{6}=\frac{g}{7}=\frac{h}{8}=\frac{i}{9}.$$

Pentru $a = 1$ rezultă $b = 2$, $c = 3$, $d = 4$, $e = 5$, $f = 6$, $g = 7$, $h = 8$ și $i = 9$. În acest caz soluțiile vor fi: 21, 321, 4321, 54 321, 654 321, 7 654 321, 87 654 221, 987 654 321.

Pentru $a = 2$ rezultă $b = 4$, $c = 6$, $d = 8$. În acest caz soluțiile vor fi 42, 642, 8642.

Pentru $a = 3$ rezultă $b = 6$ și $c = 9$. În acest caz soluțiile vor fi 63 și 963. În cazul în care $a = 4$ rezultă $b = 8$, adică soluția 84.

T_1 13. *Să se găsească un pătrat perfect de trei cifre astfel ca numărul format de primele sale două cifre să fie răsturnatul rădăcinii sale pătrate, iar ultima cifră să fie egală cu suma primelor două.*

N. I. Ciorănescu, G. M, vol. XXVI, 1920

Soluție. Dacă notăm prin $\overline{abc}$ numărul căutat, din enunț rezultă

$$100b + 10a + (a + b) = (10a + b)^2 \quad \text{sau} \quad 100b + a = (10a + b)\cdot$$
$$\cdot(10a + b - 1).$$

Deoarece membrul al doilea este produsul a două numere naturale consecutive, rezultă că a este număr par. Pe de altă parte avem

$$10a + b \leqslant 31 \text{ (deoarece } 32^2 \text{ are mai mult de 3 cifre).}$$

Dar a și b fiind cifre rezultă că a nu poate fi decît 2 ($a = 3$ și $b = 0$ sau 1 nu conduc la soluții).

Prin urmare b va fi dat de ecuația $b^2 - 61b + 378 = 0$
a cărei rădăcină de o singură cifră va fi $b = 7$. Deci numărul căutat va fi $27^2 = 729$.

T_1 14. *Să se găsească un număr de trei cifre distincte, egal cu suma tuturor numerelor de cîte două cifre, care se pot forma cu cifrele numărului căutat.*

Gh. Buicliu, G. M. vol. XVI

Soluție. Dacă a, b și c sînt cifrele numărului căutat $\overline{abc}$ atunci toate numerele de cîte două cifre, care se pot forma cu ele sînt:

$$\overline{aa}\ \ \overline{bb},\ \overline{cc},\ \overline{ab},\ \overline{ba},\ \overline{ca},\ \overline{ac},\ \overline{bc} \quad \text{și} \quad \overline{cb}.$$

Rezultă deci

$$\overline{abc} = 11a + 11b + 11c + 10a + b + a + 10b + 10c + a + 10a + 10b +$$

$$+ 2c + b + 10c = 33\,(a + b + c).$$ Deoarece $33 \mid \overline{abc}$ rezultă că $3 \mid (a + b + c)$,

$$\text{adică } 99 \mid \overline{abc}.$$

Dar de aici rezultă că $9 \mid (a + b + c)$. Dar a, b și c fiind de o singură cifră rezultă că suma lor nu poate fi decît 9, 18 sau 27. Deci $\overline{abc}$ căutat poate fi unul din numerele:

$$\overline{abc} = 33 \cdot 9 = 297;$$

$$\overline{abc} = 33 \cdot 18 = 594,$$

$$\overline{abc} = 33 \cdot 27 = 891.$$

Dar egalitatea inițială este verificată doar de numărul 594.

$T_1$15. *Să se rezolve în numere întregi ecuația:*

$$(y + xy + 1)^2 + (x^2 + y^2 - 17)^2 + (2xy + x + 2y + 2) = 0.$$

C. Iosifescu, G. M. vol. XIV, 1908–1909

Soluție. Ecuația dată se mai poate scrie

$$(y + xy + 1)^2 + (x^2 + y^2 - 17)^2 + x^2 + 2x\,(x + xy + 1) = 0 \quad \text{sau}$$

$$(x^2 + y^2 - 17)^2 + (x + y + xy + 1)^2 = 0.$$

Deci

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 17 \\ x + y + xy + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 17 \\ (x + 1)\,(y + 1) = 0. \end{cases}$$

Rezultă deci următoarele soluții:

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = -4 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = -1 \\ y = 4 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = -4 \\ y = -1 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = 4 \\ y = -1. \end{cases}$$

T_1 16. *Să se găsească soluțiile reale ale sistemului*

$$\begin{cases} x^3 + 2x^2y - y^3 + 44 = 0, \\ 2y^3 + 3xy^2 + x^2y + 20 = 0. \end{cases}$$

Olimpiada de matematică, cl. IX, 1956, București, G. M. 4/1957

Soluție. Adunînd cele două ecuații ale sistemului rezultă

$$(x + y)^3 = -64.$$

Ținînd cont de ipoteză, rezultă

$$x + y = -4 \quad \text{sau} \quad y = -(x + 4).$$

Înlocuind pe y în prima ecuație rezultă $x^2 + 12x + 27 = 0$.
Soluțiile ecuației vor fi $x_1 = -3$ și $x_2 = -9$, care implică $y_1 = -1$ și $y_2 = 5$.

T$_1$ 17. *Să se aranjeze în ordinea mărimii relative rădăcinile ecuațiilor:*

$$x^2 - 2mx + 2m - 1 = 0,$$

$$x^2 + 2(m - 1)x - 2m - 5 = 0,$$

cînd m variază de la $-\infty$ la $+\infty$.

I. Ionescu, G. M. vol. III, 3/1897

Soluție. Fie x_{11}, x_{12} rădăcinile primei ecuații, respectiv x_{21}, x_{22} rădăcinile celei de a doua ecuații. Ordonarea presupune că ele sînt reale, adică

$$\begin{cases}\Delta_1 = 4(m - 1)^2 \geqslant 0\\ \Delta_2 = 4(m^2 + 6) > 0\end{cases}, \text{ realizat pentru orice } m \in \mathbf{R}.$$

Nu este necesar să ne prevalăm de faptul că x_{11} și x_{12} depind rațional de parametru (de altfel $x_{11} = 1$), ceea ce nu se întîmplă pentru x_{21} și x_{22}. Avem:

$$\begin{cases}x_{11} + x_{12} = 2m\\ x_{11}x_{12} = 2m - 1\end{cases}; \quad \begin{cases}x_{21} + x_{22} = -2(m - 1)\\ x_{21}x_{22} = -2m - 5.\end{cases}$$

Fie f_1 și f_2 trinoamele asociate. Putem scrie

$$f_1(x_{21}) = x_{21}^2 - 2m\,x_{21} + 2m - 1,$$
$$f_1(x_{22}) = x_{22}^2 - 2m\,x_{22} + 2m - 1,$$

deci:

$$f_1(x_{21}) + f_1(x_{22}) = x_{21}^2 + x_{22}^2 - 2m(x_{21} + x_{22}) + 4m - 2 =$$
$$= 4(m - 1)^2 + 4m + 10 + 4m(m - 1) + 4m - 2 = 8m^2 - 4m +$$
$$+ 12 = 4(2m^2 - m + 3);$$

$$f_1(x_{21})\,f_1(x_{22}) = (x_{21}x_{22})^2 - 2m\,x_{21}x_{22}(x_{21} + x_{22}) + (2m - 1)(x_{21}^2 + x_{22}^2) +$$
$$+ 4m^2\,x_{21}x_{22} - 2m(2m - 1)(x_{21}\,x_{22}) + (2m - 1)^2 = (2m + 5)^2 -$$
$$- 4m(m - 1)(2m + 5) + (2m - 1)[4(m - 1)^2 + 4m + 10] + 4m^2(2m +$$
$$+ 5) + 4m(2m - 1)(m - 1) + (2m - 1)^2 = 4m^2 + 20m + 25 - 8m^3 -$$
$$- 12m^2 + 20m + 8m^3 - 12m^2 + 32m - 14 + 8m^3 - 12m^2 + 4m +$$
$$+ 4m^2 - 4m + 1 = -48m^2 + 72m + 12 = 12(-4m^2 + 6m + 1).$$

Observăm că $f_1(x_{21}) + f_1(x_{22}) > 0$ pentru orice $m \in \mathbf{R}$. Avem apoi următoarele cazuri:

I. $m < \dfrac{3-\sqrt{13}}{4} \Rightarrow f_1(x_{21}) f_1(x_{22}) < 0$, din care rezultă ordonările

$$x_{11} < x_{21} < x_{12} < x_{22} \tag{1}$$

sau

$$x_{21} < x_{11} < x_{22} < x_{12};$$

II. $m = \dfrac{3-\sqrt{13}}{4} \Rightarrow x_{11} = x_{21} = \dfrac{1-\sqrt{13}}{2} < x_{12} < x_{22};$

III. $\dfrac{3-\sqrt{13}}{4} < m < \dfrac{3+\sqrt{13}}{4} \Rightarrow f_1(x_{21}) f_1(x_{22}) > 0,$

caz special, asupra căruia vom reveni;

IV. $m = \dfrac{3+\sqrt{13}}{4} \Rightarrow x_{21} < x_{11} < x_{22} = \dfrac{1+\sqrt{13}}{2} = x_{12};$

V. $m > \dfrac{3+\sqrt{13}}{4} \Rightarrow f_1(x_{21}) f_1(x_{22}) < 0$

din care rezultă ordonările:

$$x_{11} < x_{21} < x_{22} < x_{22}$$

sau

$$x_{21} < x_{11} < x_{22} < x_{12}. \tag{2}$$

Ordonările (1) și (2) fiind motivate după principiul continuității, rezolvă și cazul special:

$$x_{21} < x_{11} < x_{12} < x_{22}.$$

Pentru $m = 1$ avem $x_{11} = x_{12}$ și cum $1 \in \left(\dfrac{3-\sqrt{13}}{4}, \dfrac{3+\sqrt{13}}{4}\right)$, nu impietează asupra ordonării decît prin permutarea expresiilor aferente rădăcinilor x_{21}, x_{22}.

T$_1$ 18. *Știind că x, y, z, u reprezintă numere întregi și pozitive diferite, scrise în ordinea $1 < x < y < z < u$, să se arate că*

$$xyz + zyu + xzu + yzu \leqslant \frac{81}{24} xyzu - 1.$$

I. Mănescu, G. M. 10/1956

Soluție. Inegalitatea se mai poate scrie

$$\frac{xyz + xyu + xzu + yzu + 1}{xyzu} \leqslant \frac{31}{24} \quad \text{sau} \quad \frac{1}{xyzu} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{u} \leqslant \frac{31}{24}.$$

Dacă $f(x, y, z, u) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{u} + \frac{1}{xyzu}$,

ținînd seama de ordonările din enunț, rezultă că funcția are un maxim pentru $x = 2$, $y = 3$, $z = 4$, $u = 5$. Maximul funcției este $31/24$ deci $f(x, y, z, u) \leqslant 31/24$.

T_1 19. *Să se rezolve ecuația:*

$$\sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}} - \sqrt{\frac{1}{x} - \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}} = \sqrt{x}$$

și să se verifice soluțiile aflate.

C. Ionescu-Țiu, vol. XLIV

Soluție. Se ridică la pătrat, se fac reducerile și se obține

$$2/x - x = 2\sqrt{1/x^2 - 1 + x^2/4} \Leftrightarrow 2/x - x = 2\,|\,1/x - x/2\,|.$$

Avem cazurile:

I. $2/x - x = 2(1/x - x/2)$ pentru $1/x - x/2 \geqslant 0$, deci o identitate.

II. $2/x - x = 2(x/2 - 1/x)$ pentru $1/x - x/2 < 0$.

Pentru valori reale ale lui x, prima parte a egalității din enunț este reală și deducem din partea a doua că x este pozitiv, deci din I obținem $0 < x \leqslant \sqrt{2}$, iar din II obținem $x = \sqrt{2}$. Se mai observă că pentru $x \in (0, \sqrt{2}]$ radicalii care apar au sens. Într-adevăr $1/x \pm \sqrt{1 - x^2/4} \geqslant 0$ deoarece $1/x^2 \geqslant 1 - x^2/4 \Leftrightarrow (x^2-2)^2 \geqslant 0$. De asemenea avem $\sqrt{1/x + \sqrt{1 - x^2/4}} > \sqrt{1/x - \sqrt{1 - x^2/4}}$, ceea ce înseamnă că membrul stîng din enunț este pozitiv ca și cel drept. Deci orice $x \in (0\ \sqrt{2}]$ este soluție.

Așadar mulțimea soluțiilor ecuației date este intervalul $(0, \sqrt{2}]$.

T_1 20. *Ce sumă a avut o persoană dacă și-a consumat-o în n zile, cheltuind zilnic a n-a parte din suma rămasă, plus 1 leu, și care sînt cheltuielile zilnice?*

Gh Pștopeanu, G. M. vol. XXXIX, 1933

Soluție. Fie S suma cerută, C_1, C_2, ..., C_k, ..., C_{n-1}, C_n cheltuielile zilnice făcute, iar R_1, R_2, ..., R_k, ..., R_{n-1}, R_n sumele rămase la sfîrșitul fiecărei zile. Rezultă:

$$C_1 = \frac{S}{n} + 1, \qquad R_1 = S - C_1$$

$$C_2 = \frac{R_1}{n} + 1, \qquad R_2 = R_1 - C_2$$

$$C_k = \frac{R_{k-1}}{n} + 1, \qquad R_k = R_{k-1} - C_k$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$C_{n-1} = \frac{R_{n-2}}{n} + 1, \quad R_{n-1} = R_{n-2} - C_{n-1}$$

$$C_n = \frac{R_{n-1}}{n} + 1, \qquad R_n = R_{n-1} - C_n.$$

Întrucît la sfîrșitul zilei a n-a n-a mai rămas nimic, avem $R_n = 0$.
Din relațiile de mai sus rezultă:

$$R_1 = S - \left(\frac{S}{n} + 1\right), \text{ adică } R_1 = \frac{n-1}{n} S - 1; \quad C_2 = \frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n} S - 1\right) +$$

$$+ 1 \text{ sau } C_2 = \frac{n-1}{n^2} S + \frac{n-1}{n^2};$$

$$R_2 = \frac{(n-1)}{n} S - 1 - \frac{n-1}{n^2} S - \frac{n-1}{n} \text{ sau } R_2 = \frac{(n-1)^2}{n^2} S -$$

$$- \frac{2n-1}{n}; \quad C_2 = \frac{1}{n}\left[\frac{(n-1)^2}{n^2} S - \frac{2n-1}{n}\right] + 1 = \frac{(n-1)^2}{n^3} S + \frac{(n-1)^2}{n^2}.$$

Să demonstrăm prin inducție că

$$\begin{cases} R_{k-1} = \left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{k-1} S - \dfrac{n^{k-1} - (n-1)^{k-1}}{n^{k-2}} \\ C_k = \dfrac{(n-1)^{k-1}}{n^k} S + \left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{k-1}. \end{cases} \tag{1}$$

În adevăr, pentru $k = 2$, $k = 3$ s-a verificat. Să presupunem relațiile (1) adevărate. Atunci

$$R_k = R_{k-1} - C_k = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1} S - \frac{(n-1)^{k-1}}{n^k} S - \frac{n^{k-1} - (n-1)^{k-1}}{n^{k-2}} -$$

$$-\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1} \quad \text{sau} \quad R_k = \frac{(n-1)^{k-1}}{n^k}(n-1)\,S -$$

$$-\frac{n^k - n(n-1)^{k-1} + (n-1)^{k-1}}{n^{k-1}} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^k S - \frac{n^k - (n-1)^k}{n^{k-1}}.$$

Pe de altă parte avem

$$C_{k+1} = \frac{R_k}{n} + 1 = \frac{(n-1)^k}{n^{k+1}} S - \frac{n^k - (n-1)^k}{n^k} + 1 =$$

$$= \frac{(n-1)^k}{n^{k+1}} S + \left(\frac{n-1}{n}\right)^k, \text{ ceea ce trebuia demonstrat.}$$

Făcînd în expresia lui R_{k-1} din (1) $k - 1 = n$ obținem

$$R_n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n S - \frac{n^n - (n-1)^n}{n^{n-1}} = 0, \text{ de unde rezultă}$$

$$S = \frac{n^n - (n-1)^n}{(n-1)^n} \cdot n.$$

T$_1$ 21. *Dacă a, b, c sînt numere raționale, strict pozitive cu $a + c \neq b$, $a + b \neq c$ și $\sqrt{a} = \sqrt{b} + \sqrt{c}$, atunci $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$ sînt proporționale cu numere raționale.*

Gh. Galbură, G. M. 4/1950

Soluție. Avem $\sqrt{b} - \sqrt{c} = \dfrac{b-c}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} = \dfrac{b-c}{\sqrt{a}}$.

Pe de altă parte egalitatea dată se scrie $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \sqrt{c}$ sau, ridicînd la pătrat, rezultă $a + b - 2\sqrt{ab} = c$, de unde urmează că

$$\sqrt{b} = \frac{a+b-c}{2\sqrt{a}} = \sqrt{a}\,\frac{a+b-c}{2a}. \text{ Analog, rezultă } \sqrt{c} =$$

$$= \frac{a-b+c}{2\sqrt{a}} = \sqrt{a} \cdot \frac{a-b+c}{2a},$$

de unde $\dfrac{\sqrt{a}}{2a} = \dfrac{\sqrt{b}}{a+b-c} = \dfrac{\sqrt{c}}{a-b+c}$.

Numerele a, b, și c fiind raționale, rezultă deci că $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$ și $\sqrt{c}$ sînt proporționale cu numere raționale.

T$_1$ 22. *Să se găsească formula care permite calculul sumei*

$$S_n = 1 + 12 + 112 + \ldots + \underbrace{11\ldots1}_{(n-1)\text{ ori}}\ 2.$$

M. Focșăneanu, G. M. vol. XXVIII

Soluție. Fie suma generală $S = a + \overline{ab} + \overline{aab} + \ldots + \underbrace{\overline{a\ldots a}}_{\text{de } n-1 \text{ ori}}\ b$

unde a și b sînt cifre în sistemul de numerație β.
Rezultă prin adunarea și scăderea lui a la fiecare termen al sumei:

$$S = a + \overline{aa} + \ldots + \underbrace{\overline{aa\ldots a}}_{\text{de } n \text{ ori}} + (b-a)(n-1)$$

sau

$$S = a(1 + 11 + \ldots + \underbrace{11\ldots1}_{\text{de } n \text{ ori}}) + (b-a)(n-1).$$

Notînd paranteza prin S' și calculînd rezultă

$$S' = 1 + (\beta+1) + (\beta^2+\beta+1) + \ldots + (\beta^{n-1}+\beta^{n-2}+\ldots+\beta+1) =$$

$$= 1 + \frac{\beta^2-1}{\beta-1} + \frac{\beta^3-1}{\beta-1} + \cdots + \frac{\beta^n-1}{\beta-1} = \frac{1}{\beta-1}\left[\frac{\beta^{n+1}-\beta}{\beta-1} - n\right].$$

Urmează deci

$$S = a\,\frac{\beta^{n+1} - (n+1)\beta + n}{(\beta-1)^2} + (b-a)(n-1).$$

Făcînd $\beta = 10$, $a = 1$ și $b = 2$ se obține suma căutată, adică

$$S_n = \frac{10^{n+1} + 72n - 91}{81}.$$

T$_1$ 23. *Fie $x, y, z \in \mathbf{C}^*$, distincte două cîte două astfel ca $x + 1/y = y + 1/z = z + 1/x$. Atunci xyz este un număr real de modul egal cu 1.*

Gh. Stoica, G. M. 12/1982

Soluție. Notăm: $x + 1/y = y + 1/z = z + 1/x = t$. Rezultă $y = \dfrac{1}{t-x}$, $z = t - 1/x$. Înlocuind în relația $y + 1/z = t$, obținem $\dfrac{1}{t-x} + \dfrac{x}{tx-1} = t$ sau $(t^2-1)(x^2 - tx + 1) = 0$.

Dacă am avea $x^2 - tx + 1 = 0$, rezultă $x + 1/x = t$ și cum $x + 1/y = t$, am avea $x = y$, contradicție. Așadar $t^2 - 1 = 0$, adică $t = -1$ sau $t = 1$.

Dacă $t = -1$, obținem $y = -\frac{1}{1+x}$, $z = -\frac{x+1}{x}$, deci $xyz = 1$.

Dacă $t = 1$, obținem $y = \frac{1}{1-x}$, $z = \frac{x-1}{x}$, deci $xyz = -1$.

În concluzie $xyz \in \mathbf{R}$ și $|xyz| = 1$.

T$_1$ 24. *Dacă o funcție $f:\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ are proprietatea că $f(x+y) = f(x) + f(y)$ oricare ar fi $x, y \in \mathbf{R}$, atunci mulțimea $F = \{x \in \mathbf{R} \mid f(x) = x\}$ este nevidă. Dacă mulțimea F are un număr finit de elemente, atunci numărul elementelor lui F este impar.*

D. M. Bătinețu, G. M. 2/1977

Soluție. Făcînd $x = y = 0$ obținem $f(0) = 2f(0)$ de unde $f(0) = 0$, deci $0 \in F$. Dacă $x \in F$ vom arăta că și $-x \in F$. În adevăr, făcînd $y = -x$ se obține $f(x) + f(-x) = 0$, deci $f(-x) = -f(x)$. Dar $x \in F \Rightarrow f(x) = x \Rightarrow$ $\Rightarrow f(-x) = -f(x) = -x$, deci $-x \in F$.

Rezultă că F este reuniunea unor submulțimi de tipul $\{-x, x\}$ (cu $x \neq 0$) și $\{0\}$, deci are un număr impar de elemente.

T$_1$ 25. *Să se arate că dacă două polinoame de gradul al treilea cu coeficientul dominant egal cu unu și cu ceilalți coeficienți raționali au două rădăcini comune iraționale distincte și a căror sumă este tot irațională, atunci cele două polinoame sînt egale.*

D. Acu, G. M. 7/1977

Soluție. Fie $P(x) = x^3 + m_1x^2 + n_1x + p_1$, $Q(x) = x^3 + m_2x^2 + n_2x + p_2$ cele două polinoame $m_i, n_i, p_i \in \mathbf{Q}$, $i = 1, 2$) și fie α, β cele două rădăcini iraționale comune cu proprietatea din enunț. Scriind că $P(\alpha) = P(\beta) = Q(\alpha) = Q(\beta) = 0$, avem

$$\alpha^3 + m_1\alpha^2 + n_1\alpha + p_1 = 0, \quad \beta^3 + m_1\beta^2 + n_1\beta + p_1 = 0, \quad \alpha^3 + m_2\alpha^2 + n_2\alpha +$$

$$+ p_2 = 0, \quad \beta^3 + m_2\beta^2 + n_2\beta + p_2 = 0.$$

Scăzînd a treia egalitate din prima și a patra din a doua, obținem:

$$(m_1 - m_2)\,\alpha^2 + (n_1 - n_2)\,\alpha + p_1 - p_2 = 0,$$

$$(m_1 - m_2)\,\beta^2 + (n_1 - n_2)\beta + p_1 - p_2 = 0.$$

Scăzînd între aceste egalități pe a doua din prima găsim

$(m_1 - m_2)\,(\alpha + \beta)\,(\alpha - \beta) + (n_1 - n_2)\,(\alpha - \beta) = 0$, sau, deoarece $\alpha \neq \beta$:

$$(m_1 - m_2)\,(\alpha + \beta) + n_1 - n_2 = 0.$$

Deoarece $\alpha + \beta$ este irațional rezultă $m_1 - m_2 = 0$ (în caz contrar am avea $\alpha + \beta = \frac{n_1 - n_2}{m_2 - m_1} \in \mathbb{Q}$), de unde, după aceea, rezultă $n_1 = n_2$ și $p_1 = p_2$. Deducem $P(x) = Q(x)$.

T$_1$ 26. *Fie $p(x)$ un polinom cu coeficienți complecși de grad cel puțin m. Să se arate că restul împărțirii polinomului $p(x)$ prin $(x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_m)$ este un polinom constant, dacă și numai dacă resturile împărțirii polinomului $p(x)$ prin $x - a_i$ sînt egale, unde $a_i (i = 1, 2, \ldots, m)$ sînt constante complexe diferite între ele.*

Gh. Albu, G. M. 9/1973

Soluție. *Necesitatea condiției.* Presupunem că restul împărțirii lui $p(x)$ la $(x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_m)$ este un plinom constant k. Atunci există un polinom $q(x)$ astfel încît

$$p(x) = q(x)(x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_m) + k.$$

Se vede de aici că restul împărțirii lui $p(x)$ prin $x - a_i$ este k, pentru orice $i = 1, 2, \ldots, m$, deci aceste resturi sînt egale.

Suficiența condiției. Presupunem că resturile împărțirilor lui $p(x)$ la $x - a_i$ sînt egale, $i = 1, 2, \ldots, m$, și fie k valoarea lor comună (evident aceste resturi sînt polinoame constante).

Rezultă că polinomul $p(x) - k$ se divide prin $x - a_1$, $x - a_2, \ldots, x - a_m$ și deci și prin produsul lor $(x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_m)$. Atunci există un polinom $q(x)$ astfel ca:

$$p(x) - k = q(x)(x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_m)$$

sau

$$p(x) = q(x)(x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_m) + k,$$

relație ce arată că restul împărțirii lui $p(x)$ prin produsul $(x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_m)$ este polinomul constant k.

T$_1$ 27. *Fie α o rădăcină primitivă a ecuației $x^n - 1 = 0$ și să notăm $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$, $S = f(\alpha) + f(\alpha^2) + \ldots + f(\alpha^n)$. Să se arate că avem*

$$\frac{S}{n} = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c} \cdot \frac{d^{n-1}}{d^n - (-c)^n}.$$

A. G. Ioachimescu, G. M. vol. X

Soluție. Fie x rădăcină a ecuației $x^n - 1 = 0$ și fie $y = \frac{ax + b}{cx + d}$, de unde $x = \frac{dy - b}{a - cy}$. Cum $x^n - 1 = 0$, obținem

$$(dy - b)^n - (a - cy)^n = 0$$

sau

$$[d^n - (-c)^n]\, y^n - n[bd^{n-1} + a(-c)^{n-1}]\, y^{n-1} + \ldots = 0. \qquad (1)$$

Pe de altă parte, α fiind o rădăcină primitivă a ecuației $x^n - 1 = 0$, puterile succesive ale lui α dau toate rădăcinile acestei ecuații. Iar $f(\alpha), f(\alpha^2), \ldots f(\alpha^n)$ vor fi toate rădăcinile ecuației (1) corespunzătoare rădăcinilor ecuației binome $x^n - 1 = 0$.

Vom avea deci $\sum_{i=1}^{n} f(\alpha^i) = \sum_{i=1}^{n} y_i = n\,\dfrac{bd^{n-1} + a(-c)^{n-1}}{d^n - (-c)^n}$, adică $\dfrac{S}{n} =$

$$= \frac{\dfrac{ad^n - a(-c)^n}{c} + bd^{n-1} - \dfrac{ad^n}{c}}{d^n - (-c)^n},$$

sau

$$\frac{S}{n} = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c} \cdot \frac{d^{n-1}}{d^n - (-c)^n}.$$

T_1 28. *Să se arate că toate rădăcinile reale ale ecuației*

$$x^{2n+1} - x^{2n} + x^{2n-1} + 2nx^n - n^2 = 0,$$

sînt strict pozitive oricare ar fi $n \in \mathbf{N}^*$.

Vasile Scurtu, G. M. 10/1978

Soluție. Fie α o rădăcină reală a ecuației date.
Avem $\alpha^{2n+1} - \alpha^{2n} + \alpha^{2n-1} + 2n\,\alpha^n - n^2 = 0$ sau $\alpha^{2n-1}(\alpha^2 + 1) = (\alpha^n - n)^2$ de unde $\alpha^{2n-1} = \dfrac{(\alpha^2 - n)^2}{\alpha^2 + 1} \geqslant 0$ și deci $\alpha \geqslant 0$. Dar cum zero nu este rădăcină a ecuației, rezultă $\alpha > 0$.

T_1 29. *Un polinom P este reciproc, dacă coeficienții termenilor egal depărtați de extremi sînt egali.*

a) *Să se arate că o condiție necesară și suficientă ca un polinom P, cu coeficienți complecși, să fie reciproc este ca*

$$P\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^n} P(x), \quad (\forall)\, x \in \mathbf{C}^*,$$

unde n este gradul polinomului.

b) *Să se deducă de aici că produsul a două (și deci a oricîte) polinoame reciproce este tot un polinom reciproc.*

c) *Alegînd convenabil un polinom reciproc să se demonsteze egalitatea combinărilor complementare.*

Marcel Țena, G. M. 11/1979

Soluție. a) Demonstrăm necesitatea condiției. Fie $P(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n \in \mathbf{C}[x]$ polinom reciproc deci $a_i = a_{n-i}$ pentru $i = 0, 1, 2, \ldots, n$. Atunci

$$P\left(\frac{1}{x}\right) = a_0 + a_1\frac{1}{x} + a_2\frac{1}{x^2} + \ldots + a_n\frac{1}{x^n} = \frac{1}{x^n}(a_0x^n + a_1x^{n-1} +$$

$$+ a_2x^{n-2} + \ldots + a_n) = \frac{1}{x^n}(a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_0) = \frac{1}{x^n}P(x).$$

Demonstrăm suficiența condiției. Fie $P(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n \in \mathbf{C}[x]$ cu proprietatea $P\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^n}P(x)$, $(\forall)\ x \in \mathbf{C}\setminus\{0\}$.

Această egalitate se scrie succesiv

$$a_0 + a_1\frac{1}{x} + a_2\frac{1}{x^2} + \ldots + a_n\frac{1}{x^n} = \frac{1}{x^n}(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n)$$

sau

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n,$$

de unde, identificînd coeficienții, avem $a_o = a_n$, $a_1 = a_{n-1}$, ..., adică P este polinom reciproc.

b) Fie P, Q polinoame reciproce de gradul n, respectiv m. Atunci

$$\left.\begin{aligned} P\left(\frac{1}{x}\right) &= \frac{1}{x^n}P(x) \\ Q\left(\frac{1}{x}\right) &= \frac{1}{x^m}Q(x) \end{aligned}\right\} \quad (\forall)\ x \in \mathbf{C}\setminus\{0\},$$

de unde prin înmulțire

$$(PQ)\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^{n+m}}(PQ)(x)$$

și cum $n + m$ este gradul polinomului PQ, rezultă că acest polinom este reciproc.

c) Luăm $P(x) = x + 1$; atunci $P^n(x) = (x + 1)^n$ este reciproc; dar $(x + 1)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i x^i$ și atunci vom avea că

$$C_n^i = C_n^{n-i} \quad \text{pentru} \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

T$_1$ 30. *Să se rezolve în* $\mathbf{C}$ *ecuația*

$$\frac{x-a}{x+a} + \frac{x-b}{x+b} = x + \frac{x-a-c}{x+a+c} + \frac{x-b-c}{x+b+c}.$$

Numerele a, b, c *sînt reale, strict pozitive și distincte.*

L. Pîrșan, G. M. 2/1964

Soluție. Ecuația se mai poate scrie

$$\frac{x-a}{x+a}+1+\frac{x-b}{x+b}+1=x+\frac{x-a-c}{x+a+c}+1+\frac{x-a-c}{x+b+c}+1$$

sau

$$\frac{2x}{x+a}+\frac{2x}{x+b}=x+\frac{2x}{x+a+c}+\frac{2x}{x+b+c}$$

de unde $x_1=0$ și rămîne de rezolvat ecuația:

$$\frac{1}{x+a}+\frac{1}{x+b}-\frac{1}{x+a+c}-\frac{1}{x+b+c}=\frac{1}{2}$$

sau

$$\frac{b+c-a}{x^2+(a+b+c)\,x+ab+ac}+\frac{a+c-b}{x^2+(a+b+c)\,x+ab+bc}=\frac{1}{2}. \qquad (1)$$

Notînd $x^2+(a+b+c)\,x=t$ ecuația devine

$$\frac{b+c-a}{t+ab+ac}+\frac{a+c-b}{t+ab+bc}=\frac{1}{2}. \qquad (2)$$

Ecuația (2) este de-gradul al doilea în t cu soluțiile t_1 și t_2. Revenind la ecuația $x^2+(a+b+c)\,x=t_{1,2}$ obținem cele patru soluții ale ecuației (1).

T_1 31. *Să se demonstreze că oricare ar fi numerele pozitive x, y, z, t are loc inegalitatea:*

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{x+y+z}+\frac{y^2+z^2+t^2}{y+z+t}+\frac{z^2+t^2+x^2}{z+t+x}+\frac{t^2+x^2+y^2}{t+x+y}\geqslant$$
$$\geqslant x+y+z+t.$$

***, G. M.4/1965

Soluție. Se arată cu ușurință că $\frac{x^2+y^2+z^2}{x+y+z}\geqslant\frac{x+y+z}{3}$, se adună membru cu membru cele patru inegalități de acest tip și se obține inegalitatea din enunț.

T_1 32. *Să se rezolve ecuația*

$$(x^2+ax+b+c)\,(x^2+ax+b)\,(x^2+ax+b-c-1)+c(c+1)=0.$$

L. Pîrșan, G. M. 1/1965

Soluție. Notăm

$$x^2+ax+b=y \qquad (1)$$

și ecuația devine $y(y+c)(y-c-1)+c(c+1)=0$,

$(y-1)[y^2-c(c+1)]=0$, cu soluțiile $y_1=1$, $y_{2,3}=\pm\sqrt{c(c+1)}$.

Ținînd seama de (1) rezultă cele șase rădăcini ale ecuației date.

T_1 33. *Să se rezolve ecuația cu necunoscuta* $z\in\mathbf{C}$:

$$\sqrt[7]{\alpha+\sqrt[5]{z}}-\sqrt[7]{\beta+\sqrt[5]{z}}=\gamma.$$

I. Aiwas, G. M. vol. VII, 1901

Soluție. Notăm

$$\sqrt[7]{\alpha+\sqrt[5]{z}}=u;\quad -\sqrt[7]{\beta+\sqrt[5]{z}}=v.$$

Se deduce

$$\begin{cases}u+v=\gamma\\ u^7+v^7=\alpha-\beta.\end{cases}$$

Atunci

$$(u+v)^7=u^7+v^7+7uv(u^5+v^5)+21u^2v^2(u^3+v^3)+35u^3v^3(u+v)=\gamma^7,\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 7uv[(u^5+v^5)+3uv(u^3+v^3)+5\gamma u^2v^2]=\gamma^7-(\alpha-\beta). \qquad (1)$$

Însă $u^5+v^5=\gamma^5-5uv(u^3+v^3)-10u^2v^2\gamma$ și $u^3+v^3=\gamma^3-3\gamma uv$.

Notăm $uv=x$ și înlocuind în (1) rezultă că x este dat de ecuația

$$7x[\gamma^5-2\gamma^3x+\gamma x^2]=\gamma^7-(\alpha-\beta)\Leftrightarrow 7\gamma x(\gamma^2-x)^2=\gamma^7-(\alpha-\beta) \quad (2)$$

$$\text{Fie}\quad x(\gamma^2-x)^2=\delta\overset{(2)}{\Rightarrow}\delta=\frac{\gamma^7-(\alpha-\beta)}{7\gamma}.$$

Punînd $\gamma^2-x=\dfrac{1}{y}$ (pentru $\delta\neq 0$) ecuația (2) devine $y^3-\dfrac{\gamma^2}{\delta}y+\dfrac{1}{\delta}=0$, ecuație de forma $y^3+py+q=0$. Vor exista trei rădăcini y_1, y_2, y_3, ce corespund pentru x_1, x_2, x_3. Cunoscînd valoarea produsului uv se pot calcula u și v, ca rădăcini ale ecuației $t^2-\gamma t+(uv)=0$. Cunoscînd pe u deducem $z=(u^7-\alpha)^5$. Caz particular: $\alpha-\beta=\gamma^7$. Avem $\delta=0$ și cele trei valori ale lui x sînt: 0, γ^2 și γ^2; se deduce că u și v sînt rădăcinile uneia din ecuațiile $t^2-\gamma t=0$ ($u=0$ sau $u=\gamma$) sau $t^2-\gamma t+\gamma^2=0\left(u=\gamma\left(\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{i}\right)\right)$, apoi se găsește imediat z.

T_1 34. *Să se determine rădăcinile* x_1, x_2, x_3 *ale ecuației* $x^3+px+q=0$, *știind că* $\operatorname{arctg}x_1+\operatorname{arctg}x_2=\operatorname{arctg}x_3$.

Alexandru Angelescu, G. M. vol. IX, 1904

Soluție. Din relația $\operatorname{arctg} x_1 + \operatorname{arctg} x_2 = \operatorname{arctg} x_3$ avem, aplicînd tangetna:

$$\frac{x_1 + x_2}{1 - x_1 x_2} = x_3, \text{ iar din relațiile lui Viete:}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = p, \\ x_1 x_2 x_3 = -q. \end{cases}$$

Se obține $2x_3^2 + qx_3 = 0 \Rightarrow x_3 = 0$ sau $x_3 = -\frac{q}{2}$.

I) $x_3 = 0 \Rightarrow q = 0$; $x_1 = -x_2 = \sqrt{-p}$.

II) $x_3 = -\frac{q}{2} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1 + x_2 = \frac{q}{2} \\ x_1 x_2 = 2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x^2 - \frac{q}{2}x + 2 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{q}{4} \pm \sqrt{\frac{q^2}{16} - 2}$.

Între p și q există relația $x_1 x_2 + x_3(x_1 + x_2) = 2 - \frac{q^2}{4} = p$.

T$_1$ 35. *a, b, c fiind lungimile laturilor unui triunghi să se arate că oricare ar fi x real, avem*

$$a^2 \geqslant \frac{b^2}{ch^2 x} - \frac{c^2}{sh^2 x}.$$

N. Ciorănescu, G. M. vol. XLIII

Soluția I. Se pleacă de la inegalitatea

$$(b \operatorname{th} x - c \operatorname{cth} x)^2 \geqslant 0 \text{ și se obține succesiv}$$

$$b^2 \operatorname{th}^2 x + c^2 \operatorname{cth}^2 x - 2bc \geqslant 0;$$

$$b^2 \frac{\operatorname{ch}^2 x - 1}{\operatorname{ch}^2 x} + c^2 \frac{1 + \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x} - 2bc \geqslant 0;$$

$$\frac{b^2}{\operatorname{ch}^2 x} - \frac{c^2}{\operatorname{sh}^2 x} \leqslant (b - c)^2.$$

Dar $b - c \leqslant a$ implică $\frac{b^2}{\operatorname{ch}^2 x} - \frac{c^2}{\operatorname{sh}^2 x} \leqslant a^2$.

Soluția II. Inegalitatea devine

$$a^2 \operatorname{ch}^2 x \operatorname{sh}^2 x \geqslant b^2 \operatorname{sh}^2 x - c^2 \operatorname{ch}^2 x$$

sau, înlocuind $\operatorname{ch}^2 x = 1 + \operatorname{sh}^2 x$, obținem:

$$a^2 \operatorname{sh}^4 x + (a^2 - b^2 + c^2) \operatorname{sh}^2 x + c^2 \geqslant 0. \tag{1}$$

Avem $\Delta = (a^2 - b^2 + c^2)^2 - 4a^2c^2 = [a^2 + c^2 - b^2 - 2ac][a^2 + c^2 - b^2 + 2ac] = [(a + c)^2 - b^2][(a - c)^2 - b^2] = (a + b + c)(a + c - b)(a - c - b)(a - c + b) = -(a + b + c)(a + c - b)(c + b - a)(a + b - c) = -2^4 S^2$, unde pentru ultima egalitate s-a aplicat formula lui Heron pentru aria unui triunghi.

Dar $-2^4 S^2 < 0$, deci $\Delta < 0$ și deoarece $a^2 > 0$, rezultă că inegalitatea (1) este adevărată.

Observație. Din relația $\left(\frac{b}{a \operatorname{ch} x}\right)^2 - \left(\frac{c}{a \operatorname{sh} x}\right)^2 = 1$

deducem $b = a \operatorname{ch} x \operatorname{ch} u$, $c = a \operatorname{sh} x \operatorname{sh} u$.

Din relația $a \geqslant b - c$ deducem $\operatorname{ch} x \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} x \operatorname{ch} u \leqslant 1$ sau $\operatorname{ch}(x - u) \leqslant 1$. Deoarece cosinusul hiperbolic nu poate fi mai mic ca unu rezultă $u = x$. Deci egalitatea nu poate avea loc decît pentru

$$b = a \operatorname{ch}^2 x; \quad c = a \operatorname{sh}^2 x.$$

T_1 36. *Să se arate că expresia*

$$E = \frac{\sin \alpha + \operatorname{tg} \alpha}{\cos \alpha + \operatorname{cotg} \alpha}$$

are totdeauna o valoare pozitivă.

Ioan C. Savin, G. M. vol. XLV

Soluția I. Calculînd rezultă

$$E = \frac{\sin \alpha + \operatorname{tg} \alpha}{\cos \alpha + \operatorname{ctg} \alpha} - \frac{\sin \alpha + \dfrac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}{\cos \alpha + \dfrac{\cos \alpha}{\sin \alpha}} = \frac{\sin \alpha \left(1 + \dfrac{1}{\cos \alpha}\right)}{\cos \alpha \left(1 + \dfrac{1}{\sin \alpha}\right)} =$$

$$= \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \frac{1 + \cos \alpha}{1 + \sin \alpha}.$$

Ținînd seama de relațiile $\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$; $1 + \cos x = 2\cos^2 \frac{x}{2}$ rezultă

$$E = \operatorname{tg}^2 \alpha \frac{2 \cos^2 \dfrac{\alpha}{2}}{2 \cos^2\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\alpha}{2}\right)} = \left[\frac{\operatorname{tg} \alpha \cos \dfrac{\alpha}{2}}{\cos\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\alpha}{2}\right)}\right]^2, \text{ deci } E \geqslant 0.$$

Soluția II. Cunoaștem următoarele relații:

$$\sin\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}};\quad \cos\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}};\quad \operatorname{tg}\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Înlocuind în expresia dată avem

$$E=\frac{\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}+\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}}{\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}+\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}}=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}+1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^4\frac{\alpha}{2}}}{\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right)}}=$$

$$=\frac{8\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{\left(1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)^2\left(1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)^2}\geqslant 0.$$

T$_1$ 37. *Să se calculeze suma* $\sum_{1=k}^{2n}(-1)^k\cos(2k-1)\,a$.

C. Ionescu-Țiu, **G. M.** 1956

Soluție. Notînd

$$S_1=\cos a+\cos 5a+\ldots+\cos(4n-3)\,a,$$
$$S_2=\cos 3a+\cos 7a+\ldots+\cos(4n-1)\,a,$$

vom avea

$$\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k\cos(2k-1)\,a=S_1-S_2.$$

Considerînd și sumele:

$$S_1'=\sin a+\sin 5a+\ldots+\sin(4n-3)\,a,$$
$$S_2'=\sin 3a+\sin 7a+\ldots+\sin(4n-1)\,a,$$

putem scrie:

$$S_1+\mathrm{i}S_1'=(\cos a+\mathrm{i}\sin a)\,\frac{(\cos a+\mathrm{i}\sin a)^{4n}-1}{(\cos a+\mathrm{i}\sin a)^4-1}=$$

$$=\frac{\cos(2n-1)\,a\sin 2na}{\sin 2a}+\mathrm{i}\,\frac{\sin(2n-1)\,a\cdot\sin 2na}{\sin 2\alpha}.$$

Deci

$$S_1 = \frac{\cos(2n-1)\,a \sin 2na}{\sin 2a} \quad \text{și analog, calculînd } S_2 + iS_2' \text{ găsim}$$

$$S_2 = \frac{\cos(2n+1)\,a \cdot \sin 2na}{\sin 2a}.$$

Avem

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \cos(2k-1)\,a = S_2 - S_1 = \frac{\cos(2n+1)\,a \sin 2na}{\sin 2a} -$$

$$- \frac{\cos(2n-1)\,a \sin 2na}{\sin 2a} = -\frac{\sin^2 2na}{2\cos a}.$$

Analog se poate stabili că

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \sin(2k-1)\,a = \frac{\sin 4na}{2\cos a}.$$

T$_1$38. *Să se rezolve ecuația*

$$(\sin x + \cos x)^{2n+1} + (\sin x - \cos x)^{2n+1} = 2^n\sqrt{2}\left[\cos^{2n-1}\left(x-\frac{\pi}{4}\right) + \right.$$

$$\left. + \sin^{2n-1}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right], \text{ unde } n \in \mathbf{N}^*.$$

Elena Flondor, G. M. 3/1965

Soluție. Avem $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ și $\sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$. Ecuația devine:

$$2^n\sqrt{2}\cdot\left[\cos^{2n+1}\left(x-\frac{\pi}{4}\right) + \sin^{2n+1}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right] = 2^n\sqrt{2}\left[\cos^{2n-1}\left(x-\frac{\pi}{4}\right) + \right.$$

$$\left. + \sin^{2n-1}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right],$$

care se mai scrie și astfel:

$$\cos^{2n-1}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\left[\cos^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right) - 1\right] = \sin^{2n-1}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\left[-\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right) + 1\right]$$

sau

$$\cos^{2n-3}\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = -\sin^{2n-3}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$$

adică

$$\operatorname{tg}^{2n-3}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-1 \text{ cu soluția } x=k\pi,\ k\in\mathbf{Z}.$$

T$_1$ 39. *Să se rezolve ecuația*
$\sin nx+\cos nx=\sin(n+1)x-\cos(n+1)x$, *unde numărul* $n\in\mathbf{N}$ *este fixat.*

Eugen Popa, G. M. 2/1965

Soluție. Ecuația se mai scrie

$$\sin(n+1)x-\sin nx=\cos(n+1)x+\cos nx$$

sau

$$2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{(2n+1)x}{2}=2\cos\frac{x}{2}\cos\frac{(2n+1)x}{2}$$

de unde

$$\cos\frac{(2n+1)x}{2}=0 \quad \text{sau} \quad \sin\frac{x}{2}=\cos\frac{x}{2}.$$

Soluțiile primei ecuații sînt $x=\dfrac{(2k+1)\pi}{2n+1}$, cu $k\in\mathbf{Z}$.
Din ecuația a doua rezultă soluțiile:

$$x=\frac{(4k+1)\pi}{2}, \text{ cu } k\in\mathbf{Z}.$$

T$_1$ 40. *Să se arate că*

$$\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)\cos k\alpha=\frac{\sin^2\frac{n\alpha}{2}}{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}-\frac{n}{2}$$

unde $n\in\mathbf{N}$, $n>2$ *și* $\alpha\neq 2k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$.

Liviu Pîrșan, G. M. 4/1965

Soluție. Vom demonstra prin metoda inducției matematice.
Pentru $n=2$ avem de arătat

$$\cos\alpha=\frac{\sin^2\alpha}{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}-1 \Leftrightarrow 2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1=2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1, \text{ deci se verifică.}$$

Considerăm că egalitatea

$$\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)\cos k\alpha=\frac{\sin^2\frac{n\alpha}{2}}{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}-\frac{n}{2} \quad (1) \text{ este adevărată}$$

și să arătăm că

$$\sum_{k=1}^{n}(n+1-k)\cos k\alpha = \frac{\sin^2\frac{(n+1)\alpha}{2}}{2\sin^2\frac{\alpha}{2}} - \frac{n+1}{2}. \quad (2)$$

Scăzînd (1) din (2) obținem

$$\sum_{k=1}^{n}\cos k\alpha = \frac{\sin^2\frac{(n+1)\alpha}{2} - \sin^2\frac{n\alpha}{2}}{2\sin^2\frac{\alpha}{2}} - \frac{1}{2}.$$

Făcînd calculele în membrul al doilea se ajunge la egalitatea cunoscută:

$$\sum_{k=1}^{n}\cos k\alpha = \frac{\sin\frac{(2n+1)\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}} - \frac{1}{2};$$

Cum (1) este adevărată, înseamnă că și (2) va fi adevărată ceea ce trebuia demonstrat.

T$_1$ 41. *Să se calculeze produsul*

$$\prod_{k=1}^{n}\left(2\cos\frac{x}{2^k} - 1\right).$$

Mihai Alexandru, G. M. 12/1978

Soluție. Avem

$$2\cos\frac{\alpha}{2} - 1 = \frac{\left(2\cos\frac{\alpha}{2} - 1\right)\left(2\cos\frac{\alpha}{2} + 1\right)}{2\cos\frac{\alpha}{2} + 1} = \frac{4\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1}{2\cos\frac{\alpha}{2} + 1} = \frac{2\cos\alpha + 1}{2\cos\frac{\alpha}{2} + 1}.$$

Făcînd $\alpha = x$, $\alpha = \frac{x}{2}$, ..., $\alpha = \frac{x}{2^{n-1}}$ și înmulțind cele n egalități se obține

$$\prod_{k=1}^{n}\left(2\cos\frac{x}{2^k} - 1\right) = \frac{2\cos x + 1}{2\cos\frac{x}{2^n} + 1}.$$

T$_1$ 42 *Să se transforme în produs expresia*

$$E = \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x - 3\operatorname{tg} 3x.$$

Gh. D. Simionescu, G. M, 8/1963

Soluție. Avem

$$E = \frac{\sin 3x}{\cos x \cos 2x} - \frac{3 \sin 3x}{\cos 3x} =$$

$$= \sin 3x \frac{(\cos x \cos 2x - \sin x \sin 2x) - 3 \cos x \cos 2x}{\cos x \cos 2x \cos 3x} =$$

$$= \operatorname{tg} 3x \frac{-\sin x \sin 2x - 2 \cos x \cos 2x}{\cos x \cos 2x} =$$

$$= \operatorname{tg} 3x \frac{(-\sin x \sin 2x - \cos x \cos 2x) - \cos x \cos 2x}{\cos x \cos 2x} =$$

$$= -\operatorname{tg} 3x \frac{\cos x + \cos x \cdot \cos 2x}{\cos x \cos 2x} = -\operatorname{tg} 3x \frac{1 + \cos 2x}{\cos 2x} =$$

$$= -2 \cos^2 x \cdot \frac{\operatorname{tg} 3x}{\cos 2x}.$$

T_1 43. *Dacă u, v, w sînt trei numere reale oarecare, atunci*

$$1 + \cos u \cos v + \cos v \cos w + \cos w \cos u \geqslant 0.$$

În ce caz avem egalitate? Să se deducă de aici, că egalitatea nu poate avea loc cînd u, v, w sînt măsurile unghiurilor unui triunghi.

Mihail Ghermănescu, G. M. 5/1947

Soluție. Să notăm $\cos u = x$, $\cos v = y$, $\cos w = z$, deci x, y, z sînt numere reale de modul mai mic sau cel mult egal cu unitatea. Avem de considerat cîteva cazuri distincte.

1) Cel puțin unul din numerele x, y, z este nul, fie de exemplu $x = 0$. Inegalitatea devine $1 + yz \geqslant 0$, care este evidentă, egalitatea avînd loc pentru $y = 1$, $z = -1$ sau $y = -1$, $z = 1$. Așadar egalitatea în acest caz se atinge pentru:

$$\begin{cases} u = \dfrac{\pi}{2} + k_1\pi, \quad k_1 \in \mathbf{Z} \\ v = 2k_2\pi, \quad k_2 \in \mathbf{Z} \\ w = (2k_3 + 1)\pi, \quad k_3 \in \mathbf{Z} \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} u = \dfrac{\pi}{2} + k_1\pi, \quad k_1 \in \mathbf{Z} \\ v = (2k_2 + 1)\pi, \quad k_2 \in \mathbf{Z} \\ w = 2k_3\pi, \quad k_3 \in \mathbf{Z} \end{cases}$$

(și analoagele).

2) Toate numerele $x.y$, z sînt strict pozitive sau toate numerele x, y, z, sînt strict negative. În acest caz inegalitatea este evidentă, fără a avea posibilitatea de egalitate.

3) Unul dintre numerele x, y, z este strict negativ și celelalte două sînt strict pozitive, fie de exemplu $x < 0$, $y > 0$, $z > 0$.

Din inegalitatea evidentă $(y-1)(1-z) \leqslant 0$ deducem

$$y+z-(1+yz) \leqslant 0 \text{ sau } 1-\frac{1+yz}{y+z} \leqslant 0 \text{ sau } -\frac{1+yz}{y+z} \leqslant -1 \leqslant x$$

de unde $-(1+yz) \leqslant xy+xz$, adică tocmai inegalitatea din enunț. Egalitate avem dacă și numai dacă $(y-1)(1-z)=0$ și $-1=x$ adică dacă și numai dacă $x=-1$ și ($y=1$ sau $z=1$). Altfel spus, egalitatea se atinge în acest caz pentru:

$$\begin{cases} u=(2k_1+1)\pi, & k_1 \in \mathbf{Z} \\ v=2k_2\pi, & k_2 \in \mathbf{Z} \text{ sau } w=2k_3\pi, \quad k_3 \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

(și analoagele).

4) Două din numerele x, y, z sînt strict negative și celălalt este strict pozitiv, fie de exemplu $y<0$, $z<0$, $x>0$.

Din inegalitatea evidentă $(y+1)(z+1) \geqslant 0$ obținem $y+z+1+yz \geqslant 0$ sau $1+\frac{1+yz}{y+z} \leqslant 0$ sau $-\frac{1+yz}{y+z} \geqslant 1 \geqslant x$, de unde $-(1+yz) \leqslant yx+xz$, care este tocmai inegalitatea din enunț.

Egalitate avem dacă și numai dacă $(y+1)(z+1)=0$ și $1=x$, adică dacă și numai dacă $x=1$ și ($y=-1$ sau $z=-1$).

Altfel spus, egalitatea se atinge în acest caz pentru

$$\begin{cases} u=2k_1\pi, & k_1 \in \mathbf{Z}, \\ v=(2k_2+1)\pi, & k_2 \in \mathbf{Z} \quad \text{sau} \quad w=(2k_3+1)\pi, \quad k_3 \in \mathbf{Z} \end{cases}$$

(și analoagele).

Cele patru cazuri epuizează problema.

Dacă u, v, w sînt măsurile unghiurilor unui triunghi, avem $u>0$, $v>0$, $w>0$ și $u+v+w=\pi$, situație care nu se poate încadra în nici unul din cazurile în care avem egalitate. Cu aceasta problema este rezolvată.

T$_1$ 44. *Fie* $M \in |BC|$, ABC *triunghi și fie* $MP \perp AC$, $MQ \perp AB$, $P \in |AC|$, $Q \in |AB|$.

1) *Să se exprime* $\sigma[MPQ]$ *în funcție de* $\|MP\| = x$ *și elementele triunghiului* ABC;

2) *Să se exprime* $\sigma[MPQ]$ *în funcție de raportul* $\frac{\|MP\|}{\|MQ\|} = t$ *și de elementele triunghiului* ABC;

3) *Să se demonstreze că există pe* $|BC|$ *două puncte* M *pentru care aria triunghiului* MPQ *are o valoare dată. Să se arate că aceste puncte sînt simetrice față de mijlocul lui* $|BC|$;

4) *Să se determine punctul* M *pentru care* $\sigma[MPQ]$ *este maximă.*

D. V. Ionescu, G. M. vol. **XXXVII**, 1931–1932

Soluție. 1) Fie $\|MP\| = x$; $\|MQ\| = y$. Notăm $\Sigma = \sigma[MPQ]$ și $S = \sigma[ABC]$. Avem

$$2\Sigma = xy \sin A, \quad \text{deoarece} \quad \mu(\hat{A}) + \mu(\overset{\frown}{PMQ}) = \pi, \tag{1}$$

$$bx + cy = 2S. \tag{2}$$

Eliminînd y utilizînd (1) și (2), rezultă

$$\Sigma = \frac{S \sin A}{c} x - \frac{b \sin A}{2c} x^2. \tag{3}$$

2) Fie:

$$t = \frac{x}{y}. \tag{4}$$

Eliminînd între (1), (2) și (4) pe x și pe y rezultă Σ în funcție de t. Astfel, (4) se mai scrie

$$\frac{x}{t} = \frac{y}{1} = \frac{bx + cy}{bt + c} \overset{(2)}{=} \frac{2S}{bt + c},$$

sau

$$\Sigma = 2S^2 \cdot \frac{t}{(bt + c)^2} \sin A.$$

3) Fie $u = \dfrac{\|MC\|}{\|MT\|}$; încercăm să exprimăm pe Σ în funcție de u. Se observă că $x = \|MC\| \sin C$; $y = \|MB\| \sin B$, deci

$$t = u \frac{\sin C}{\sin B} = \frac{c}{b} u.$$

Rezultă

$$\Sigma = \frac{2S^2 \sin A}{bc} \cdot \frac{u}{(u + 1)^2}.$$

Să presupunem că Σ este dat; punctele M care îi corespund lui Σ sînt date de ecuația

$$\frac{u}{(u + 1)^2} = \frac{1}{m} \quad \text{pentru} \quad m = \frac{2S^2 \sin A}{bc}. \tag{6}$$

Relația (6) se mai scrie $u^2 + (2 - m)u + 1 = 0$, care este o ecuație de gradul al doilea, deci pe $|BC|$ există două puncte M', M'' cărora le corespund arii egale cu Σ.

Cum $u_1 u_2 = 1$ rezultă $\dfrac{\|M'B\|}{\|M'C\|} \cdot \dfrac{\|M''B\|}{\|M''C\|} = 1$, deci M', M'' sînt simetrice față de mijlocul lui $|BC|$.

4) Maximul lui $\sum$ are loc odată cu maximul funcției

$$f(u) = \frac{u}{(u+1)^2} = \frac{1}{4} - \frac{(u-1)^2}{4(u+1)^2}.$$

Rezultă că maximul are loc pentru $u = 1$ și valoarea maximă a lui $f(u)$ este $1/4$.
Maximul lui $\sum$ este deci

$$\sum_{max} = \frac{S^2 \sin A}{2bc}$$

Punctul M care corespunde lui $u = 1$ este mijlocul lui $|BC|$.

T$_1$ 45. *Se dau în planul triunghiului ABC trei puncte M, N, P astfel ca să avem:*

$$m(\widehat{BAM}) = m(\widehat{MAP}) = m(\widehat{PAC}) = \alpha,$$

$$m(\widehat{ABM}) = m(\widehat{MBN}) = m(\widehat{NBC}) = \beta,$$

$$m(\widehat{BCN}) = m(\widehat{NCP}) = m(\widehat{PCA}) = \gamma.$$

Fie M', N', P' punctele determinate de intersecțiile perechilor de drepte (BN, AP); (CP, BM); (AM, CN). Dreptele MM', NN', PP' taie dreptele AB, BC, CA respectiv în punctele M'', N'', P''. Să se arate că dreptele AN'', BP'', CM'' sînt concurente.

O. N. Țino, G. M. vol. XLIII

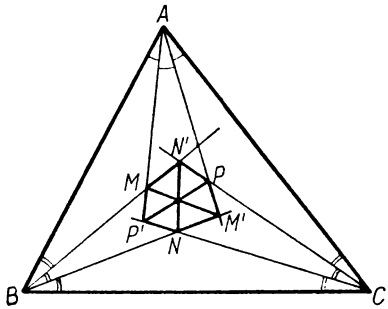


Fig. T$_1$ 45

Soluție. Dreptele AM și MB fiind în triunghiul $AM'B$ bisectoarele unghiurilor $\widehat{A}$ și $\widehat{B}$, dreapta MM' este a treia bisectoare interioară a triunghiului (fig. T$_1$ 45), deci aplicînd proprietatea metrică a bisectoarei avem

$$\frac{\|M''A\|}{\|M''B\|} = \frac{\|M'A\|}{\|M'B\|}$$; în același triunghi avem

$$\frac{\|M'A\|}{\|M'B\|} = \frac{\sin 2\beta}{\sin 2\alpha}, \quad \text{deci} \quad \frac{\|M''A\|}{\|M''B\|} = \frac{\sin 2\beta}{\sin 2\alpha}.$$

În mod analog avem

$$\frac{\|N''B\|}{\|N''C\|} = \frac{\sin 2\gamma}{\sin 2\beta}, \quad \frac{\|P''C\|}{\|P''A\|} = \frac{\sin 2\alpha}{\sin 2\gamma}.$$

Înmulțind cele trei relații se obține

$$\frac{\|M''A\|}{\|M''B\|}\cdot\frac{\|N''B\|}{\|N''C\|}\cdot\frac{\|P''C\|}{\|P''A\|}=1.$$

Deci M'', N'', P'' în triunghiul ABC sînt, conform teoremei lui Ceva, picioarele a trei ceviene concurente, de unde rezultă proprietatea enunțată.

$T_1$46. *Se dă un unghi drept $\widehat{xOy}$. Un triunghi isoscel variabil MON ($|MO|\equiv|MN|$) este situat astfel încît $M\in Int\,\widehat{xOy}$, vîrful O este fix și baza $|ON|$ este inclusă în Ox; în plus raza cercului înscris în triunghi are o valoare constantă r. Să se demonstreze că bisectoarea unghiului $\widehat{ONM}$ trece printr-un punct fix situat pe Oy și că dreapta MN rămîne tangentă unui cerc fix.*

G. M. 1/1957

Soluție. Fie O_1 centrul cercului înscris în triunghiul OMN și L punctul de tangență cu dreapta ON (fig. T_1 46). Cercul O_1, avînd rază fixă $\|O_1L\|=r$, triunghiurile NO_1L și NOA sînt asemenea ($\{A\}=NO_1\cap Oy$) iar $\|AO\|=2r$, deci bisectoarea OA trece prin punctul fix A situat pe Oy. Fie AB perpendiculara din A pe MN. Rezultă $\|AB\|=\|AO\|=2r$, deci MN rămîne tangentă cercului fix cu centrul în A și de rază $2r$.

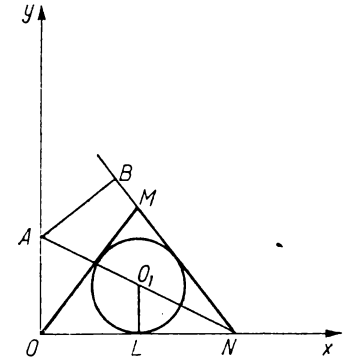


Fig. $T_1$46

T_1 47. *Fie m_a lungimea medianei din vîrful A în triunghiul ABC cu laturile de lungimi a, b, c. Să se arate că*

$$bc-\frac{a^2}{4}\leqslant m_a^2\leqslant bc+\frac{a^2}{4}.$$

N. N. Mihăileanu, G. M. 8/1956

Soluție. Din relațiile $m_a^2=(b^2+c^2)/2-a^2/4$ și $(b^2+c^2)/2\geqslant bc$ obținem $m_a^2\geqslant bc-a^2/4$. Scriem altfel lungimea medianei: $m_a^2=(b^2+c^2-a^2)/2+a^2/4$. Dar $bc\cos A=(b^2+c^2-a^2)/2$ și $\cos A\leqslant 1$, deci $(b^2+c^2-a^2)/2\leqslant bc$. Rezultă inegalitatea $m_a^2\leqslant bc+a^2/4$.

T_1 48. *În interiorul triunghiului oarecare ABC se ia punctul O, din care se duc paralele la laturile triunghiului. Fie s, p, q respectiv lungimile segmentelor obținute din intersecția paralelelor duse din O la BC, AB și AC cu interiorul triunghiului. Să se demonstreze relația $\frac{s}{a}+\frac{q}{b}+\frac{p}{c}=2$.*

G. M. 12/1958

Soluție. Avem $s = \|OC_1\| + \|OB_1\|$, $p = \|OA_1\| + \|OB_2\|$, $q = \|OC_2\| + \|OA_2\|$, punctele A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 fiind cele din fig. T_1 48.

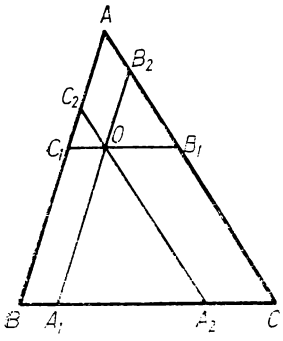


Fig. T_1 48

Din asemănarea triunghiurilor OA_1A_2, OB_1B_2, OC_1C_2 cu ABC obținem:

$$\frac{\|OA_1\|}{c} = \frac{\|OA_2\|}{b} = \frac{\|A_1A_2\|}{a}; \quad \frac{\|OB_1\|}{a} = \frac{\|OB_2\|}{c} = \frac{\|B_1B_2\|}{b} \text{ și}$$

$$\frac{\|OC_1\|}{a} = \frac{\|OC_2\|}{b} = \frac{\|C_1C_2\|}{c}$$ de unde deducem:

$$\frac{s}{a} = \frac{\|OC_2\| + \|B_1B_2\|}{b}; \quad \frac{q}{b} = \frac{\|OC_1\| + \|A_1A_2\|}{a}; \quad \frac{p}{c} = \frac{\|OA_2\|}{b} + \frac{\|OB_1\|}{a}.$$

Adunînd aceste egalități, obținem $\frac{s}{a} + \frac{q}{b} + \frac{p}{c} = 2$.

T_1 49. *Dacă într-un triunghi pătratele lungimilor laturilor sînt în progresie aritmetică în ordinea a^2, b^2, c^2, atunci măsura unghiului $\hat{B}$ poate fi cel mult egală cu 60°.*

M. Gheorghiu, G. M. 3/1958

Soluție. Avem $2b^2 = a^2 + c^2$. De asemenea $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$. Obținem $\frac{1}{4}\left(\frac{a^2 + c^2}{ac}\right) = \cos B$.

Trebuie arătat că:

$$\cos B \geqslant \cos 60° \Leftrightarrow \frac{1}{4}\left(\frac{a^2 + b^2}{ac}\right) \geqslant \frac{1}{2}$$

sau $(a - c)^2 \geqslant 0$, care este adevărată pentru orice a și c reale. Egalitate avem pentru $a = c$.

T_1 50. *Să se arate că dacă din cele 3 centre ale cercurilor exînscrise unui triunghi ducem perpendicularele pe laturile respective, ele sînt concurente în centrul cercului circumscris triunghiului format cu aceste centre.*

* * *, G. M. 2/1955

Soluție. Fie I centrul cercului înscris în triunghiul ABC, I_1, I_2, I_3 centrele cercurilor exînscrise.

I_1A, I_2B, I_3C sînt înălțimile în triunghiul $I_1I_2I_3$, iar ABC este triunghiul ortic. Într-un triunghi razele cercului circumscris duse prin vîrful triunghiului sînt perpendiculare pe laturile triunghiului ortic. Deci perpendicularele pe laturi sînt raze în cercul $I_1I_2I_3$.

T_1 51. *În triunghiul ABC se iau punctele α și β situate pe latura $|BC|$, simetrice față de mijlocul acestei laturi. Notînd cu θ măsura unghiului $\widehat{BA\alpha}$ și cu ω măsura unghiului $\widehat{CA\beta}$, să se demonstreze relația*

$$\frac{b^2}{c^2} = \frac{\sin\theta \sin(A-\omega)}{\sin\omega \sin(A-\theta)}.$$

* * *, G. M. 12/1958

Soluție. Aplicînd teorema sinusului avem:

$$\frac{\|\beta B\|}{c} = \frac{\sin(A-\omega)}{\sin(C+\omega)} \quad \text{(în triunghiul } AB\beta);$$

$$\frac{\|B\alpha\|}{c} = \frac{\sin\theta}{\sin(B+\theta)} \quad \text{(în triunghiul } AB\alpha);$$

$$\frac{b}{\|C\alpha\|} = \frac{\sin(B+\theta)}{\sin(A-\theta)} \quad \text{(în triunghiul } AC\alpha);$$

$$\frac{b}{\|BC\|} = \frac{\sin(C+\omega)}{\sin\omega} \quad \text{(în triunghiul } AC\beta).$$

Prin înmulțirea acestor relații și ținînd seama că $\|B\beta\| = \|C\alpha\|$ și $\|B\alpha\| = \|C\beta\|$ obținem relația din enunț.

T_1 52. *Se dă un cerc cu centrul O și de rază R și un punct M la distanță d de centrul cercului, situat pe diametrul $|AB|$.*

În jurul punctului M se rotesc două coarde perpendiculare $|P'P|$ și $|T'T|$.

Notăm cu S aria triunghiului PMT și cu S' aria triunghiului $P'MT'$.

1) *Să se calculeze în funcție de R și d produsul $S'S$.*

2) *Cercul circumscris triunghiului PMT poate fi tangent la AB. În caz afirmativ să se arate că $T'P' \| AB$.*

* * *, G. M. 1/1957

Soluție.

$$S \cdot S' = \frac{\|MP'\| \cdot \|MT'\| \cdot \|MP\| \cdot \|MT\|}{4};$$

dar $\|PM\| \cdot \|MP'\| = \|MT'\| \cdot \|MT\| = (R + d)(R - d)$, deci $SS' =$

$$= \frac{(R^2 - d^2)^2}{4}.$$

2) Cercul circumscris triunghiului PMT are centrul în punctul L, mijlocul lui $|PT|$. Notăm $LM \cap P'T' = \{N\}$.
Cercul cerut este tangent la AB cînd $ML \perp AB$. În acest caz, din asemănarea triunghiurilor $P'NM$ și PMT și a triunghiurilor $T'NM$ și PMT reiese că $m(\widehat{P'NM}) = m(\widehat{T'NM}) = 90°$. Dar $NL \perp AM \Rightarrow AB \parallel T'P'$.

T_1 53. *Se dau două cercuri tangente exterioare. Unim mijlocul A al tangentei comune $|TS|$ cu centrele O și O' astfel ca dreptele formate să taie cercul de centru O în M și B, iar cercul de centru O' în N și C. Să se demonstreze asemănarea triunghiurilor ABC și AMN.*

Radu Ionescu, G. M. 1956

Soluție. Exprimăm puterea punctului A față de cele două cercuri (fig. T_1 53):

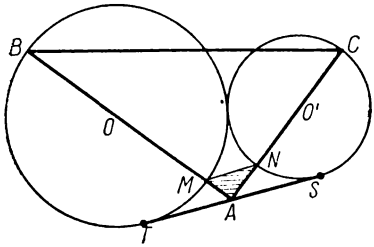


Fig. T_1 53

$$\|AM\| \cdot \|AB\| = \|AT\|^2,$$

$$\|AN\| \|AC \cdot \| = = \|AS\|^2.$$

Cum A este mijlocul lui $|TS|$ avem $\|AM\| \cdot \|AB\| = \|AN\| \cdot \|AC\|$ sau $\frac{\|AM\|}{\|AC\|} = \frac{\|AN\|}{\|AB\|}$.
Triunghiurile avînd și un unghi comun sînt asemenea.

T_1 54. *Într-un dreptunghi $ABCD$ bisectoarea unghiului $\widehat{BAD}$ taie diagonala $|BD|$ în E iar latura $|BC|$ în F. Știind că paralela dusă din E la AB taie pe AC în G, să se arate că dreptele GF și BD sînt perpendiculare.*

Ion Strătescu, G. M. 12/1958

Soluție. (fig. T_1 54). Fie $\{I\} = AF \cap BG$. Cum $\|AO\| = \|BO\|$ și $GE \| AB$, rezultă că $ABEG$ este trapez isoscel. Avem $m(\widehat{BAF}) = 45°$ și deci $m(\widehat{AIB}) = 90°$.

Obținem $IF \perp BG$ și cum $GE \perp BF$, rezultă că E este ortocentrul triunghiului GBF și deci $BD \perp GF$.

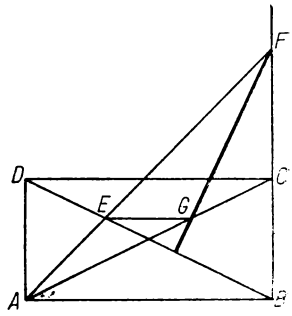


Fig. T_1 54

T_1 55. *Bisectoarea unghiului $\hat{B}$ a unui triunghi ABC dreptunghic în A întîlnește respectiv înălțimea AD și mediana AM în F și E. Să se stabilească relația* $\|AE\| \cdot \|AF\| = 2\|EM\| \cdot \|DF\|$.

G. M. 4/1956

Soluție. Aplicînd teorema bisectoarei în triunghiurile ABD și ABM avem:

$$\frac{\|AE\|}{\|EM\|} = \frac{\|AB\|}{\|BD\|}, \quad \frac{\|AF\|}{\|FD\|} = \frac{\|AB\|}{\|BD\|}.$$

Înmulțind aceste relații și ținînd seama că $\|BC\| = 2\|BM\|$ și $\|AB\|^2 = \|BD\| \|BC\|$ avem relația din enunț.

T_1 56. *Proiecțiile ortogonale ale punctului de intersecție a diagonalelor unui patrulater inscriptibil pe laturile sale împart aceste laturi în rapoarte, al căror produs este egal cu unitatea.*

Theodor Gh. Cocea, G. M. 11/1956

Soluție. Deci, cu notațiile din figura T_1 56 trebuie să demonstrăm că:

$$\frac{\|AN\|}{\|BN\|} \cdot \frac{\|BP\|}{\|CP\|} \cdot \frac{\|CQ\|}{\|DQ\|} \cdot \frac{\|DM\|}{\|MA\|} = 1.$$

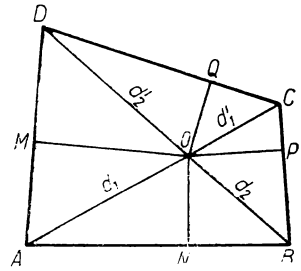


Fig. T_1 56

Triunghiul ANO este asemenea cu triunghiul DQO deci $\frac{\|AN\|}{\|DQ\|} = \frac{d_1}{d_2'}$. Analog obținem

$$\frac{\|BP\|}{\|MA\|} = \frac{d_2}{d_1}; \quad \frac{\|CQ\|}{\|NB\|} = \frac{d_1'}{d_2}; \quad \frac{\|DM\|}{\|CP\|} = \frac{d_2'}{d_1'}.$$

Prin înmulțirea acestor relații se obține relația din enunț.

T_1 57. *Dacă intersecția diagonalelor unui patrulater inscriptibil $ABCD$ este mijlocul diagonalei $|BD|$, atunci există relația*

$$\|AB\|^2 + \|BC\|^2 + \|CD\|^2 + \|DA\|^2 = 2\|AC\|^2.$$

Stelian Lambă, G. M. 8/1956

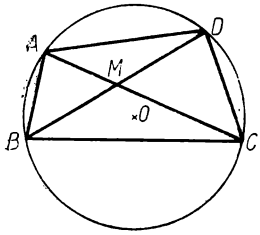


Fig. T_1 57

Soluție. AM și MC fiind mediane (fig. T_1 57) avem

$$\| AM \|^2 = \frac{\| AB \|^2 + \| AD \|^2}{2} - \frac{\| BD \|^2}{4}, \qquad (1)$$

$$\| CM \|^2 = \frac{\| BC \|^2 + \| CD \|^2}{2} - \frac{\| BD \|^2}{4}. \qquad (2)$$

Aplicînd puterea punctului M față de cerc avem

$$2 \| AM \| \cdot \| CM \| = 2 \frac{\| BD \|^2}{4}. \qquad (3)$$

Adunînd relațiile (1), (2), (3) avem:

$$(\| AM \| + \| MC \|)^2 = \frac{\| AB \|^2 + \| BC \|^2 + \| CD \|^2 + \| AD \|^2}{2}.$$

De aici obținem relația din enunț pentru că $\| AM \| + \| MC \| = \| AC \|$.

T_1 58. *Dacă O și I sînt respectiv centrele cercurilor circumscris și înscris unui triunghi iar I_a, I_b, I_c centrele cercurilor exînscrise să se arate că*

$$\| OI_a \|^2 + \| OI_b \|^2 + \| OI_c \|^2 - \| OI \|^2 = 10R^2 + 4Rr.$$

N. Abramescu, G. M. vol. XI

Soluție. Avem relațiile cunoscute $\| OI \|^2 = R(R - 2r)$; $\| OI_a \|^2 = R(R + 2r_a)$ și celelalte două analoage; $r_a + r_b + r_c - r = 4R$, unde ca de obicei R este raza cercului circumscris, r raza cercului înscris, r_a, r_b, r_c razele cercurilor exînscrise. Atunci, avem

$$\| OI_a \|^2 + \| OI_b \|^2 + \| OI_c \|^2 - \| OI \|^2 = R(R + 2r_a + R + 2r_b + R +$$

$$+ 2r_c - R + 2r) = 2R^2 + 2R(r_a + r_b + r_c + r) = 2R^2 + 2R(4R + 2r) =$$

$$= 10R^2 + 4Rr.$$

T_1 59. *Să se demonstreze că între elementele unui triunghi oarecare avem relația*

$$(b + c)(r_a - R) + (c + a)(r_b - R) + (a + b)(r_c - R) = 4S.$$

V. Thébault, G. M. vol. XLII

Soluție. Membrul întîi al relației se scrie succesiv:

$$E = \sum(b + c)\, r_a - R\sum(b + c) = \sum(2p - a)\, r_a - 4pR =$$

$$= 2p\sum r_a - \sum a r_a - 4pR.$$

Dar $r_a + r_b + r_c = 4R + r$ și $ar_a + br_b + cr_c = 2p(2R - r)$, deci $E = 2p(4R + r) - 2p(2R - r) - 4pR = 4pr = 4S$.

T_1 60. *Dacă a, b, c, d sînt lungimile laturilor consecutive ale unui patrulater convex și dacă S este aria lui, să se demonstreze că*

$$S \leqslant \frac{1}{4}(a + b)(c + d).$$

Olimpiada de matematică, Moscova, G. M. 6/1959

Soluție. Dacă $ABCD$ este patrulaterul cu $\|AB\| = a$, $\|BC\| = b$, $\|CD\| = c$, $\|DA\| = d$ și $A + C = \theta$, atunci se știe că aria lui este dată de formula:

$$\sigma[ABCD] = \sqrt{(p - a)(p - b)(p - c)(p - d) - abcd\, \cos^2 \frac{\theta}{2}}, \qquad (1)$$

unde $2p = a + b + c + d$. Aplicînd (1) avem

$$\sigma[ABCD] \leqslant \sqrt{(p - a)(p - b)(p - c)(p - d)} =$$

$$= \sqrt{(p - a)(p - b)} \cdot \sqrt{(p - c)(p - d)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}(2p - a - b) \cdot \frac{1}{2}(2p - c - d) = \frac{(a + b)(c + d)}{4}.$$

Am ținut seama că dacă $u, v > 0$, atunci $\sqrt{uv} \leqslant \frac{1}{2}(u + v)$.

T_1 61. *Se dă mulțimea de piramide triunghiulare, care au ca bază comună un triunghi dreptunghic ABC ($m(\widehat{A}) = 90°$), de laturi a, b, c, iar vîrfurile M, situate pe semidreapta Az perpendiculară pe bază.*
Notăm cu α, β, γ respectiv măsurile unghiurilor formate de muchiile $|MB|$, $|MC|$ și de fața $[MBC]$ cu planul bazei. Din această mulțime se consideră două piramide pentru care avem respectiv:

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi \quad \text{și} \quad \alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}.$$

Să se arate că între volumele lor V_1 și V_2 avem relația

$$\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^2 = \frac{(a+b+c)(ab+bc+ca)}{abc}.$$

Gh. Bazacov, G. M. 11/1963

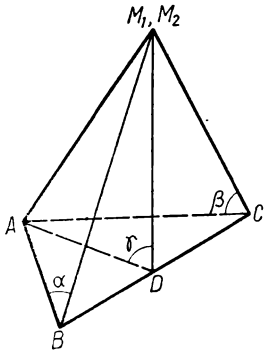


Fig. T_1 61

Soluție. (fig. T_1 61). Dacă $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, rezultă că

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\gamma. \qquad (1)$$

Fie M_1 vîrful primei piramide și notăm $\|M_1A\| = x$, $\|AD\| = h$, unde AD este înălțime în triunghiul ABC. Lungimile laturilor triunghiului ABC sînt a, b, c. Deci

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{x}{c}; \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{x}{b}; \quad \operatorname{tg}\gamma = \frac{x}{h}.$$

Relația (1) devine:

$$\frac{x}{b} + \frac{x}{c} + \frac{x}{h} = \frac{x^3}{bch} \Leftrightarrow ch + bh + bc = x^2.$$

Dar $bc = ah$, deci $x = \sqrt{h(a+b+c)}$.

Atunci, $V_1 = \frac{ah}{2} \cdot \frac{x}{3}$ sau $V_1 = \frac{h}{6}\sqrt{abc(a+b+c)}$.

Pentru pir mida a doua avem:

$$\alpha+\beta+\gamma = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\gamma \cdot \operatorname{tg}\alpha = 1. \qquad (2)$$

Înlocuind în (2) valorile tangentelor, obținem:

$$\frac{y^2}{bc} + \frac{y^2}{bh} + \frac{y^2}{hc} = 1 \text{ de unde } y = \sqrt{\frac{bch}{b+c+h}}. \text{ Dar } h = \frac{bc}{a},$$

$$\text{deci } y = \frac{bc}{\sqrt{ab+bc+ca}}.$$

Rezultă

$$V_2 = \frac{ah}{6} \cdot \frac{bc}{\sqrt{ab+bc+ca}}.$$

Deci

$$\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^2 = \frac{(a+b+c)(ab+bc+ca)}{abc}.$$

T_1 62. *Fie un punct O pe linia mijlocie paralelă cu latura $|BC|$ a triunghiului ABC. Dreptele BO și CO taie pe AC și AB în B' și C'. Să se arate că $\sigma[B'AC'] = 2\sigma[B'OC']$.*

Ion Strătescu, G. M. 7/1963

Soluție. Avem (fig. T_1 62):

$$\frac{\sigma[AB'C']}{\sigma[ABC]} = \frac{\|AB'\| \cdot \|AC'\|}{\|AB\| \cdot \|AC\|} \quad \text{și} \quad \frac{\sigma[B'OC']}{\sigma[BOC]} =$$

$$= \frac{\|B'O\| \cdot \|C'O\|}{\|BO\| \cdot \|CO\|}.$$

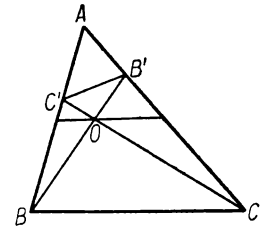


Fig. T_1 62

Cum $\sigma[BOC] = \frac{1}{2}\sigma[ABC]$ rămîne, pentru a demonstra relația cerută, să arătăm că:

$$\frac{\|AB'\| \cdot \|AC'\|}{\|AB\| \cdot \|AC\|} = \frac{\|B'O\| \cdot \|C'O\|}{\|BO\| \cdot \|CO\|}. \tag{1}$$

Scriind relația lui Menelaus pentru triunghiul ACC' și transversala BOB', avem

$$\frac{\|C'O\|}{\|CO\|} \cdot \frac{\|B'C\|}{\|AB'\|} \cdot \frac{\|AB\|}{\|BC'\|} = 1. \tag{2}$$

Aplicînd teorema lui Menelaus pentru triunghiul ABB' și transversala COC', avem

$$\frac{\|B'O\|}{\|BO\|} \cdot \frac{\|BC'\|}{\|AC'\|} \cdot \frac{\|AC\|}{\|B'C\|} = 1. \tag{3}$$

Înmulțind (2) cu (3) membru cu membru obținem (1).

T_1 63. *Se dau cercurile de centre O și O' tangente exterior în T și A un punct oarecare în planul cercurilor, situat în exteriorul lor. Tangenta comună exterioară a cercurilor este tăiată de dreptele AO, AO' respectiv în M și N. Să se arate că dreptele AT, ON, $O'M$ sînt concurente.*

Gruian Ștefan, G. M. 3/1963

Soluție. Va fi suficient să arătăm că avem verificată relația lui Ceva

$$\frac{\|TO\|}{\|TO'\|} \cdot \frac{\|NO'\|}{\|NA\|} \cdot \frac{\|MA\|}{\|MO\|} = 1 \tag{1}$$

pentru ca dreptele AT, ON, $O'N$ să fie concurente (fig. T_1 63).

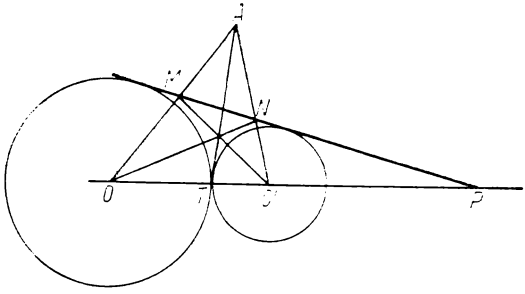


Fig. T_1 63

Dacă P este punctul unde tangenta comună exterioară taie linia centrelor OO' (P este centrul exterior de omotetie) atunci, conform teoremei lui Menelaus aplicată triunghiului AOO' și transversalei MNP, avem

$$\frac{\|PO\|}{\|PO'\|}\cdot\frac{\|NO'\|}{\|NA\|}\cdot\frac{\|MA\|}{\|MO\|}=1. \quad (2)$$

Cum însă (notăm cu R, r razele cercurilor de centre O și O'):

$$\frac{\|PO\|}{\|PO'\|}=\frac{\|TO\|}{\|TO'\|}=\frac{R}{r} \quad (3)$$

rezultă, ținînd seama de (3), că relația (2) devine echivalentă cu (1). Conform cu reciproca teoremei lui Ceva, dreptele AT, ON, $O'M$ sînt concurente.

T_1 64. *Să se calculeze volumul unui tetraedru $[VABC]$ cunoscînd lungimile a, b, c ale laturilor triunghiului ABC și măsurile α, β, γ ale unghiurilor făcute de planele (VBC), (VAC), (VAB) cu planul (ABC). Se mai știe că piciorul înălțimii din V este un punct situat în interiorul triunghiului ABC.*

* * *, G. M. 7/1963

Soluție. Avem $V=(1/3)\,Sh$, unde S este aria triunghiului ABC și h înălțimea tetraedrului. Dar, notînd cu O, A', B', C' proiecțiile lui V respectiv pe planul (ABC) și pe dreptele BC, CA, AB, putem scrie:

$S=(1/2)\,(a\,\|OA'\|+b\,\|OB'\|+c\,\|OC'\|)$, unde $\|OA'\|=h\operatorname{ctg}\alpha$, $\|OB'\|=h\operatorname{ctg}\beta$ și $\|OC'\|=h\operatorname{ctg}\gamma$. Prin urmare

$$h=\frac{2S}{a\operatorname{ctg}\alpha+b\operatorname{ctg}\beta+c\operatorname{ctg}\gamma},\quad\text{unde } S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Rezultă

$$V=\frac{2}{3}\cdot\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{a\operatorname{ctg}\alpha+b\operatorname{ctg}\beta+c\operatorname{ctg}\gamma}.$$

T_1 65. *Bisectoarele interioare ale unghiurilor triunghiului ABC taie a doua oară cercul circumscris triunghiului în A', B', C'. Notînd cu d_a, d_b, d_c distanțele punctelor A', B', C' respectiv la dreptele BC, CA, AB și cu r_a, r_b, r_c razele cercurilor exînscrise triunghiului ABC, să se stabilească relația:*

$$\frac{d_a}{r_a}+\frac{d_b}{r_b}+\frac{d_c}{r_c}=1.$$

G. M. 2/1965

Soluție. Folosim notațiile din figura T_1 65. Deoarece A' este pe bisectoare, rezultă că $\widehat{BmA'} \equiv \widehat{A'nC}$, de unde $\| A'B \| = \| A'C \|$, $\| MB \| = \frac{\| BC \|}{2}$ și $m(\widehat{A'BC}) = \frac{m(\hat{A})}{2}$. Deci $\| A'B \| = 2R \sin \frac{A}{2}$. Din triunghiul dreptunghic $A'BM$ rezultă $\| MA' \| = \| A'B \| \cdot \sin \frac{A}{2} = 2R \sin^2 \frac{A}{2} = d_a$. De asemenea, $r_a = p \operatorname{tg} \frac{A}{2}$,

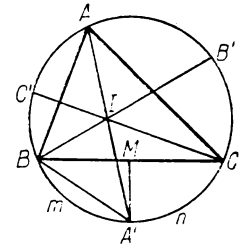


Fig. T_1 65

deci $\frac{d_a}{r_a} = \frac{2R}{p} \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} = \frac{R \sin A}{p}$. Rezultă că $\sum \frac{d_a}{r_a} = \frac{R \sin A + R \sin B + R \sin C}{p} = 1$.

T_1 66. *Se dă paralelogramul $ABCD$ cu diagonalele $|AC|$, $|BD|$ unde $\| AC \| > \| BD \|$. Pe diagonala $|AC|$ se consideră un punct M astfel încît patrulaterul $BCDM$ să fie inscriptibil. Să se demonstreze că BD este o tangentă comună exterioară a cercurilor circumscrise triunghiurilor AMB și AMD.*

Șt. Musta, G. M. 2/1965

Soluție. În patrulaterul inscriptibil $BMDC$, $\widehat{MBD} \equiv \widehat{MCD}$. Dar $\widehat{MCD} \equiv \widehat{MAB}$ deci $\widehat{MAB} \equiv \widehat{MBD}$.
Rezultă că BD este tangentă cercului circumscris triunghiului ABM. La fel se arată că BD este tangentă cercului circumscris triunghiului AMD.

T_1 67. *Să se găsească razele celor două baze ale unui trunchi de con cunoscînd înălțimea, generatoarea și volumul trunchiului de con.*

G. Țițeica, G. M. vol. VIII, 1903

Soluție. Fie h înălțimea, a generatoarea și $\frac{\pi h b^2}{3}$ volumul trunchiului de con; razele bazelor le notăm cu x și y. Presupunem $x > y$.

1° Presupunînd trunchiul de con de prima speță (adică obținut prin intersecția unei suprafețe conice cu două plane paralele care taie o singură pînză a suprafeței conice), avem: $(x - y)^2 = a^2 - h^2$, deci

$x - y = \sqrt{a^2 - h^2}$ (am considerat radicalul cu semnul + pentru că $x > y$). (1)

Scriind volumul avem:

$$\frac{\pi h b^2}{3} = \frac{1}{3} \pi h (x^2 + y^2 + xy), \text{ de unde}$$

$$x^2 + y^2 + xy = b^2.$$

Din calcule rezultă $8xy = b^2 + h^2 - a^2$ și se obține

$$x + y = \sqrt{\frac{4b^2 + h^2 - a^2}{3}}. \qquad (2)$$

Din (1) și (2) deducem:

$$2x = \sqrt{\frac{4b^2 + h^2 - a^2}{8}} + \sqrt{a^2 - h^2},$$

$$2y = \sqrt{\frac{4b^2 + h^2 - a^2}{3}} - \sqrt{a^2 - h^2},$$

Pentru ca rezultatele să corespundă ipotezelor, trebuie să avem cantități pozitive, deci $a > h$; $4b^2 > a^2 - h^2$; $x > 0$; $y > 0$ și $x > y$.

Avem $\sqrt{\frac{4b^2 + h^2 - a^2}{8}} > \sqrt{a^2 - h^2} \Leftrightarrow b^2 > a^2 - h^2$.

Dacă $a = h$ trunchiul de con se reduce la un cilindru, căci $x = y$. Dacă $b^2 = a^2 - b^2$, trunchiul se reduce la un con, căci $y = 0$.

2° Trunchiul de con este de speța a doua (adică obținut prin intersecția unei suprafețe conice cu două plane paralele, fiecare intersectînd cîte o pînză a suprafeței conice). Avem:

$$x + y = \sqrt{a^2 - h^2}.$$

Se scrie volumul care se obține din suma volumelor celor două coniri și se obține:

$$x^2 + y^2 - xy = b^2.$$

Făcînd calcule analoage cu cele de la punctul 1° se găsește:

$$2x = \sqrt{a^2 - h^2} + \sqrt{\frac{4b^2 + h^2 - a^2}{3}}.$$

$$2y = \sqrt{a^2 - h^2} - \sqrt{\frac{4b^2 + h^2 - a^2}{3}}.$$

Radicalii au sens dacă $a > h$ și $4b^2 > a^2 - h^2$.

Se observă că $x > y$, $x > 0$, $y > 0$ și $b^2 < a^2 - h^2$.

Deci $a > h$ și pentru a avea un trunchi de con de speța a doua trebuie să avem relațiile:

$$\frac{a^2 - h^2}{4} < b^2 < a^2 - h^2.$$

Rezultă deci următoarea discuție:

1) Dacă $b^2 < \frac{a^2 - h^2}{4}$, nu avem nici o soluție;

2) Dacă $b^2 = \frac{a^2 - h^2}{4}$, avem un trunchi de con despeța a doua cu baze congruente ($x = y$ și $a > h$);

3) Dacă $\frac{a^2 - h^2}{4} < b^2 < a^2 - h^2$ avem un trunchi de con de speța a doua ($x > y$);

4) Dacă $b^2 = a^2 - h^2$ avem un con;

5) Dacă $b^2 > a^2 - h^2$, $a > h$ avem un trunchi de con de speța întîi;

6) Dacă $a = h$ avem un cilindru;

7) Dacă $a < h$ nu avem soluție.

Capitolul IV

PROBLEME PENTRU TREAPTA A DOUA (T_2)

Introducere

Problemele expuse în acest capitol au ca scop valorificarea acelor cunoştinţe încadrate prin noi metode de rezolvare ce sprijină programa analitică în vigoare, perfecţionează înţelesul noţiunilor şi deschid calea spre adîncirea lor în cadrul selectiv al problemelor adresate concursurilor. Problemele propuse contribuie la dezvoltarea capacităţilor prin idei care stimulează analogia, eşalonează manierele clasice de investigare, completează unele noţiuni, într-o perspectivă nouă care face posibilă abordarea unor cazuri dificile la prima vedere. Noţiunea de şir şi problemele de limite sînt ilustrate şi prin probleme referitoare la algoritmul nelimitat al seriei, noţiune fundamentală de cercetare în teoria numerelor, în analiză.

Teoria numerelor rămîne prezentă şi în ultimii doi ani ai liceului. Este un cîştig pentru dezvoltarea capacităţii de aprofundare a mulţimii fundamentale a numerelor întregi. Exemple instructive găsim în (T_2 24), (T_2, 16), (T_2 20) semnată de *I. Ghibaldan* şi (T_2 23) semnată de *Gh. Buicliu*. În această secţiune găsim ecuaţii diofantice ca (T_2 17) sub semnătura lui *I. Linteş* sau (T_2 19), precum şi proprietăţi ale numerelor prime şi relativ prime ca în (T_2 21).

Algebra oferă cititorului prilejul de a aprofunda proprietăţile polinoamelor prin (T_2 1) sub semnătura lui *A. G. Ioachimescu*, totdeauna actual şi profund, (T_2 2), (T_2 6), să abordeze ecuaţii algebrice ca (T_2 10) semnată de *M. Ghermănescu*, (T_2 11) semnată *Th. Angheluţă*, să stabilească relaţii prin determinanţi ca în (T_2 13) semnată de *Lt. Mihail Focşeneanu*. Astfel se actualizează probleme de conţinut cu caracter clasic, dar peren, iar în acelaşi timp se pune la dispoziţia cititorului şi un fond de probleme teoretice de structuri algebrice apărute de curînd în învăţămînt cum ar fi (T_2 4), (T_2 5). (T_2, 7), (T_2 9).

Geometria este reprezentată prin cîteva probleme de geometrie analitică dintre care reținem (T_2 25) sub semnătura lui *M. Ghermănescu*, depășind programul actual, dar sugestivă, ca și (T_2 26) semnată de *I. Ionescu* care dovedește încă o dată avantajele de a îmbina teoria cu aplicațiile. Mai găsim și probleme privitoare la conice tratate sintetic cu eleganță ca (T_2 27) sau (T_2 29).

Locul principal în acest capitol revine analizei prin numeroase probleme de șiruri și serii începînd cu (T_2 31) semnată de *S. Gall*, (T_2 35) semnată de *Gh. Th. Gheorghiu* și (T_2 33), (T_2 32), (T_2 34), (T_2 38), (T_2 43). La acestea se adaugă probleme de limite ca (T_2 36), (T_2 39), de proprietăți ale funcțiilor ca (T_2 45), (T_2 47) sau (T_2 42).

Se constată în general o monotonie în alegerea temelor problemelor de treapta a II-a. Aceasta rezultă din manuale care pun accente severe pe rigoarea temelor teoretice, dînd o atenție mai redusă algoritmilor. Aceasta este o tendință generală de a se promova caractere calitative cărora li se acordă locul meritat, dar uneori în dauna tehnicilor de calcul.

T_2 1. Fie $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n$ *polinoame cu coeficienți reali și să considerăm funcția* $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *dată prin*

$$F(x) = P_0(x)\cos^n x + P_1(x)\cos^{n-1} x \sin x + P_2(x)\cos^{n-2} x \sin^2 x + \ldots + P_n(x)\sin^n x.$$

Să se arate că condiția necesară și suficientă ca funcția F să fie funcția nulă, este ca polinoamele $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n$ să fie egale cu polinomul nul.

A. G. Ioachimescu, G. M. vol. XII

Soluție. Să arătăm necesitatea condiției. Presupunînd deci că F este funcția nulă, avem $F(x) = 0$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$. Pentru $x = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, egalitatea $F(k\pi = 0$ devine $P_0(k\pi) = 0$, ceea ce arată că polinomul P_0 are o infinitate de rădăcini și deci P_0 este polinomul nul. Atunci $F(x) = (\sin x) \cdot [P_1(x)\cos^{n-1} x + P_2(x)\cos^{n-2} x \sin x + \ldots + P_n(x)\sin^{n-1} x] \overset{\text{not}}{=} (\sin x)F_1(x)$. Din $F(x) = 0$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$ rezultă imediat $F_1(x) = 0$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R} \setminus \{k\pi\}_{k \in \mathbf{Z}}$. Dar funcția F_1 este continuă pe $\mathbf{R}$ și fiind nulă în toate punctele diferite de $k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$), rezultă că va fi nulă și în aceste puncte.

Egalitatea $F_1(k\pi) = 0$ devine $P_1(k\pi) = 0$, $(\forall)\ k \in \mathbf{Z}$, ceea ce arată că polinomul P_1 are o infinitate de rădăcini și deci este polinomul nul. Din aproape în aproape arătăm că fiecare din polinoamele $P_2, P_3, \ldots, P_n$ este polinomul nul. Suficiența condiției este imediată, deoarece dacă $P_0, P_1, \ldots, P$ sînt polinoame nule, atunci funcția F este funcția nulă.

T_2 2. *Se consideră polinoamele neconstante $p_1, p_2, \ldots, p_n$ cu coeficienți complecși. Dacă polinomul*

$p(x) = p_1(x^{n+1}) + xp_2(x^{n+1}) + \ldots + x^{n-1}p_n(x^{n+1})$ *se divide cu* $x^n + x^{n-1} + \ldots + x + 1$, *să se demonstreze că polinoamele p_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ se divid cu $x - 1$.*

D. Andrica, G. M. 8/1977

Soluție. Rădăcinile polinomului $x^n + x^{n-1} + \ldots + x + 1$ sînt rădăcinile unității de ordinul $n + 1$, diferite de 1, adică

$$\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{n+1} + i\sin\frac{2k\pi}{n+1}, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Înseamnă că acestea vor fi rădăcini și pentru $p(x)$ și ținînd seama că $\varepsilon_k^{n+1} = 1$, $k = 1, 2, \ldots, n$, rezultă egalitățile:

$$p(\varepsilon_1) = p_1(1) + \varepsilon_1 p_2(1) + \ldots + \varepsilon_1^{n-1} p_n(1) = 0,$$

$$p(\varepsilon_2) = p_1(1) + \varepsilon_2 p_2(1) + \ldots + \varepsilon_2^{n-1} p_n(1) = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$p(\varepsilon_n) = p_1(1) + \varepsilon_n p_2(1) + \ldots + \varepsilon_n^{n-1} p_n(1) = 0.$$

Interpretînd aceste egalități ca un sistem liniar omogen cu n ecuații și n necunoscute $p_1(1)$, $p_2(1)$, ..., $p_n(1)$, deoarece determinantul este Vandefmonde și nenul, rezultă că sistemul are doar soluția banală. Deci

$$p_1(1) = p_2(1) = \ldots = p_n(1) = 0,$$

adică polinoamele p_i se divid prin $x - 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

T 2 3 .*Dacă* z_k, $k = \overline{1, 2n}$ *sînt rădăcinile de ordinul* $2n + 1$ *ale unității, diferite de* 1, *să se arate că*

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{1 - \bar{z}_k}{1 + z_k} = 2n + 1,$$

unde $\bar{z}_k$ *este rădăcina complex conjugată rădăcinii* z_k.

I. Candrea, G. M. 3/1977

Soluție. $z^{2n+1} = 1 \Leftrightarrow (z - 1)(z^{2n} + z^{2n-1} + \ldots + z + 1) = 0$, deci rădăcinile $z_1, z_2, \ldots, z_{2n}$ sînt rădăcini ale polinomului

$P(z) = z^{2n} + z^{2n-1} + \ldots + z + 1$. Avem

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{z - z_k}$$

sau

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{z - z_k} = \frac{\left(\dfrac{z^{2n+1} - 1}{z - 1}\right)'}{\dfrac{z^{2n+1} - 1}{z - 1}} = \frac{\dfrac{(2n+1)z^{2n}(z-1) - (z^{2n+1} - 1)}{(z-1)^2}}{\dfrac{z^{2n+1} - 1}{z - 1}} =$$

$$= \frac{2nz^{2n+1} - (2n+1)z^{2n} + 1}{(z-1)(z^{2n+1} - 1)}.$$

Făcînd $z = -1$ obținem $-\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{1+z_k} = \frac{-2n-2n-1+1}{4} = -n$,

adică $\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{1+z_k} = n$. Dar

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{1-\bar{z}_k}{1+z_k} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{1+z_k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\bar{z}_k}{1+z_k} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{1+z_k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{z_k\bar{z}_k}{z_k(z_k+1)} =$$

$$= \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{1+z_k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{z_k(z_k+1)} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{1+z_k} -$$

$$- \sum_{k=1}^{2n} \left(\frac{1}{z_k} - \frac{1}{z_k+1} \right) = 2\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{1+z_k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{z_k} =$$

$$= 2n - \sum_{k=1}^{2n} z_k = 2n - (-1) = 2n + 1.$$

T$_2$ 4. *Fie $(A, +, .)$ un inel unitar (cu $O_A \neq 1_A$) și $(B, +, .)$ un alt inel unitar (cu $O_B \neq 1_B$) cu proprietățile:* 1) $B \subset A$; 2) *operațiile inelului B sînt cele induse de operațiile inelului A;* 3) $1_B \neq 1_A$. *Se cere:*

a) *să se arate că $O_B = O_A$, $1_A \in A \setminus B$ și inelul A conține divizori ai lui zero;*

b) *să se arate că există $u \in A$ idempotent (adică $u^2 = u$) astfel încît $1_B = 1_A - u$;*

c) *să se găsească un exemplu efectiv de două asemenea inele A și B*

Marcel Țena, G. M. Metodică 1/1980

Soluție. a) Avem $1_B \in B \subset A$; în inelul B putem scrie $1_B - 1_B = O_B$, iar în inelul A putem scrie $1_B - 1_B = O_A$ de unde rezultă $O_B = O_A$. Pentru a arăta că $1_A \in A \setminus B$, vom presupune prin absurd că $1_A \in B$; atunci în inelul A avem $1_A \cdot 1_B = 1_B$, iar în inelul B avem $1_A \cdot 1_B = 1_A$ ceea ce ar duce la $1_A = 1_B$, contradicție. Arătăm acum un exemplu de divizori ai lui zero în inelul A. Să luăm $x = 1_B$ și $y = 1_A - 1_B$; avem $x = 1_B \neq O_B = O_A$ și $y \neq O_A$, dar $xy = 1_B(1_A - 1_B) = 1_B 1_A - 1_B 1_B = 1_B - 1_B = O_A$ deci x, y sînt divizori ai lui zero. [Mai sus, produsul $1_B \cdot 1_B$ se găndește în inelul B, deci $1_B \cdot 1_B = 1_B$].

Ca mică observație ce se impune, inelul B nu este subinel al inelului A, deoarece au elementele-unitate distincte.

b) Fie $u = 1_A - 1_B \in A$. Avem:
$u^2 = (1_A - 1_B)(1_A - 1_B) = 1_A 1_A - 1_A 1_B - 1_B 1_A + 1_B 1_B = 1_A - 1_B - 1_B + 1_B =$
$= 1_A - 1_B = u$, deci u este un element idempotent al inelului A. Din definiția lui u rezultă $1_B = 1_A - u$.

c). Fie $A = \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ = inelul matricelor pătrate de ordinul al doilea cu elemente reale și fie $B = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \, a \in \mathbf{R} \right\}$ (operațiile sînt adunarea și produsul matricial).

Avem $O_A = O_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $1_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $1_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

T$_2$ 5. *Se consideră grupul aditiv* $\mathbf{Q}[i]$ *unde* $\mathbf{Q}[i] = \{a + bi \in \mathbf{C} \mid a, b \in \mathbf{Q}\}$. *Să se arate că grupul aditiv al numerelor raționale nu este izomorf cu grupul* $\mathbf{Q}[i]$.

Toma Albu, G. M.-A 5/1972

Soluție. Să presupunem prin absurd că există un izomorfism de grupuri $f: (\mathbf{Q}, +) \to (\mathbf{Q}[i], +)$. Se arată ușor că $f(x) = ax$, $(\forall)\ x \in \mathbf{Q}$ unde $a = f(1)$. Fie $a = f(1) = m + in$ cu $m, n \in \mathbf{Q}^*$ (nu putem avea $m = 0$ sau $n = 0$, căci atunci f nu ar mai fi surjectiv). Deoarece f este morfism surjectiv, considerînd elementul $m + (n + 1)\, i \in \mathbf{Q}[i]$, deducem existența unui element $x \in \mathbf{Q}$ astfef încît $f(x) = m + (n + 1)\, i$. Această egalitate se mai scrie $xf(1) = m + (n + 1)\, i$ sau $x(m + in) = m + (n + 1)\, i$, de unde $mx = m$ și $nx = n + 1$. Cum $m \neq 0$, din prima egalitate deducem $x = 1$ și atunci cea de-a doua egalitate devine $n = n + 1$, contradicție.

T$_2$ 6. *Să se arate că inelele de polinoame* $(\mathbf{R}[X], +, \cdot)$ *și* $(\mathbf{C}[X], +, \cdot)$ *nu sînt izomorfe.*

C. Năstăsescu, G. M. 11/1982

Soluție. Să presupunem prin absurd că există un izomorfism de inele $\varphi : \mathbf{R}[X] \to \mathbf{C}[X]$. Dacă $\overline{\varphi}(X) = f$, vom avea grad $f \geqslant 1$. Într-adevăr dacă f ar fi polinomul nul, atunci ar rezulta că X este polinomul nul, iar dacă f ar avea gradul zero, ar fi inversabil, deci și X ar fi inversabil, contradicție în ambele cazuri.

Atunci, considerînd polinomul ireductibil $X^2 + 1 \in \mathbf{R}[X]$, avem $\varphi(X^2 + 1) = f^2 + 1 = (1 + if)(1 - if)$, adică imaginea acestui polinom prin izomorfismul φ nu mai este un polinom ireductibil în inelul $\mathbf{C}[X]$. Contradicție.

T$_2$ 7. *Se dă grupul* $(G, \cdot)$ *cu un număr par de elemente. Se numește ordin al elementului* $a \in G$ *cel mai mic număr natural* p *astfel încît* $a^p = e$. *Să se demonstreze că în* G *avem un număr impar de elemente de ordinul al doilea.*

Marian Diaconescu, G. M. 8/1977

Soluție. Să observăm că un element a are ordinul al doilea, dacă și numai dacă $a = a^{-1}$ (a este egal cu propriul său invers). Elementele care au ordinul strict mai mare decît doi sînt în număr par, deoarece fiecare din aceste elemente poate fi grupat cu inversul său (un asemenea element este diferit de inversul său) și astfel obținem un număr de perechi de elemente, deci un număr par de elemente.

Elementele care au ordinul strict mai mic decît doi, adică ordinul unu, sînt în număr de unul singur și anume e (elementul neutru). Așadar numărul elementelor care nu au ordinul al doilea este un număr impar. Cum grupul are număr par de elemente, rezultă că numărul elementelor de ordinul al doilea este de asemenea un număr impar.

T_2 8. *Să se demonstreze că dacă a și b sînt două numere naturale prime între ele, atunci 252 divide $(a^6 + b^6 - 1)(a^6 + b^6 - 2)$.*

* * *, G. M. vol. XLII, 1936

Soluție. Numărul 252 are drept factori relativ primi numerele 4, 7 și 9 și deci trebuie arătată divizibilitatea prin fiecare dintre aceste numere.

1) *Divizibilitatea prin 4.*

Numerele a și b nu pot fi amîndouă pare.
Deci dacă $a = 2m$ și $b = 2n + 1$ atunci $4 \mid (a^6 + b^6 - 1)$ $(m, n \in \mathbf{N}^*)$.

Dacă $a = 2m + 1$ și $b = 2n + 1$, atunci

$$a^6 + b^6 - 2 = a^6 - 1 + b^6 - 1 = (a^3 - 1)(a^3 + 1) + (b^3 - 1)(b^3 + 1)$$

adică fiecare termen al sumei este divizibil prin 4.

2) *Divizibilitatea prin 7.*

Se observă că a și b nu pot fi în același timp multiplii de 7.
Dacă $a = 7k$, atunci $b \neq 7p$ $(k, p \in \mathbf{Z})$ și în baza teoremei Fermat rezultă $b^6 - 1 \equiv 0 \pmod 7$ deci $a^6 + b^6 - 1 \equiv 0 \pmod 7$.
Dacă $a \neq 7k$ și $b \neq 7k$, în baza aceleiași teoreme rezultă

$$a^6 - 1 \equiv 0 \pmod 7 \text{ și } b^6 - 1 \equiv 0 \pmod 7$$

adică $a^6 + b^6 - 2 = (a^6 - (1 + (b^6 - 1) \equiv 0 \pmod 7$.

3) *Divizibilitatea prin 9.*

Se observă că a și b nu pot fi în același timp multipli de 3.
Dacă $a = 3k$ și $b \neq 3p$, rezultă că $(b, 9) = 1$ și conform teoremei lui Euler vom avea $b^6 \equiv 1 \pmod 9$, adică

$$a^6 + b^6 - 1 \equiv 0 \pmod 9.$$

Dacă $a \neq 3k$ și $b \neq 3p$, atunci $(a, 9) = (b, 9) = 1$, deci conform teoremei lui Euler

$$a^6 \equiv 1 \pmod 9,\ b^6 \equiv 1 \pmod 9 \text{ și prin urmare}$$

$$a^6 + b^6 - 2 = (a^6 - 1) + (b^6 - 1) \equiv 0 \pmod 9.$$

T_2 9. *Există inele comutative unitare A astfel încît inelul de polinoame într-o variabilă $A[T]$ să fie egal cu inelul $(\mathbf{Z}, +, \cdot)$?*

Doru Ștefănescu, G. M. 6/1981

Soluție. Să presupunem că ar exista un inel A unitar, comutativ, astfel încît $A[T] = \mathbf{Z}$. Cum A este subinel al lui $A[T]$, rezultă că A este subinel unitar al inelului $\mathbf{Z}$ și în particular că A este subgrup nenul al grupului aditiv $\mathbf{Z}$. Deci $(\exists)\ n \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$, astfel încît $A = n\mathbf{Z}$. Dar $1 \in A = n\mathbf{Z}$ și atunci $n = 1$ sau $n = -1$. Rezultă $A = \mathbf{Z}$ și atunci $\mathbf{Z}[T] = \mathbf{Z}$, ceea ce este o contradicție (deoarece inelul $\mathbf{Z}$ este strict inclus în inelul de polinoame $\mathbf{Z}[T]$). Deci nu există inele A cu proprietatea din enunț.

T_2 10. *Să se determine λ rațional așa fel ca ecuația*

$$x^4 - 16x^3 + 86x^2 + \lambda x + 120 = 0$$

să aibă o rădăcină de forma $a + \sqrt{a}$, a fiind un număr rațional pozitiv, care nu este pătratul altui număr rațional, apoi să se rezolve ecuația dată.

M. Ghermănescu, G. M. vol. XLIV

Soluție. 1) Se înlocuiește x cu $a + \sqrt{a}$ în ecuația dată și se obține $a^4 - 10a^3 + 39a^2 + (86 + \lambda)\, a + 120 + \sqrt{a}\,(4a^3 - 44a^2 + 156a + \lambda) = 0$. Pentru că $\sqrt{a}$ este irațional și λ rațional egalitatea este adevărată dacă și numai dacă $a^4 - 10a^3 + 39a^2 + (86 + \lambda)\, a + 120 = 0$ și $4a^3 - 44a^2 + 156\, a + \lambda = 0$. Se elimină λ și se obține:

$$3a^3 - 34a^3 + 117a^2 - 86a - 120 = 0,$$

care trebuie să aibă rădăcini raționale. Metoda care determină rădăcinile raționale pentru ecuațiile cu coeficienți întregi, ne dă $a = 3$, $a = 5$, $a = 4$, $a = -\frac{2}{3}$, iar din acestea numai $a = 5$ și $a = 3$ corespund condițiilor problemei. Pentru ambele valori ale lui a găsim $\lambda = -180$. Ecuația dată devine:

$$x^4 - 16x^3 + 86x^2 - 180x + 120 = 0,$$

care admite ca soluții $3 \pm \sqrt{3}$ și $5 \pm \sqrt{5}$.

T_2 11. *Să se studieze natura și semnul rădăcinilor ecuației* $(m + 1)\, y^2 - 2m\,(m + 1)\, y + m^3 + m^2 - m + 1 = 0$.
Să se figureze variația rădăcinilor reale și să se calculeze cu două zecimale exacte, valorile lui m pentru care rădăcinile sînt maxime sau minime.

Th. Angheluță, G. M. vol. XLIV

Soluție. Din ecuația inițială se deduce

$$y = m \pm \sqrt{\frac{m - 1}{m + 1}}.$$

Graficele acestor funcții reale în m:

$$y_1 = m + \sqrt{\frac{m-1}{m+1}} \text{ și } y_2 = m - \sqrt{\frac{m-1}{m+1}},$$

care sînt definite pe domeniul $(-\infty, -1) \cup [1, +\infty)$, prezintă fiecare cîte două ramuri, corespunzătoare intervalelor respective (vezi tabelul de variație). Derivatele acestor funcții sînt:

$$y_1' = 1 + \frac{1}{\sqrt{(m^2-1)(m+1)^2}}; \quad y_2' = 1 - \frac{1}{\sqrt{(m^2-1)(m+1)^2}}.$$

Rezultă că y_1 este o funcție crescătoare pe fiecare din cele două intervale. Derivata lui y_2 se mai poate scrie, după raționalizarea numărătorului:

$$y_2' = \frac{m^4 + 2m^3 - 2m - 2}{\sqrt{(m^2-1)(m+1)^2} \cdot [\sqrt{(m^2-1)(m+1)^2} + 1]}.$$

Ecuația $m^4 + 2m^3 - 2m - 2 = 0$ are o rădăcină pozitivă a în intervalul $(1, 2)$ și una negativă b în intervalul $(-1, -2)$.
Restrîngînd intervalele în care se găsesc cele două rădăcini se găsește $a = 1{,}10$ și $b = -1{,}71$, cu două zecimale exacte.

m	$-\infty$		b		-1		$+1$		a		$+\infty$
y_1'		$+$		$+$				$+$		$+$	
y_2'		$+$		0	$-$			$-$	0	$+$	
y_1	$-\infty$	$\nearrow$			$+\infty$		1		$\nearrow$		$+\infty$
y_2	$-\infty$	$\nearrow$	$-3{,}36$	$\searrow$	$-\infty$		1	$\searrow$	$0{,}88$	$\nearrow$	$+\infty$

T$_2$ 12. *Să se elimine x între ecuațiile*

$$x^6 + x^5 - (3\alpha - 1)x^4 - (2\alpha - 1)x^3 + (3\alpha^2 - 3\alpha + 1)x^2 + (\alpha - 1)^2 x - (\alpha^3 - 2\alpha^2 + \alpha - 1) = 0,$$

$$x^4 - (2\alpha - 1)x^2 + x + \alpha^2 - 2\alpha - y = 0.$$

M. Ghermănescu, G. M. vol. XLIV

Soluție. Se înmulțește a doua ecuație cu x^2 și se scade din prima; se găsește.

$$x^5 - \alpha x^4 - 2\alpha x^3 + (2\alpha^2 - \alpha + 1 + y)x^2 + (\alpha - 1)^2 x - (\alpha^3 - 2\alpha^2 + \alpha - 1) = 0.$$

Se scade aceasta din a doua înmulțită cu x; se obține

$$\alpha x^4 + x^3 - (2\alpha^2 - \alpha + y)\, x^2 - (1 + y)\, x + (\alpha^3 - 2\alpha^2 + \alpha - 1) = 0.$$

Se înmulțește a doua ecuație cu α și se scade din cea obținută mai înainte:

$$x^3 - yx^2 - (\alpha + 1 + y)\, x + (\alpha y + \alpha - 1) = 0.$$

Se înmulțește aceasta cu x și se scade din a doua:

$$x^3 y + (y - \alpha + 2)\, x^2 - (\alpha y + \alpha - 2)\, x + \alpha^2 - 2\alpha - y = 0.$$

Se scade din aceasta cea de mai sus înmulțită cu y și se obține

$$(y^2 + 2y - \alpha + 2)\,(x^2 + x - \alpha) = 0$$

care se desface în $y^2 + 2y - \alpha + 2 = 0$ sau $x^2 + x - \alpha = 0$.
Soluțiile ecuației $x^2 + x - \alpha = 0$ nu verifică ecuațiile date deci $y^2 + 2y - \alpha + 2 = 0$ este rezultatul eliminării.

T$_2$ 13. *Dîndu-se determinanții de ordinul al treilea scriși cu ajutorul liniei generale:*

$$D_1 = |\ 1 \cos \omega_j \cos^2 \omega_j\ |$$
$$D_2 = |\ 1 \sin \omega_j \sin^2 \omega_j\ |$$
$$D_3 = |\ 1 \cos \omega_j \sin^2 \omega_j\ |\ , \qquad j = 1,\ 2,\ 3,$$
$$D_4 = |\ 1 \sin \omega_j \cos^2 \omega_j\ |$$

să se stabilească relația

$$D_1 - D_3 + i\,(D_2 - D_4) = 16 \sin \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \sin \frac{\omega_2 - \omega_3}{2} \sin \frac{\omega_1 - \omega_3}{2} \cdot$$

$$\cdot \left(\sin \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \cdot \sin \frac{\omega_2 + \omega_3}{2} \cdot \sin \frac{\omega_3 + \omega_1}{2} - i \cos \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \cos \frac{\omega_2 + \omega_3}{2} \cdot \cos \frac{\omega_3 + \omega_1}{2} \right).$$

Mihail I. Focșeneanu, G. M. vol. XLIII

Soluție. Determinanții D_1 și D_2 sînt de tip Vandermonde și deci

$$D_1 = |\ 1 \cos \omega_j \cos^2 \omega_j\ | = (\cos \omega_1 - \cos \omega_2)(\cos \omega_2 - \cos \omega_3)(\cos \omega_3 - \cos \omega_1) =$$

$$= -\,8 \sin \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \sin \frac{\omega_2 - \omega_3}{2} \sin \frac{\omega_3 - \omega_1}{2} \sin \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \sin \frac{\omega_2 + \omega_3}{2} \times$$

$$\times \sin\frac{\omega_3+\omega_1}{2} = 8\sin\frac{\omega_1-\omega_2}{2}\sin\frac{\omega_2-\omega_3}{2}\sin\frac{\omega_1-\omega_3}{2}\sin\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\cdot$$

$$\cdot \sin\frac{\omega_2+\omega_3}{2}\sin\frac{\omega_3+\omega_1}{2}\cdot$$

Analog

$$D_2 = -8\sin\frac{\omega_1-\omega_2}{2}\sin\frac{\omega_2-\omega_3}{2}\sin\frac{\omega_1-\omega_3}{2}\cos\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\cdot$$

$$\cdot\cos\frac{\omega_2+\omega_3}{2}\cos\frac{\omega_3+\omega_1}{2}\cdot$$

Pentru D_3 și D_4 avem

$$D_3 = |\ 1\ \cos\omega_j\ \sin^2\omega_j\ | = |\ 1\ \cos\omega_j\ \ 1-\cos^2\omega_j\ | =$$
$$= -|\ 1\ \cos\omega_j\ \ \cos^2\omega_j\ | = -D_1.$$
$$D_4 = |\ 1\ \sin\omega_j\ \ \cos^2\omega_j\ | = |\ 1\ \sin\omega_j\ \ 1-\sin^2\omega_j\ | =$$
$$= -|\ 1\ \sin\omega_j\ \ \sin^2\omega_j\ | = -D_2.$$

Avem atunci

$$D_1 - D_3 + i(D_2 - D_4) = 2D_1 + 2iD_2 = 2(D_1 + iD_2) =$$
$$= 16\sin\frac{\omega_1-\omega_2}{2}\sin\frac{\omega_2-\omega_3}{2}\sin\frac{\omega_1-\omega_3}{2}\left(\sin\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\sin\frac{\omega_2+\omega_3}{2}\cdot\right.$$
$$\left.\cdot\sin\frac{\omega_1+\omega_3}{2} - i\cos\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\cos\frac{\omega_2+\omega_3}{2}\cos\frac{\omega_3+\omega_1}{2}\right).$$

T$_2$ 14. *Notațiile fiind cele obișnuite să se demonstreze că în triunghiul ABC există relația*

$$\begin{vmatrix} \sin A & \sin B & \sin C \\ \sin 2A & \sin 2B & \sin 2C \\ \sin 3A & \sin 3B & \sin 3C \end{vmatrix} = \frac{(a+b+c)^2(a-b)(b-c)(a-c)}{8R^5}.$$

Gh. Popescu, G. M. 6/1965

Soluție. Notînd cu Δ determinantul din enunț, vom avea

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sin A & \sin B & \sin C \\ 2\sin A\cos A & 2\sin B\cos B & 2\sin C\cos C \\ \sin A\,(4\cos^2 A - 1) & \sin B\,(4\cos^2 B - 1) & \sin C\,(4\cos^2 C - 1) \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \sin A \sin B \sin C \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos A & \cos B & \cos C \\ 4\cos^2 A - 1 & 4\cos^2 B - 1 & 4\cos^2 C - 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 8 \sin A \sin B \sin C \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos A & \cos B & \cos C \\ \cos^2 A & \cos^2 B & \cos^2 C \end{vmatrix} =$$

$$= 8 \sin A \sin B \sin C (\cos B - \cos A)(\cos C - \cos A)(\cos C - \cos B).$$

Se arată uşor că

$$\cos B - \cos A = \operatorname{ctg} \frac{C}{2}(\sin A - \sin B)$$ şi analoagele, astfel că

$$\Delta = 64 \cos^2 \frac{A}{2} \cos^2 \frac{B}{2} \cos^2 \frac{C}{2} (\sin A - \sin B)(\sin A - \sin C)(\sin B - \sin C).$$

În fine, mai ţinem seama că

$$\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} = \frac{a+b+c}{8R}$$

şi de teorema sinusurilor şi va rezulta

$$\Delta = \frac{(a+b+c)^2 (a-b)(a-c)(b-c)}{8R^5}.$$

T_2 15. *Fiind dat determinantul*

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

să se arate că dacă $a_{11} \cdot a_{22} = a_{12}^2$, $a_{22} \neq 0$ *şi* $a_{ik} = a_{ki}$ $(k \neq i)$, *atunci*

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}^2 = -a_{22} \cdot \Delta.$$

O. Sacter, G. M. 2/1965

Soluţie. Notăm

$$d = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$ şi dezvoltînd pe Δ după ultima linie,

obținem

$$\Delta = a_{31}d - a_{32} \cdot \begin{vmatrix} \frac{a_{12}^2}{a_{22}} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

sau

$$\Delta = a_{31}d - \frac{a_{32}a_{12}}{a_{22}} (a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}).$$

Rezultă

$$\Delta = d \cdot \frac{a_{31}a_{22} - a_{32}a_{12}}{a_{22}} = -\frac{d^2}{a_{22}},$$

adică ceea ce trebuia demonstrat.

T₂ 16. *Dacă p este un număr prim iar a un multiplu de p, să se arate că*

$$1 + \sum_{i=1}^{p-1} (a+i)^{p-1}$$

se divide prin p.

G. Constantinescu, G. M. vol. VIII

Soluție. Numerele $a+1$, $a+2$, $a+3$, ..., $a+p-1$ sînt prime cu p, deoarece a este multiplu de p, iar p este un număr prim. Din teorema lui Fermat rezultă:

$$(a+1)^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

$$(a+2)^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

$$(a+p-1)^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Aunînd congruențele de mai sus, membru cu membru, rezultă

$$\sum_{i=1}^{p-1} (a+i)^{p-1} \equiv (p-1) \pmod{p}$$

sau

$$1 + \sum_{i=1}^{n-1} (a+i)^{p-1} \equiv 0 \pmod{p}.$$

Observație. Problema se poate generaliza iar în locul teoremei lui Fermat se poate aplica teorema lui Euler expresiei

$$(p-k)+\sum_{i\in\{r_1,r_2,\cdots,r_k\}}(a+i)^k\equiv 0 \pmod p,$$

unde $(r_j, p)=1$, $a=tp$ $(t\in\mathbf{Z})$, k este numărul numerelor r_j, iar p este un număr natural, $p\geqslant 2$.

T_2 17. *Să se rezolve în numere naturale nenule ecuația* $x^{x-2}-x!=x$.

I. Linteș, G. M., vol. XXXII

Soluție Arătăm că pentru $x\geqslant 6$ $(x\in\mathbf{N})$ avem inegalitatea

$$x^{x-3}-1>(x-1)!,$$

adică ecuația dată nu admite soluții decît pentru $x\leqslant 5$.
Pentru $x=6$ rezultă $5!<6^3-1$ sau $120<215$.
Arătăm prin inducție matematică inegalitatea de mai înainte.
Presupunînd că este adevărată pentru x, vom avea

$$x!=x(x-1)!<x(x^{x-3}-1)=x^{x-2}-x<(x+1)^{x-2}-1,$$

ceea ce înseamnă că este adevărată și pentru $x+1$.
Pentru $x\leqslant 5$ ecuația dată admite numai soluția (în numere naturale) $x=5$.

Observație. Soluția ecuației de mai sus constituie un exemplu de aplicare a inegalităților în rezolvarea ecuațiilor diofantice.

T_2 18. *Să se demonstreze că dacă* C_p^q *reprezintă simbolul combinărilor a p obiecte luate cîte q, atunci*

$$4^{n-1} \text{ divide } \sum_{i=0}^{n-1} C_{2n+1}^{2(n-i)}\cdot C_{n-i}^{1} \quad (n\in\mathbf{N}^*).$$

Gh. Buicliu, G. M., vol. XXXVIII, 1931

Soluție. Considerăm identitatea valabilă pentru orice $x\in\mathbf{R}$:

$$(x+1)^{2n+1}-(x-1)^{2n+1}=$$

$$=2(C_{2n+1}^1x^{2n}+C_{2n+1}^3x^{2n-2}+\ldots+C_{2n+1}^{2n-1}x^2+1).$$

Derivînd ambii membri ai identității în raport cu x rezultă

$$(2n+1)[(x+1)^{2n}-(x-1)^{2n}]=$$

$$=4[nC_{2n+1}^1x^{2n-1}+(n-1)C_{2n+1}^3x^{2n-3}+\ldots+C_{2n+1}^{2n-1}x].$$

Înlocuind în ultima identitate $x=1$, rezultă

$$4\sum_{i=0}^{n-1}(n-i)C_{2n+1}^{2i+1}=2^{2n}(2n+1).$$

Simplificînd cu 4 și ținînd seama de formula combinărilor complementare, rezultă

$$\sum_{i=0}^{n-1} C_{n-i}^{1} \, C_{2n+1}^{2(n-i)} = 4^{n-1}\,(2n+1).$$

Observație. Pe aceeași cale se mai pot obține egalitățile

$$\sum_{i=0}^{n} C_{2n+1}^{2(n-i)+1} \cdot C_{2(n-i)+1}^{1} = 2(2n+1)\,4^{n-1},$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} C_{2n}^{2(n-i)} \cdot C_{n-i}^{1} = n \cdot 4^{n-1},$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} C_{2n}^{2(n-i)+1} \cdot C_{2(n-i)+1}^{1} = 2n \cdot 4^{n-1}.$$

T$_2$ 19. *Să se rezolve în numere întregi ecuația*

$$3(x+y)^4 - 8\,(x^2+y^2)\,xy = 528.$$

I. Murăroiu, vol. XXXV, 1929

Soluție. Calculînd rezultă

$$3\,(x+y)^4 - 8\,(x^2+y^2)\,xy = 2\,(x+y)^4 + (x+y)^4 - 8xy\,(x^2+y^2) =$$
$$= 2\,(x+y)^4 + (x-y)^4.$$

Ecuația dată devine $2\,(x+y)^4 + (x-y)^4 = 528$.
Notînd $x+y=u$, $x-y=v$ avem $2u^4+v^4=528$. Rezultă deci că v trebuie să fie par, adică $v=2t$ $(t \in \mathbf{Z}^*)$.
Simplificînd rezultă $u^4 = 264 - 8t^4$,
adică u trebuie să fie par, deci $u=2w$ $(w \in \mathbf{Z}^*)$.
Rezultă $t^4 = 2^4(33-2w^4)$.
Prin urmare trebuie să avem $33 - 2w^4 = k^4$ sau $k^4 + 2w^4 = 33$.
Numărul întreg k trebuie să fie impar. Pe de altă parte pentru $k \geqslant 3$ egalitatea de mai sus se transformă în inegalitate. Deci $k=1$ și prin urmare $w = \pm 2$. Rezultă deci $u = \pm 4$, iar $v = \pm 2$. Deci

$$\begin{cases} x+y = \pm 4, \\ x-y = \pm 2. \end{cases}$$

Sistemele de soluții ce satisfac ecuația dată vor fi:

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 3 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_2 = -1, \\ y_2 = -3, \end{cases}, \quad \begin{cases} x_3 = -3, \\ y_3 = -1, \end{cases}, \quad \begin{cases} x_4 = 3 \\ y_4 = 1 \end{cases}.$$

T$_2$ 20. *Produsul a nouă numere naturale consecutive nenule nu poate fi un cub.*

I. Ghibaldan, G. M., vol. III, 1898

Soluție. Fie $P = (n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)\cdot(n+3)(n+4)$. Pentru $n = 5, 6, 7, 8, 9$ și 10 se verifică faptul că P nu poate fi un cub. Presupunem deci $n > 10$. Calculînd rezultă $P = (n^3 - 10n)^3 - n(27n^4 - 180n^2 - 576)$. Pentru $n > 10$ a doua paranteză este un număr pozitiv și deci $P < (n^3 - 10n)^3$.

Pe de altă parte, scăzînd din ambii membri ai egalității date numărul $(n^3 - 10n - 1)^3$ rezultă

$$P - (n^3 - 10n - 1)^3 = 3n^6 - 27n^5 - 60n^4 + 177n^3 + 300n^2 +$$

$$+ 606n + 1 = 3((((((n-9)n - 20)n + 59)n + 100)n + 202n + 1.$$

Cum membrul al doilea este pozitiv pentru $n > 10$ rezultă $P > (n^3 - 10n - 1)^3$. Deci P este cuprins între două cuburi a două numere întregi consecutive și prin urmare P nu este un cub.

T_2 21. *Să se afle suma și produsul numerelor prime cu* 1939 *din primele 100 numere naturale.*

I. Linteș, G.M., vol. XLV, 1939

Soluție. Putem scrie $1939 = 7 \cdot 277$.

Prin urmare numerele neprime cu 1939 din primele 100 de numere naturale sînt cele divizibile prin 7, adică

7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70, 77, 84, 91, 98

care sînt în număr de 14. Deci numărul numerelor prime cu 1939 va fi 86. Suma acestor numere va fi

$$S = (1 + 2 + 3 + \ldots + 100) - 7(1 + 2 + 3 + \ldots + 14) =$$

$$= 5050 - 735 = 4315.$$

Produsul lor va fi

$$P = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 100}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 14 \cdot 7^{14}} = \frac{100!}{14!\,7^{14}}.$$

T_2 22. *Să se afle numărul* $\overline{2xy977z}$ *știind că se divide prin* 792.

Al. Levin, G. M. B. 2/1965

Soluție. Descompunem pe 792 în factori primi adică $792 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 11$. Pentru ca un număr să se dividă prin 2^3 trebuie ca numărul format din ultimele trei cifre să se dividă prin 2^3, adică

$$77z \equiv 0 \pmod 8 \quad \text{adică} \quad z = 6.$$

Pentru ca un număr să se dividă prin 3^2 trebuie ca suma cifrelor sale să se dividă prin 9 adică $2 + x + y + 9 + 7 + 7 + 6 \equiv 0 \pmod 9$ sau $x + y \equiv$

$\equiv -4 \pmod 9$. Deoarece x și y sînt cifre, nu putem avea decît $x + y = 5$ sau $x + y = 14$. Pentru ca un număr să se dividă prin 11 trebuie ca diferența dintfe suma cifrelor de rang par și suma celor de rang impar să se dividă prin 11. Deci $2 + y + 7 + 6 - x - 9 - 7 \equiv 0 \pmod{11}$. Rezultă deci $y - x \equiv 1 \pmod{11}$. Deoarece x și y sînt cifre, nu putem avea decît $y - x = 1$. Ținînd seama de cele spuse anterior, rezultă deci că am redus recolvarea problemei la rezolvarea sistemelor:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ y - x = 1 \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} x + y = 14 \\ y - x = 1 \end{cases}$$

Doar soluția primului sistem $x = 2$, $y = 3$ satisface problema noastră, adică numărul căutat este 2 239 776.

T_2 23. *Să se demonstreze că numerele $n - 1$ și $np + 1$ nu pot avea divizori comuni în afară eventual de divizorii lui $p + 1$, $(n, p \in \mathbf{N}^*, n > 1)$.*

Gh. Buicliu, G. M. vol. XLVII, 1941

Soluție. Orice divizor comun al celor două numere este divizor comun și al sumei lor $n(p + 1)$. Acest produs are ca divizori produse dintre divizorii lui n și cei ai lui $p + 1$. Dar divizorii lui n nu divid pe $n - 1$ deoarece $(n, n - 1) = 1$ și nu divid nici pe $np + 1$ deoarece $(np + 1, n - 1) = 1$. Rezultă deci că numai divizorii lui $p + 1$ pot fi divizori comuni ai numerelor din enunț.

T_2 24. *Suma a 10 elemente distincte ale mulțimii* **N** *este 62. Demonstrați că produsul lor se divide cu 60.*

Liliana Niculescu, G. M. 1/1982

Soluție. Din cele 10 elemente, cel puțin unul este multiplu de 3, căci în caz contrar suma lor ar fi cel puțin $1 + 2 + 4 + 5 + 7 + 8 + 10 + 11 + 13 + 14 = 75$. Cel puțin unul din cele 10 numere este multiplu de 4, căci în caz contrar suma lor ar fi cel puțin $1 + 2 + 3 + 5 + 6 + 7 + 9 + 10 + 11 + 13 = 67$.

Cel puțin unul din cele 10 numere este multiplu de 5, căci în caz contrar suma lor ar fi cel puțin $1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 7 + 8 + 9 + 11 + 12 = 63$.

Rezultă că produsul numerelor se divide cu 3, 4 și 5, deci se divide cu $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$. Numere care satisfac enunțul sînt de exemplu; 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 17.

T_2 25. *Se dă cuartica $(x^2 + y^2)^2 - (2a^2 - 1)\, x^2 - (2a^2 + 1)\, y^2 = 0$ și se consideră un punct M pe hiperbola echilateră $x^2 - y^2 = a^4$. Prin M se duce o secantă care taie cuartica în M_1, M_2, M_3, M_4. Să se demonstreze că produsul $\|MM_1\| \cdot \|MM_2\| \cdot \|MM_3\| \cdot \|MM_4\|$ este egal cu puterea a patra a lungimii tangentei dusă din punctul M la cercul $x^2 + y^2 = a^2$.*

M. G. Ghermănescu, G. M. vol. XLIV

Soluție. Fie $M(\alpha, \beta)$ un punct pe hiperbola echilateră dată; avem $\alpha^2 - \beta^2 = a^4$.
Un punct al unei secante dusă prin M are coordonatele

$$x = \alpha + r\cos\theta, \quad y = \beta + r\sin\theta,$$

unde r este distanța de la M la acel punct (obținute din ecuațiile parametrice ale secantei respective). Punînd condiția ca acest punct să fie pe cuartica dată se obține o ecuație de gradul patru în r, ale cărei rădăcini sînt lungimile

$$\|MM_1\|, \|MM_2\|, \|MM_3\|, \|MM_4\|.$$

Dar primul termen este r^4, iar ultimul este

$$(\alpha^2 + \beta^2)^2 - (2a^2 - 1)\alpha^2 - (2a^2 + 1)\beta^2 =$$
$$= (\alpha^2 + \beta^2)^2 - 2a^2(\alpha^2 + \beta^2) + \alpha^2 - \beta^2 = (\alpha^2 + \beta^2 - a^2)^2.$$

Deoarece $\alpha^2 - \beta^2 = a^4$, avem deci

$$\|MM_1\| \cdot \|MM_2\| \cdot \|MM_3\| \cdot \|MM_4\| = (\alpha^2 + \beta^2 - a^2)^2,$$

unde membrul al doilea reprezintă pătratul puterii punctului față de cercul dat, adică puterea a patra a lungimii tangentei dusă din M la cerc.

T_2 26. *O secantă variabilă trece prin vîrful unei parabole. Să se afle locul geometric al centrelor de greutate ale segmentelor de parabolă determinate de această secantă.*

I. Ionescu, G. M. vol. XIV

Soluție. Fie $y^2 = 2px$ ecuația parabolei ($p > 0$) și $y = \lambda x$ ecuația secantei variabile ($\lambda \in \mathbf{R}\setminus\{0\}$). Notînd cu M cel de-al doilea punct de intersecție a secantei cu parabola (M diferit de origine) și rezolvînd sistemul dat de ecuațiile celor două curbe, obținem $M(2p/\lambda^2, 2p/\lambda)$. Notînd cu $G(\alpha, \beta)$ centrul de greutate al segmentului de parabolă, vom avea

$$\alpha = \frac{\int_0^{2p/\lambda^2} x(\sqrt{2px} - \lambda x)\,dx}{\int_0^{2p/\lambda^2} (\sqrt{2px} - \lambda x)\,dx}; \quad \beta = \frac{1}{2}\cdot\frac{\int_0^{2p/\lambda^2} (2px - \lambda^2x^2)\,dx}{\int_0^{2p/\lambda^2} (\sqrt{2px} - \lambda x)\,dx}, \text{ dacă } \lambda > 0,$$

respectiv

$$\alpha = \frac{\int_0^{2p/\lambda^2} x[\lambda x - (-\sqrt{2px})]\,dx}{\int_0^{2p/\lambda^2} [\lambda x - (-\sqrt{2px})]\,dx}; \quad \beta = \frac{1}{2}\cdot\frac{\int_0^{2p/\lambda^2} (\lambda^2x^2 - 2px)\,dx}{\int_0^{2p/\lambda^2} [\lambda x - (-\sqrt{2px})]\,dx},$$

dacă $\lambda < 0$.

În ambele cazuri ($\lambda > 0$ și $\lambda < 0$) se obține după efectuarea calculelor

$$\alpha = \frac{4p}{5\lambda^2}, \quad \beta = \frac{p}{\lambda}.$$

Rezultă prin eliminarea lui λ, ecuația $\beta^2 = \frac{5}{4} p\alpha$, ceea ce arată că locul geometric al lui G este tot o parabolă, avînd același vîrf și aceeași axă de simetrie cu parabola inițială.

T$_2$ 27. *Fie triunghiul ABC în care $m(\widehat{B}) \leqslant 90°$, $m(\widehat{C}) < 90°$ și considerăm înălțimea $|AD|$. Pe segmentul $[DC]$ se ia punctul mobil M. Cercul cu centrul în M și care trece prin C, intersectează dreapta AD în punctele N și N'. Fie P și P' respectiv simetricele lui M față de NC și $N'C$. Să se afle locul geometric al punctelor P și P'. Cum trebuie să varieze punctul M pentru ca problema să aibă sens?*

Marcel Țena, G.M. 5/1971.

Soluție. Datorită condițiilor din enunț rezultă $D \in [BC]$. Perpendiculara MP dusă din centrul cercului pe coarda $|CN|$ trece prin mijlocul acestei coarde. Ca urmare în patrulaterul $MCPN$ diagonalele sînt perpendiculare și se înjumătățesc, deci acest patrulater este un romb. Rezultă că NP este paralelă cu MC, deci NP este perpendiculară pe AD. Cum $|NP| \equiv |PC|$, punctul P este egal depărtat de dreapta AD și punctul C, deci el se află pe parabola de directoare AD și focar C. Notînd cu R mijlocul segmentului $|DC|$, problema are sens numai cînd M descrie segmentul $[DR]$, căci dacă $M \in |RC|$ atunci cercul cu centrul în M și care trece prin C, nu mai intersectează dreapta AD. Cînd $M = R$, atunci $P = R$; cînd $M = D$, atunci $P = P_0$, unde P_0 este al patrulea vîrf al pătratului cu una din laturi $|CD|$, P_0 fiind în același semiplan cu P față de dreapta BC. Prin urmare locul geometric al lui P este arcul de parabolă $\widehat{RP_0}$. Prin simetrie față de BC, locul geometric al punctului P' va fi arcul de parabolă $\widehat{RP_0'}$, unde P_0' este simetricul lui P_0 față de BC. Cele două locuri sînt arce ale aceleiași parabole, avînd directoarea AD, axa de simetrie BC, focarul C și vîrful R.

T$_2$ 28. *Să se determine un punct M pe ipotenuza $|BC|$ a unui triunghi dreptunghic ABC, astfel încît lungimea segmentului $|AM|$ să fie media armonică a lungimilor segmentelor $|BM|$ și $|MC|$.*

Gh. D. Simionescu, G. M. vol. XLIV

Soluție. Condiția din enunț se scrie

$$\frac{2}{\|AM\|} = \frac{1}{\|BM\|} + \frac{1}{\|CM\|}.$$

Fie $\alpha = m(\widehat{BAM})$. Deci $\| BM \| = \| AM \| \frac{\sin \alpha}{\sin B}$, $\| CM \| = \| AM \| \frac{\cos \alpha}{\cos B}$.

Se înlocuiește și obținem

$$\frac{2}{\| AM \|} = \frac{\sin B}{\| AM \| \sin \alpha} + \frac{\cos B}{\| AM \| \cos \alpha}$$

sau

$$2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin B \cos \alpha + \cos B \sin \alpha,$$

$$\sin 2\alpha = \sin (B + \alpha).$$

Soluțiile ecuației sînt

$$2\alpha = 2k\pi + B + \alpha \quad \text{de unde} \quad \alpha = B + 2k\pi, \tag{1}$$

respectiv

$$2\alpha = 2k\pi + \pi - (B + \alpha) \text{ de unde } \alpha = \frac{\pi - B + 2k\pi}{3}. \tag{2}$$

Din prima soluție rezultă $\alpha = B$, deci $|AM|$ este mediana.
A doua soluție ne dă:

pentru $k = 0 \Rightarrow \alpha_0 = (\pi - B)/3$

pentru $k = 1 \Rightarrow \alpha_1 = \pi - B/3$;

pentru $k = 2 \Rightarrow \alpha_2 = \pi + (2\pi - B)/3 = 3\pi/2 + C/3$.

Să notăm cu M_0, M_1, M_2 punctele de pe $|BC|$ corespunzătoare soluțiilor α_0, α_1, α_2, iar prelungirile laturilor $|AB|$, $|AC|$ cu $|BX$ și $|CY$.
Rezultă următoarele:

AM_0 e paralelă dreptei ce face cu BX unghiul de măsură $(\pi - B)/3$;
AM_1 este paralelă dreptei ce face cu BA unghiul de măsură $B/3$;
AM_2 este paralelă dreptei ce face cu CA unghiul de măsură $C/3$.

T$_2$ 29. *Fie M un punct oarecare în planul triunghiului ABC. Să se arate că tangentele în punctul M, la elipsele care trec prin M, de focare A și B, B și C și respectiv C și A, intersectează dreptele AB, BC, CA în puncte coliniare.*

Marius Burtea, G. M. 3/1980

Soluție. Pentru elipsa de focare A și B și care trece prin M, tangenta în M este bisectoarea exterioară a unghiului $\widehat{AMB}$, deci va intersecta dreapta AB într-un punct exterior segmentului $|AB|$, care împarte acest segment în raportul $\frac{\| AM \|}{\| MB \|}$ (teorema bisectoarei exterioare). Analog pentru cele-

lalte două elipse, iar apoi se aplică reciproca teofemei lui Menelaus (în cazul în care punctele sînt exterioare laturilor triunghiului).

T$_2$ 30. *Să se afle locul geometric al centrelor hiperbolelor echilatere circumscrise unui triunghi dat ABC.*

G. M. 5/1915

Soluție. Luăm ca axă Ox dreapta AC și ca axă Oy perpendiculara din B pe AC. Însemnînd cu $A(a, 0)$, $B(0, b)$, $C(c, 0)$ coordonatele vîrfurilor triunghiului, ecuația unei hiperbole echilatere este

$$x^2 - y^2 + 2\lambda xy + 2\alpha x + 2\beta y + \mu = 0.$$

Scriind că trece prin vîrfurile A, B, C avem

$$a^2 + 2\alpha a + \mu = 0, \quad c^2 + 2\alpha c + \mu = 0, \quad b^2 + 2\beta b + \mu = 0, \text{ de unde}$$

$$2\alpha = -(a + c), \quad 2\beta = \frac{b^2 - ac}{ab}, \quad \mu = ac.$$

Ecuația hiperbolelor considerate este

$$f(x, y) \overset{\text{def}}{=\!=} x^2 - y^2 + 2\lambda xy - (a + c)x + \frac{b^2 - ac}{b} y + ac = 0.$$

Locul centrelor se obține eliminînd pe λ între ecuațiile

$$f'_x = 2x + 2\lambda y - (a + c) = 0, \quad f'_y = -2y + 2x + \frac{b^2 - ac}{b} = 0.$$

Rezultă $x^2 + y^2 + \dfrac{b^2 - ac}{2b} x + \dfrac{a + c}{2} y = 0$, ceea ce probează că acest loc este un cerc ce trece prin piciorul înălțimii din B. Analog va trece prin picioarele celorlalte înălțimi deci locul este cefcul lui Euler al triunghiului ABC.

T$_2$ 31. *Să se găsească suma seriei*

$$\frac{1}{1^2 \cdot 2^2} - \frac{1}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{1}{3^2 \cdot 4^2} - \frac{1}{4^2 \cdot 5^2} + \frac{1}{5^2 \cdot 6^2} - \dots$$

S. Gall, G. M. vol. XII

Soluție. Șirul $a_n = \dfrac{1}{n^2(n + 1)^2}$ este cu termeni pozitivi și converge descrescător la zero. Conform criteriului de convergență al lui Leibniz re-

zultă că seria $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$, adică cea din enunț, este convergentă. Fie S suma acesteia. În identitatea

$$\frac{1}{n^2(n+1)^2} = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1^2}\right)^2 = \frac{1}{n^2} - 2 \cdot \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)^2}$$

făcînd $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$ și scriind egalitățile înmulțite din două în două cu -1 avem

$$\frac{1}{1^2 \cdot 2^2} = \frac{1}{1^2} - 2 \cdot \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2^2},$$

$$-\frac{1}{2^2 \cdot 3^2} = -\frac{1}{2^2} + 2 \cdot \frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{3^2},$$

$$\frac{1}{3^2 \cdot 4^2} = \frac{1}{3^2} - 2 \cdot \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4^2},$$

$$-\frac{1}{4^2 \cdot 5^2} = -\frac{1}{4^2} + 2 \cdot \frac{1}{4 \cdot 5} - \frac{1}{5^2},$$

. . . . . .

Adunînd aceste egalități obținem

$$S = 1 - 2\left(\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{4 \cdot 5} + \cdots\right) =$$

$$= 1 - 2\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots\right) =$$

$$= 1 - 2\left[1 - 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \cdots\right)\right] = -1 + 4S_1$$

unde $S_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \cdots$

Dezvoltînd în serie de puteri funcția $\ln(1+x)$ obținem (pentru $x > -1$):

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

și luînd $x = 1$ avem $\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots = 1 - S_1$.

Rezultă $S_1 = 1 - \ln 2$ și deci $S = -1 + 4(1 - \ln 2) = 3 - 4 \ln 2$.

T$_2$ 32. *Dacă* $(a_n)_{n\geq 0}$ *este un şir de numere reale astfel încît şirul* $(a_{n+1} - a_n)_{n\geq 0}$ *este mărginit să se calculeze*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n^{1+\alpha}},$$

unde α *este un număr real strict pozitiv.*

D. Acu, G. M. 7/1982

Soluţie. Fie $M > 0$ astfel încît $|a_{k+1} - a_k| \leq M$, $(\forall)\, k \geq 0$, deci

$$-M \leq a_{k+1} - a_k \leq M,\ (\forall)\, k \geq 0.$$

Făcînd $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ şi adunînd egalităţile obţinute, găsim

$$-nM \leq a_n - a_0 \leq nM \text{ sau}$$

$$a_0 - nM \leq a_n \leq a_0 + nM, \text{ de unde}$$

$$\frac{a_0}{n^{1+\alpha}} - \frac{M}{n^\alpha} \leq \frac{a_n}{n^{1+\alpha}} \leq \frac{a_0}{n^{1+\alpha}} + \frac{M}{n^\alpha}$$

şi prin trecere la limită, rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{n^{1+\alpha}} = 0$.

T$_2$ 33. *Să se demonstreze că seria*

$$S_k = \frac{1}{C_{k+1}^k} + \frac{1}{C_{k+2}^k} + \cdots + \frac{1}{C_{k+n}^k} + \ldots,\ k \geq 2$$

este convergentă, apoi să se calculeze suma seriei.

George Oboroceanu, G. M.-A, 11/1970

Soluţie. Suma parţială de ordinul n este

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_{k+i}^k} = k! \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(i+1)(i+2)\ldots(i+k)} =$$

$$= \frac{k!}{k-1} \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{(i+1)(i+2)\ldots(i+k-1)} - \frac{1}{(i+2)(i+3)\ldots(i+k)} \right] =$$

$$= \frac{k!}{k-1} \cdot \left[\frac{1}{k!} - \frac{1}{(n+2)(n+3)\ldots(n+k)} \right].$$

Rezultă imediat că şirul sumelor parţiale este convergent şi are limita $\dfrac{1}{k-1}$.

Deducem că seria este convergentă şi are suma $\dfrac{1}{k-1}$.

T₂ 34. *Să se arate că*

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{4}{5}+\frac{8}{65}+\frac{12}{325}+\cdots+\frac{4n}{4n^4+1}\right)=1;$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{5}+\frac{3}{65}+\frac{11}{325}+\cdots+\frac{2n^2-2n-1}{4n^4+1}\right)=0.$

C. Berdan, G. M. 2/1965

Soluție. Să notăm de fiecare dată termenul general al sumei cu T_n.

a) $T_n=\frac{4n}{4n^4+1}=\frac{1}{2n^2-2n+1}-\frac{1}{2n^2+2n+1}=$

$$=\frac{1}{2n^2-2n+1}-\frac{1}{2(n+1)^2-2(n+1)+1}.$$

Deci

$T_n=f(n)-f(n+1)$ unde $f(n)=\frac{1}{2n^2-2n+1}$.

Avem

$$\sum_{k=1}^{n}T_k=\sum_{k=1}^{n}(f(k)-f(k+1))=f(1)-f(n+1)=1-\frac{1}{2n^2+2n+1}.$$

Rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}T_k=1$.

b) $T_n=\frac{2n^2-2n-1}{4n^4+1}=\frac{n-1}{2n^2-2n+1}-\frac{n}{2(n+1)^2-2(n+1)+1}.$

Deci

$$\sum_{k=1}^{n}T_k=0-\frac{n}{2n^2+2n+1}=-\frac{n}{2n^2+2n+1}.$$

Rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}T_k=0$.

T₂ 35. *Să se studieze seria cu termenul general*

$$u_n=\frac{1}{n^\alpha}\sin\frac{\pi}{n}-\frac{1}{(n+1)^\alpha}\sin\frac{\pi}{n+1}$$

după diferitele valori ale lui α.

Gh. Th. Gheorghiu, G. M. 12/1941

Soluție. Fie $v_n = \frac{1}{n^\alpha} \sin \frac{\pi}{n}$, care se mai scrie

$$v_n = \pi \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} \cdot \frac{1}{n^{\alpha+1}}, \text{ deci } \lim_{n\to\infty} v_n = \pi \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\alpha+1}},$$

deoarece

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} = 1.$$

Deducem următoarele concluzii pentru șirul $\{v_n\}$:

$$\text{pentru } \alpha > -1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} v_n = 0;$$

$$\text{pentru } \alpha = -1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} v_n = \pi;$$

$$\text{pentru } \alpha < -1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} v_n = \infty.$$

Cum $u_n = v_n - v_{n+1}$ rezultă că suma parțială de ordinul $n-1$, a seriei este $\sum_{k=1}^{n-1} u_k = v_1 - v_n = -v_n$.

Așadar, seria propusă este convergentă pentru $\alpha \geqslant -1$ și **divergentă** pentru $\alpha < -1$.

T_2 36. *Să se afle limita șirului cu termenul general*

$$2^n \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}},$$

cînd n tinde către infinit, numărul radicalilor fiind n.

B. Săvulescu, G. M./1965

Soluție. Termenii șirului se scriu $2^2\sqrt{2-\sqrt{3}}$, $2^3\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$, $2^4\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$, ..., $2^n\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}$, ...

Dar $\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$, $\sin\frac{\pi}{24}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{2}$, $\sin\frac{\pi}{48}=$

$$=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}{2},\ \ldots$$

Deci şirul devine (expresia termenului general poate fi uşor stabilită prin inducţie):

$$2^3\sin\frac{\pi}{12},\ 2^4\sin\frac{\pi}{24},\ 2^5\sin\frac{\pi}{48},\ \ldots,\ 2^{n+1}\sin\frac{\pi}{3\cdot 2^n},\ \ldots\ .$$

Deci $\lim\limits_{n\to\infty} 2^{n+1}\cdot\sin\frac{\pi}{3\cdot 2^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{3\cdot 2^n}}{\frac{\pi}{3\cdot 2^n}}\cdot\frac{2\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$.

T₂ 37. *Fie* $(1+\sqrt{2})^n=A_n+B_n\sqrt{2}$ unde $n\in\mathbf{N}$, $A_n, B_n\in\mathbf{Q}$. *Să se calculeze*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{B_n}.$$

Lucian Tufescu, G. M. 7/1979

Soluţie. Avem $$(1+\sqrt{2})^n=A_n+B_n\sqrt{2}. \tag{1}$$

Ţinînd seama de formula binomului lui Newton, rezultă

$$(1-\sqrt{2})^n=A_n-B_n\cdot\sqrt{2}. \tag{2}$$

Din (1) şi (2) obţinem

$$A_n=\frac{(1+\sqrt{2})^n+(1-\sqrt{2})^n}{2}\ \text{şi}\ B_n=\frac{(1+\sqrt{2})^n-(1-\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}}.$$

Atunci putem scrie

$$\frac{A_n}{B_n}=\sqrt{2}\cdot\frac{(1+\sqrt{2})^n+(1-\sqrt{2})^n}{(1+\sqrt{2})^n-(1-\sqrt{2})^n}=\sqrt{2}\cdot\frac{1+\left(\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)^n}{1-\left(\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)^n},$$

deci $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{A_n}{B_n}=\sqrt{2}$.

T₂ 38. *Fie p un număr real mai mare ca 1. Să se arate că*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{\alpha=1}^{\infty}\left[\frac{n}{p^\alpha}\right]=\frac{1}{p-1}.$$

N. N. Burcea, G. M. 2–3/1982

Soluție. Avem $\dfrac{n}{p^\alpha}-1<\left[\dfrac{n}{p^\alpha}\right]\leqslant\dfrac{n}{p^\alpha}$. (1)

Numărul de termeni al sumei este finit, mai precis este egal cu numărul acelor indici de sumare α pentru care $p^\alpha\leqslant n$, adică $\left[\dfrac{\ln n}{\ln p}\right]$.

Însumînd inegalitățile (1) vom obține

$$n\cdot\frac{\frac{1}{p}\left(1-\frac{1}{p^{[\ln n/\ln p]}}\right)}{1-\frac{1}{p}}-\left[\frac{\ln n}{\ln p}\right]<\sum_{\alpha=1}^{\infty}\left[\frac{n}{p^\alpha}\right]\leqslant n\cdot\frac{\frac{1}{p}\left(1-\frac{1}{p^{[\ln n/\ln p]}}\right)}{1-\frac{1}{p}}.$$

Împărțind prin n, trecînd la limită cînd $n\to\infty$ și ținînd seama că $\left[\dfrac{\ln n}{\ln p}\right]\to\infty$, iar $\dfrac{1}{n}\left[\dfrac{\ln n}{\ln p}\right]\to 0$, se obține rezultatul dorit.

T₂ 39. *Să se calculeze* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\cdot\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}\cos\dfrac{i}{n}\cdot\cos\dfrac{j}{n}$.

Romeo Ilie, G. M. 2–3/1982

Soluție. Avem egalitatea $\dfrac{1}{n^2}\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}\cos\dfrac{i}{n}\cos\dfrac{j}{n}=$

$$=\frac{1}{2n^2}\cdot\left[\left(\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{k}{n}\right)^2-\sum_{k=1}^{n}\cos^2\frac{k}{n}\right]. \quad (1)$$

Dar

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{k}{n}\right)^2=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{k}{n}\right)^2=\left(\int_0^1\cos x\,dx\right)^2=$$

$$=\sin^2 1.\ \text{Pe de altă parte}\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\cos^2\frac{k}{n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\cos^2\frac{k}{n}\right)=0\cdot\int_0^1\cos^2 x\,dx=0.$$

Deci, conform cu (1), rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n} \cos\frac{i}{n} \cos\frac{j}{n} = \frac{\sin^2 1}{2}$.

T$_2$40. *Ecuația* $x^n + x - 1 = 0$, $n \geqslant 2$ *are o singură rădăcină reală în* $[0, 1]$. *Fie* x_n *această rădăcină. Să se arate că șirul* $(x_n)_{n\geqslant 2}$ *este convergent și să i se afle limita.*

Alexandru Leonte, G. M. 6/1978.

Soluție. Deoarece funcția $\tilde{f}_n(x) = x^n + x - 1$, $n \geqslant 2$ este strict crescătoare pe $[0, \infty)$, deci și pe $[0, 1]$ și cum $\tilde{f}_n(0) \cdot \tilde{f}_n(1) < 0$, rezultă că ecuația $\tilde{f}_n(x) = 0$ are într-adevăr o singură rădăcină reală pe $[0, 1]$. Șirul $(x_n)_n$ este mărginit, avînd termenii în intervalul $[0, 1]$. Arătăm că este un șir monoton crescător. Fie $f_n : [0,1] \to \mathbf{R}$ $f_n(x) = x^n + x - 1$, $(n \geqslant 2)$. Funcția f_n are derivata strict pozitivă pe $[0, 1]$, deci va fi strict crescătoare, cum de altfel am mai menționat. Să observăm că:

$$x_{n+1} = 1 - x_{n+1}^{n+1} \geqslant 1 - x_{n+1}^n \text{ adică } x_{n+1}^n + x_{n+1} - 1 \geqslant 0$$

sau $f_n(x_{n+1}) \geqslant 0 = f_n(x_n)$, prin urmare $x_{n+1} \geqslant x_n$, $(\forall)\, n \geqslant 2$.

Deci șirul $(x_n)_n$ este convergent. Deoarece $x_n \leqslant 1$ avem

$$l = \lim_{n\to\infty} x_n \leqslant 1.$$

Dacă am avea $l < 1$, trecînd la limită în egalitatea $x_n = 1 - x_n^n$ am obține $l = 1 - 0 = 1$, ceea ce nu este adevărat, deoarece am presupus $l < 1$, Rezultă, deci, $l = 1$.

T$_2$41. *Să se determine natura seriei cu termeni pozitivi, definiți de relația de recurență*

$$\frac{2}{u_n} = \frac{1}{u_{n+1}} + \frac{1}{u_{n-1}},$$

unde u_n *este termenul general,* u_0 *și* u_1 *fiind numere strict pozitive date.*

I. I. Țițeica, G. M. vol. XLV

Soluție. Din relația de recurență dată se deduce

$$\frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_{n+1}} = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{1}{u_{n-2}} - \frac{1}{u_{n-1}} = \cdots = \frac{1}{u_0} - \frac{1}{u_1}.$$

Deci

$$\frac{1}{u_0}-\frac{1}{u_1}=\frac{1}{u_0}-\frac{1}{u_1},$$

$$\frac{1}{u_1}-\frac{1}{u_2}=\frac{1}{u_0}-\frac{1}{u_1},$$

$$\frac{1}{u_2}-\frac{1}{u_3}=\frac{1}{u_0}-\frac{1}{u_1},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{u_{n-1}}-\frac{1}{u_n}=\frac{1}{u_0}-\frac{1}{u_1}.$$

Adunînd relaţiile se obţine

$$\frac{1}{u_0}-\frac{1}{u_n}=n\left(\frac{1}{u_0}-\frac{1}{u_1}\right) \text{ sau } u_n=\frac{u_0u_1}{n(u_0-u_1)+u_1}.$$

Avem două cazuri:

a) $u_0 \neq u_1$; atunci seria este de aceeaşi natură cu seria armonică, deci divergentă (se foloseşte criteriul de comparaţie la limită).

b) $u_0 = u_1$; atunci seria este divergentă (căci termenul general nu tinde la zero).

Comentariu. Se ştie că oricare trei termeni consecutivi ai seriei armonice satisfac relaţia din enunţul problemei, adică sînt în progresie armonică. Problema este o generalizare, arătînd că orice serie care are trei termeni consecutivi oarecare în progresie armonică este divergentă. Pentru ca seria să fie cu termeni pozitivi, e neapărat nevoie ca $u_0 > u_1$. Dar chiar dacă $u_0 < u_1$, seria este tot divergentă, căci de la un anumit rang toţi termenii sînt negativi, criteriul comparaţiei la limită rămînînd astfel valabil.

T$_2$ 42. *Fie $A \subset \mathbf{R}$ o mulţime. Atunci A este un interval compact (închis şi mărginit) $\Leftrightarrow$ oricare ar fi funcţia continuă $f : A \to \mathbf{R}$ rezultă că $f(A)$ este interval compact.*

Gh. Sireţchi, G. M. 9/1978

Soluţie. ($\Rightarrow$) Dacă A este interval compact şi $f : A \to \mathbf{R}$ este o funcţie continuă, atunci f are proprietatea lui Darboux, deci $f(A)$ este tot un interval; conform teoremei Weierstrass funcţia f este mărginită şi îşi atinge marginile, adică altfel spus intervalul $f(A)$ este compact.

($\Leftarrow$) Presupunem că oricare ar fi funcţia continuă $f : A \to \mathbf{R}$ rezultă că $f(A)$ este interval compact.

Luăm atunci funcția $f : A \to \mathbf{R}$, $f(x) = x$ care este evident continuă; avem $f(A) = A =$ interval compact.

Comentariu. Putem rezolva chiar o problemă mai generală și anume: Fie $A \subset \mathbf{R}$ o mulțime. Atunci A este compactă $\Leftrightarrow (\forall) f : A \to \mathbf{R}$ continuă, rezultă că $f(A)$ este mărginită. Implicația ($\Rightarrow$) se face ca mai înainte. Vom face acum implicația:

($\Leftarrow$) Presupunem că oricare ar fi funcția continuă $f : A \to \mathbf{R}$ rezultă că $f(A)$ este mărginită.

Fie $f_1 : A \to \mathrm{R}$, $f_1(x) = x$, care este evident continuă; avem $f_1(A) = A$. Dar conform ipotezei $f_1(A)$ este mărginită, deci A este mărginită. Mai rămîne să arătăm că A este mulțime închisă.

Să presupunem prin absurd că A nu este închisă, deci $(\exists)\ x_0 \in \bar{A}$, cu $x_0 \notin A$. Fie funcția $f_2 : A \to \mathbf{R}$, $f_2(x) = \dfrac{1}{x - x_0}$, deoarece $x_0 \notin A$, funcția f_2 este definită pe A și evident, continuă. Dar $f_2(A)$ nu este mărginită, deoarece pentru un șir $\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}}$, $x_n \in A$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}$, $x_n \to x_0$, avem $|f(x_n)| = \dfrac{1}{|x_n - x_0|}$ care tinde la $+\infty$.

Deci am obținut o contradicție cu ipoteza implicației. Cu aceasta am arătat că A este închisă și rezultă că A este compactă.

T$_2$ 43. *Să se demonstreze că șirul* $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ *cu* $x_n = 1 + \dfrac{1}{2} - \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{2}{6} + \cdots + \dfrac{1}{3n-2} + \dfrac{1}{3n-1} - \dfrac{2}{3n}$ *este convergent și* $\lim\limits_{n \to \infty} x_n \in [1, 2]$.

I. Tomescu, G. M. 11/1965

Soluție. Termenul general al șirului se poate scrie:

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{3n} - 3\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{3n}\right) =$$

$$= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{3n}.$$

Să demonstrăm că șirul $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ este monoton crescător, adică $x_{n+1} - x_n > 0$ $(\forall)\ n \in \mathbf{N}$, ceea ce se scrie:

$$\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{3n} + \frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+2} + \frac{1}{3n+3} -$$

$$- \left(\frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{3n}\right) = \frac{1}{3(n+1)} + \frac{1}{3n+2} + \frac{1}{3n+1} - \frac{1}{n+1} =$$

$$= \frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+2} - \frac{2}{3(n+1)} = \frac{9n+5}{3(n+1)(3n+1)(3n+2)} > 0.$$

Însă $\frac{2n}{3n} < x_n < \frac{2n}{n+1}$ oricare ar fi $n \in \mathbf{N}$, sau $\frac{2}{3} < x_n < 2$, deci șirul este și mărginit. Șirul este convergent, fiind monoton și mărginit.

Pentru a demonstra că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \geqslant 1$ folosim faptul că media aritmetică a n numere strict pozitive este mai mare decît media lor armonică, adică:

$$\frac{x}{2n} = \frac{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{3n}}{2n} \geqslant \frac{2n}{(n+1) + \ldots + (3n)} =$$

$$= \frac{2n}{4n^2 + n} = \frac{2}{4n+1}.$$

Deci $x_n \geqslant \frac{4n}{4n+1}$, de unde $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \geqslant 1$. Cum $x_n < 2$, $(\forall)\, n \in \mathbf{N}$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \leqslant 2$.

În concluzie $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \in [1, 2]$. Cu ajutorul integralei definite se poate calcula limita șirului și ea este $\ln 3 \approx 1{,}09861$.

T$_2$ 44. *Se consideră șirul cu termenul general u_n, astfel ca $u_n = pu_{n-1} + u_{n-2}$, $u_0 = 0$, $u_1 = p \neq 0$ p fiind un număr dat.*
Să se demonstreze relația

$$u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2 = \frac{1}{p} u_n u_{n+1}.$$

M. Ghermănescu, G. M. vol. XLVI

Soluția I. Înmulțim relația $u_i = p\, u_{i-1} + u_{i-2}$ cu u_{i-1} și adunăm relațiile obținute dînd lui i valorile 2, 3, ..., n, $n+1$.

Se obține

$$\sum_{i=1}^{n} u_i \cdot u_{i+1} = p \cdot \sum_{i=1}^{n} u_i^2 + \sum_{i=1}^{n} u_i u_{i-1},$$

ceea ce duce la rezultatul cerut.

Soluția II. Se observă că $u_n \cdot u_{n+1} = u_n(pu_n + u_{n-1}) = pu_n^2 + u_n u_{n-1}$.
Relația din enunț devine

$$u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_{n-1}^2 = \frac{1}{p} u_n u_{n-1}.$$

Se procedează la fel cu membrul al doilea al relației și din aproape în aproape se ajunge la $u_1^2 = \frac{1}{p} u_2 u_1$, care este o identitate în condițiile ipotezei.

Soluţia III. Rezolvare prin metoda inducţiei complete. Se vede uşor că relaţia este adevărată pentru $n = 1$ şi $n = 2$. Se presupune adevărată pentru indicele n şi se arată că este adevărată pentru $n + 1$. Într-adevăr:

$$u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2 + u_{n+1}^2 = \frac{1}{p} u_n u_{n+1} + u_{n+1}^2 = \frac{1}{p} u_{n+1}(u_n + p u_{n+1}) =$$

$$= \frac{1}{p} u_{n+1} \cdot u_{n+2}.$$

T$_2$ 45. *Să se arate că funcţia continuă $f:: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ este periodică, de perioadă ω, dacă şi numai dacă pentru orice $x \in \mathbf{R}$, avem*

$$\int_x^{x+\omega} f(t)\, dt = \text{constant}.$$

Dan Radu, G. M.-A. 4/1970

Soluţie. Dacă f este periodică, de perioadă ω, avem $f(x + \omega) = f(x)$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$,

Fie $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o primitivă a funcţiei f şi să notăm $g(x) = \int_x^{x+\omega} f(t)dt$. Atunci $g(x) = F(x + \omega) - F(x)$, ceea ce arată că g este o funcţie derivabilă; în plus, avem $g'(x) = F'(x + \omega) - F'(x) = f(x + \omega) - f(x) = 0$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$, deci g este o funcţie constantă. Reciproc, dacă $\int_x^{x+\omega} f(t)\, dt = \text{constant}$, înseamnă că $g(x) = \text{constant}$, deci $F(x + \omega) - F(x) = \text{constant}$. Derivînd, obţinem $f(x + \omega) - f(x) = 0$, adică f este periodică de perioadă ω.

T$_2$ 46. *Să se găsească limita şirului*

$$a_n = \frac{1 + 2\sqrt{2} + 3\sqrt{3} + \ldots + n\sqrt{n}}{n^2\sqrt{n}}.$$

N. Abramescu, G. M. vol. XI

Soluţie. Fie $p > 0$ şi să considerăm şirul mai general

$$b_n = \frac{1^p + 2^p + \ldots + n^p}{n^{p+1}}.$$

Considerăm funcţia $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^p$, care este evident integrabilă (fiind continuă).

Considerăm şirul de dihiziuni

$$\Delta_n = \left(0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\right) \quad (n \in \mathbf{N}^*)$$

de normă tinzînd la zero și punctele intermediare:

$$\xi_i^n \in \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right], \quad \xi_i^n = \frac{i}{n} \quad (1 \leqslant i \leqslant n).$$

Suma Riemann asociată diviziunii Δ_n și punctelor ξ_i^n va fi

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i^n)\left(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{i^p}{n^p} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^{p+1}} \cdot \sum_{i=1}^{n} i^p = b_n.$$

Trecînd la limită după $n \to \infty$, vom avea

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \int_0^1 x^p dx = \frac{1}{p+1}.$$

Pentru $p = \frac{3}{2}$ șirul b_n devine șirul a_n, deci

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{\frac{3}{2}+1} = \frac{2}{5}.$$

T$_2$ 47. *Fie* $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ *derivabilă pe* (a, b), *continuă în* a *și* b *și* $f(x) \neq 0$, $(\forall)\ x \in (a, b)$. *Să se arate că există* $\theta \in (a, b)$ *astfel încît*

$$\frac{f'(\theta)}{f(\theta)} = \frac{1}{a-\theta} + \frac{1}{b-\theta}.$$

D. Andrica, G. M. 1/1975

Soluție. Considerăm funcția $g : [a, b] \to \mathbf{R}$ definită prin

$$g(x) = (x-a)(x-b)f(x).$$

Observăm că g este derivabilă pe (a, b), continuă pe $[a, b]$ și $g(a) = g(b) = 0$. Aplicînd teorema lui Rolle funcției g, există $\theta \in (a, b)$ cu $g'(\theta) = 0$. Dar $g'(x) = (x-b)f(x) + (x-a)f(x) + (x-a)(x-b)f'(x)$. Am obținut deci $(\theta-b)f(\theta) + (\theta-a)f(\theta) + (\theta-a)(\theta-b)f'(\theta) = 0$ sau, împărțind prin $(\theta-a)(\theta-b)f(\theta)$ avem

$$\frac{f'(\theta)}{f(\theta)} = \frac{1}{a-\theta} + \frac{1}{b-\theta}.$$

T$_2$ 48. *Să se arate că dacă* $a \in \mathbf{R}$, $|a| > 1$, *atunci*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{an+b}{a^n} = \frac{a^2+ab-b}{(a-1)^2}.$$

Ovidiu Mocanu, G. M. 7/1965

Soluție. Avem $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (x^n)' = \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n\right)' =$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(x \cdot \frac{1-x^n}{1-x}\right)' = \lim_{n\to\infty} \frac{[1-(n+1)x^n](1-x)+x-x^{n+1}}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2},$$

în ipoteza că $x \in \mathbf{R}$, $|x| < 1$ (s-a ținut cont de faptul că pentru $|x| < 1$ seria Σx^n este uniform convergentă, deci se poate deriva termen cu termen).

Deci

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{a^{n-1}} = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{a}\right)^2} = \frac{a^2}{(a-1)^2}.$$

De asemenea

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{a}} = \frac{1}{a-1}.$$

Rezultă că

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{an+b}{a^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{a^{n-1}} + b\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^n} = \frac{a^2}{(a-1)^2} + \frac{b}{a-1} = \frac{a^2+ab-b}{(a-1)^2}.$$

T_2 49. *Fie P un polinom cu coeficienți reali de gradul n. Să se arate că* ***avem relația***

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t e^{-x} P(x)\,dx = P(0) + P'(0) + \ldots + P^{(n)}(0).$$

Gh. Siretchi G. M. 4/1977

Soluție. Integrînd succesiv prin părți avem

$$\int_0^t e^{-x} P(x)\,dx = -e^{-x}P(x)\Big|_0^t + \int_0^t e^{-x}\,P'(x)\,dx =$$

$$= -e^{-x}P(x)\Big|_0^t - e^{-x}P'(x)\Big|_0^t + \int_0^t e^{-x}P''(x)\,dx = \ldots =$$

$$= -e^{x}P(x)\Big|_0^t - e^{-x}P'(x)\Big|_0^t - \ldots - e^{-x}P^{(n)}(x)\Big|_0^t =$$

$$= - e^{-x}[P(x) + P'(x) + \ldots + P^{(n)}(x)]\Big|_0^t =$$

$$= - e^{-t}[P(t) + P'(t) + \ldots + P^{(n)}(t)] +$$

$$+ [P(0) + P'(0) + \ldots + P^{(n)}(0)],$$

astfel că la limită se obține

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t e^{-x} P(x)\, dx = P(0) + P'(0) + + \ldots + P^{(n)}(0),$$

ținînd seamă de faptul că $\lim_{t\to\infty} e^{-t}\ P^{(k)}(t) = 0$

pentru $k = 0,1, \ldots, n$.

Capitolul V

PROBLEME PENTRU CONCURSURI (CO)

Introducere

Concursurile apar oricărui tînăr în calea spre o carieră competitivă. Printre acestea cele de matematică sînt considerate grele și greu de evitat. Într-adevăr, matematica a devenit materie de concurs în numeroase specialități de nivel mediu sau superior. Avînd în vedere cele două capitole precedente privitoare la treptele întîi și a doua de liceu, am căutat să ușurăm cititorilor pregătirea concursurilor respective. În acest capitol însă nu urmărim astfel de obiectiv, fiindcă el se adresează în special celor care simt sau așteaptă chemarea pentru matematică, avînd un îndemn lăuntric spre cunoașterea și stăpînirea ei. Prin urmare, am selecționat probleme de concursuri în care se întrec competitiv concurenți, care au parcurs etape de pregătire, ca cele prevăzute în capitolele precedente. Astfel cititorul trebuie să se aștepte la metode, instrumente, tehnici și moduri de abordare de nivel mai ridicat ca cel al unui antrenament destinat unei întreceri.

Ca și în cele ce precedă, începem prezentarea cu teoria numerelor, care oferă probleme complexe și dificile cum ar fi (CO 20), care face să intervină inele de clase de resturi într-o problemă de divizibilitate. Alte probleme frumoase sînt (CO 21). semnată de *Tr. Lalescu*, student, ca și (CO 25), (CO 27) semnată de *I. Ionescu*, (CO 29) sau (CO 30), ultima purtînd semnătura lui *C. Popovici*.

Concursul anual al rezolvitorilor G.M. ne-a oferit numeroase probleme, pe care le socotim demne de a figura în orice concurs de matematici elementare. Astfel, în domeniul algebrei sînt (CO 1), (CO 5), (CO 11), dar și alte surse, cum ar fi examenele de admitere sau olimpiadele ne pun la

dispoziţie probleme de concurs ca (CO 2), (CO 6). La acestea se adaugă probleme ca (CO 7), (CO 12) sau (CO 8), care aduc remarcabile rezultate în arsenalul util concursurilor, precum şi problemele (CO 9), (CO 10), ca pietre de încercare pentru concurenţii cei mai ambiţioşi.

Secţiunea cea mai puternică în probleme de concurs este cea de analiză. Găsim aici probleme din primii ani ai G. M. ca (CO 46) semnată de *Gr. N. Makarie*, apoi (CO 48), semnată *T. Popoviciu* sau (CO 49), semnată de *I. B. Florescu*, toţi reputaţi colaboratori ai G. M. Dar majoritatea problemelor bogate în conţinut şi strategii este dată de ultimii ani ai revistei. Astfel, (CO 43) priveşte convergenţa unei serii de funcţii continue, (CO 51) limita unei funcţii construite cu rădăcinile reale ale unei familii de ecuaţii transcendente, (CO 53) echivalenţa limitei raportului termenilor generali a două şiruri de numere naturale cu cea a raportului a numerelor prime de indici egali cu aceşti termeni generali în şirul numerelor prime, deci probleme care cer o anumită sagacitate şi inspiraţie pentru a fi rezolvate.

La acestea se pot adăuga (CO 57), semnată de *Th. Angheluţă*, care cere stabilirea unei inegalităţi între numerele reale, propunînd o soluţie cu ajutorul unei funcţii reale, precum şi (CO 45) privitoare la o relaţie construită cu rădăcinile unui polinom cu toate rădăcinile reale şi simple.

O inovaţie în problemele de concurs, care se dau de obicei în ţara noastră, este introducerea celor de teoria şi aplicaţiile probabilităţilor, dintre care menţionăm problema (CO 35), ca o generalizare a unei probleme puse de Banach şi problema (CO 33) cu caracter aplicativ.

Acest capitol deschide seria problemelor de concurs, serie care va cuprinde între altele pe cele de olimpiade naţionale şi internaţionale etc

CO 1. *Fie* $n_1, n_2, \ldots, n_k$ *numere naturale, două cîte două relativ prime.*

a) *Să se demonstreze că polinomul* $1 + X + X^2 + \ldots + X^{n_1 n_2 \ldots n_k - 1}$ *este divizibil cu* $\prod_{i=1}^{k} (1 + X + X^2 + \ldots + X^{n_i - 1})$, *iar cîtul este un polinom cu coeficienţi întregi.*

b) *Dacă polinomul cît este* $a_0 + a_1 X + \ldots + a_r X^r$, să se arate că $a_0 = a_1 = 1$ *şi* $(a_1, a_2, \ldots, a_{r-1}) = 1$.

Marcel Ţena, Concursul anual al G.M., 1982, grupa IX – X.

Soluţie. a) Polinomul $X^{n_1 n_2 \ldots n_k} - 1$ se divide cu fiecare polinom $X^{n_i} - 1$ şi cum $X - 1$ este un divizor comun, rezultă că $1 + X + X^2 + \ldots + X^{n_1 n_2 \ldots n_k - 1}$ se divide cu $1 + X + X^2 + \ldots + X^{n_i - 1}$, $i = 1, k$. Dar pentru polinoamele $X^{n_i} - 1$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$, polinomul $X - 1$ este cel mai mare divizor comun a oricare două, ceea ce înseamnă că polinoamele $1 + X + X^2 + \ldots + X^{n_i - 1}$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$ sînt relativ prime două cîte două. Rezultă că $1 + X + X^2 + \ldots + X^{n_1 n_2 \ldots n_k - 1}$ se divide cu $\prod_{i=1}^{k} (1 + X + X^2 + \ldots + X^{n_i - 1})$. Ţinînd seama de algoritmul împărţirii, rezultă că dacă împărţim un polinom cu coeficienţi

întregi la un alt polinom cu coeficienți întregi având coeficientul dominant egal cu 1, cîtul va avea coeficienți întregi. Aceasta este și situația din problema noastră.

b) Avem

$$1 + X + X^2 + \ldots + X^{n_1 n_2 \ldots n_k - 1} = (a_0 + a_1 X + \ldots + a_r X^r) \prod_{i=1}^{k} (1 + X + \ldots + X^{n_i - 1})$$

de unde, prin identificare, rezultă imediat $a_0 = a_r = 1$. Trecînd la funcții polinomiale și făcînd $x = 1$, obținem

$$n_1 n_2 \ldots n_k = (a_0 + a_1 + \ldots + a_{r-1} + a_r)\, n_1 n_2 \ldots n_k \text{ adică}$$

$$a_0 + a_1 + \ldots + a_r = 1.$$

Cum $a_0 = a_r = 1$ rezultă $a_1 + a_2 + \ldots + a_{r-1} = -1$. Dacă $d = (a_1, a_2, \ldots, a_{r-1})$, rezultă $d \mid (a_1 + a_2 + \ldots + a_{r-1})$, adică d divide -1, ceea ce înseamnă că $d = 1$.

CO 2. *Se consideră numerele complexe* x_i, y_i, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $n \geqslant 2$, *astfel încît* $x_1 = y_1 \in \mathbf{R}^*$ *și oricare ar fi submulțimea* I *a mulțimii* $\{1, 2, \ldots, n\}$ *să avem* $|\sum_{i \in I} x_i| = |\sum_{i \in I} y_i|$. *Să se arate că în aceste condiții* $x_i = y_i$, $(\forall)$ $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ *sau* $x_i = \bar{y}_i$, $(\forall)$ $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

D. M. Bătinețu, G. M. 8/1982

Soluție. Fie $x_1 = y_1 = a \in \mathbf{R}^*$. Luînd în condiția din enunț $I = \{k\}$, respectiv $I = \{1, k\}$, obținem

$$\begin{aligned} &|x_k| = |y_k|, && k = 1, 2, \ldots, n \\ &|a + x_k| = |a + y_k|, && k = 2, 3, \ldots, n \end{aligned} \tag{1}$$

Dacă $x_k = u_k + iv_k$, $y_k = t_k + is_k$, $(\forall)$ $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$,

atunci sistemul (1) este echivalent cu

$$\begin{cases} u_k^2 + v_k^2 = t_k^2 + s_k^2, & k = 1, 2, \ldots, n \\ (a + u_k)^2 + v_k^2 = (a + t_k)^2 + s_k^2, & k = 2, 3, \ldots, n \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} u_k^2 + v_k^2 = t_k^2 + s_k^2, & k = 1, 2, \ldots, n \\ 2au_k = 2at_k, & k = 2, 3, \ldots, n \end{cases}$$

sau încă

$$\begin{cases} v_k = \pm s_k, & k = 1, 2, \ldots, n \\ u_k = t_k, & k = 2, 3, \ldots, n \end{cases}$$

adică în definitiv

$$x_k \in \{y_k, \bar{y}_k\}, \text{ pentru fiecare } k = 1, 2, ..., n.$$

Vom arăta acum mai mult și anume că, sau $x_k = y_k$, $(\forall)\ k = 1, 2, ..., n$, sau $x_k = \bar{y}_k$, $(\forall)\ k = 1, 2, ..., n$. Să presupunem prin absurd că $(\exists)\ k, j \in \{2, 3, ..., n\}$, $k \neq j$ astfel încît $x_j = y_j$ și $x_k = \bar{y}_k$; pentru ca presupunerea prin absurd să nu fie banală, trebuie ca $\bar{y}_k \neq y_k$, adică $y_k \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$ și la fel, $y_j \neq \bar{y}_j$ adică $y_j \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$. Avem deci

$$|x_j + x_k| = |y_j + y_k| = |x_j + \bar{x}_k| \Leftrightarrow u_j^2 + 2u_ju_k + u_k^2 + v_j^2 + 2v_jv_k + v_k^2 =$$
$$= u_j^2 + 2u_ju_k + u_k^2 + v_j^2 - 2v_jv_k + v_k^2 \Leftrightarrow v_jv_k = 0 \Leftrightarrow y_j \in \mathbf{R} \text{ sau } y_i \in \mathbf{R},$$

ceea ce este o contradicție.

CO 3. *Fie* $f(x) = x^n + x^{n-1} + ... + x + 1$. *Să se calculeze restul împărțirii lui* $f(x^{n+1})$ *prin* $f(x)$.

M. I. Diaconescu, G. M. 4/1976

Soluție. Fie $R(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{n-1}x^{n-1}$ restul căutat și $Q(X)$ cîtul. Avem

$$f(x^{n+1}) = Q(x) \cdot f(x) + R(x). \tag{1}$$

Rezolvînd ecuația $f(x) = 0$ avem $(x^{n+1} - 1)/(x - 1) = 0$, de unde se vede că rădăcinile acestei ecuații sînt rădăcinile de ordinul $n + 1$ a unității mai puțin 1. Notînd cu ε o rădăcină primitivă de ordinul $n + 1$ a unității, rădăcinile ecuației $f(x) = 0$ vor fi $\varepsilon, \varepsilon^2, ..., \varepsilon^n$. În (1) făcînd pe rînd $x = \varepsilon$, $x = \varepsilon^2$, ..., $x = \varepsilon^n$ și ținînd cont că $(\varepsilon^i)^{n+1} = (\varepsilon^{n+1})^i = 1$, $(\forall)\ i = 1, 2, ..., n$, obținem $f(1) = R(\varepsilon^i)$, $i = 1, 2, ..., n$, adică

$$\begin{cases} a_0 + a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2 + ... + a_{n-1}\varepsilon^{n-1} = n + 1 \\ a_0 + a_1\varepsilon^2 + a_2(\varepsilon^2)^2 + ... + a_{n-1}(\varepsilon^2)^{n-1} = n + 1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_0 + a_1\varepsilon^n + a_2(\varepsilon^n)^2 + ... + a_{n-1}(\varepsilon^n)^{n-1} = n + 1 \end{cases}$$

sau

$$\begin{aligned} &[a_0 - (n + 1)] + a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2 + ... + a_{n-1}\varepsilon^{n-1} = 0 \\ &[a_0 - (n + 1)] + a_1\varepsilon^2 + a_2(\varepsilon^2)^2 + ... + a_{n-1}(\varepsilon^2)^{n-1} = 0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &[a_0 - (n + 1)] + a_1\varepsilon^n + a_2(\varepsilon^n)^2 + ... + a_{n-1}(\varepsilon)^{n-1} = 0 \end{aligned}$$

Considerat ca sistem omogen de n ecuații cu necunoscutele $a_0 - (n + 1)$, $a_1, a_2, ..., a_{n-1}$, observăm că determinantul sistemului este un determinant de tip Vandermonde nenul (elementele $\varepsilon, \varepsilon^2, ..., \varepsilon^n$ fiind distincte). Rezultă că singura soluție este cea banală, adică $a_0 = n + 1$, $a_1 = a_2 = ... = a_{n-1} = 0$. Restul căutat este deci un polinom constant și anume $R(x) = n + 1$.

CO 4. *Să se rezolve sistemul*

$$\begin{cases} x + xy - yz = 7 \\ x^2 + x^2y - yz^2 = 25 \\ x^3 + x^3y - yz^3 = 79 \end{cases}$$

Gh. Nisipeanu, G. M. vol. XIII, 1907

Soluție. Sistemul dat se poate scrie:

$$\begin{cases} y(x - z) = 7 - x \\ y(x^2 - z^2) = 25 - x^2 \\ y(x^3 - z^3) = 79 - x^3 \end{cases}$$

Observînd că $y \neq 0$ și $x \neq z$, (deoarece $y = 0$ sau $x = z$ conduc la o imposibilitate) putem împărți a doua și a treia ecuație la prima și obținem: $x + z = (25 - x^2)/(7 - x)$, respectiv $x^2 + xz + z^2 = (79 - x^3)/(7 - x)$, ceea ce se mai poate scrie $7(x + z) - xz = 25$, respectiv $(x + z)^2 - 7xz - xz(x + z) = 79$.

Notînd $x + z = u$, $xz = t$ ecuațiile precedente devin $7u - t = 25$; $7u^2 - 7t - ut = 79$. Din prima rezultă $t = 7u - 25$ și înlocuind în cea de-a doua obținem $7u^2 - (7u - 25)(u + 7) = 79$, sau $24u = 96$, de unde $u = 4$. Deducem $t = 3$. Rezultă că z și x sînt soluții ale ecuației de gradul 2: $\alpha^2 - 4\alpha + 3 = 0$. Rezultă posibilitățile $x_1 = 1$, $z_1 = 3$ și $x_2 = 3$, $z_2 = 1$. Corespunzător, obținem $y_1 = -3$ și $y_2 = 2$. Soluțiile sistemului sînt $(1, -3, 3)$ și $(3, 2, 1)$.

CO 5. *Fie matricile*

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} a\alpha & b\alpha & a\gamma & b\gamma \\ a\beta & b\beta & a\delta & b\delta \\ c\alpha & d\alpha & c\gamma & d\gamma \\ c\beta & d\beta & c\delta & d\delta \end{pmatrix}$$

unde $a, b, c, d, \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbf{R}$. *Să se arate că dacă* A *și* B *sînt nesingulare, atunci* C *este nesingulară.*

Liviu Pîrșan, G. M. 5/1982

Soluție. Fie ecuația $AXB = D$ unde $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, iar $D = \begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix}$.

Rezultă

$$X = A^{-1}DB^{-1}. \tag{1}$$

Din (1) rezultă X unic și deci x, y, z, t sînt unic determinate. Pe de altă parte ecuația matricială se mai poate scrie

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix}$$

sau

$$\begin{pmatrix} ax+bz & ay+bt \\ cx+dz & cy+dt \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix}$$

sau

$$\begin{pmatrix} a\alpha x+b\alpha z+a\gamma y+b\gamma t & \alpha\beta x+b\beta z+a\delta y+b\delta t \\ c\alpha x+d\alpha z+c\gamma y+d\gamma t & c\beta x+d\beta z+c\delta y+d\delta t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix}$$

sau

$$\begin{cases} a\alpha x+b\alpha z+a\gamma y+b\gamma t=m \\ a\beta x+b\beta z+a\delta y+b\delta t=n \\ c\alpha x+d\alpha z+c\gamma y+d\gamma t=p \\ c\beta x+d\beta z+c\delta y+d\delta t=q \end{cases}$$

Însă sistemul (2), fiind echivalent cu ecuația matricială (1), admite soluție unică. Rezultă că determinantul sistemului (2) este nenul, deci det $C\neq$ $\neq 0$, adică C este matrice nesingulară.

CO 6. *Să se rezolve sistemul*

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{v}{b}+\dfrac{z}{c}=1 \\ \dfrac{x}{a^2}+\dfrac{y}{b^2}+\dfrac{z}{c^2}=\dfrac{1}{\alpha} \\ \dfrac{x}{a^3}+\dfrac{y}{b^3}+\dfrac{z}{c^3}=\dfrac{1}{\alpha^2} \end{cases}$$

unde $a, b, c, \alpha \in \mathbf{R}^*$, iar a, b, c sînt distincte două cîte două.

Examen de admitere la Școala de Poduri și Șosele, octombrie 1897.

Soluție. E comod să considerăm mai întîi un sistem analog în care coeficienții lui x, y, z sînt puteri pozitive ale lui a, b, c, α, după care trecem la sistemul inițial înlocuind pe a cu $\dfrac{1}{a}$ etc. Vom folosi pentru noul sistem determinantul Vandermonde:

$$V(a,b,c)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}=(b-a)(c-a)(c-b).$$

Determinantul sistemului nou este

$$D=\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}=abcV(a,b,c).$$

iar determinanții Cramer sînt

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ \alpha & b^2 & c^2 \\ \alpha^2 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = bcV(\alpha, b, c), \quad \text{etc.}$$

Atunci

$$\frac{D_1}{D} = \frac{V(\alpha, b, c)}{aV(a, b, c)} = \frac{(b-\alpha)(c-\alpha)}{a(b-a)(c-a)} \text{ cu ipoteza } a,\ b, c \text{ distincte.}$$

Revenind la sistemul inițial, vom avea

$$x = \frac{\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{\alpha}\right)\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{\alpha}\right)}{\frac{1}{a}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{a}\right)} = \frac{a^3(\alpha - b)(\alpha - c)}{\alpha^2(a-b)(a-c)}$$

și analog

$$y = \frac{b^3(\alpha - c)(\alpha - a)}{\alpha^2(b-c)(b-a)}, \quad z = \frac{c^3(\alpha - a)(\alpha - b)}{\alpha^2(c-a)(c-b)}.$$

Să observăm că mai putem scrie

$$x = \frac{a^3}{\alpha^2} \cdot \frac{V(\alpha, b, c)}{V(a, b, c)}, \quad y = \frac{b^3}{\alpha^2} \cdot \frac{V(a, \alpha, c)}{V(a, b, c)}, \quad z = \frac{c^3}{\alpha^2} \cdot \frac{V(a, b, \alpha)}{V(a, b, c)}.$$

Sistemul se poate generaliza astfel:

$$\begin{cases} \dfrac{x_1}{a_1} + \dfrac{x_2}{a_2} + \dfrac{x_3}{a_3} + \ldots + \dfrac{x_n}{a_n} = 1 \\ \dfrac{x_1}{a_1^2} + \dfrac{x}{a_2^2} + \dfrac{x_3}{a_3^2} + \ldots + \dfrac{x_n}{a_n^2} = \dfrac{1}{\alpha} \\ \vdots \\ \dfrac{x_1}{a_1^n} + \dfrac{x_2}{a_2^n} + \dfrac{x_3}{a_3^n} + \ldots + \dfrac{x_n}{a_n^n} = \dfrac{1}{\alpha^{n-1}} \end{cases}$$

(cu $a_1, a_2, \ldots, a_n, \alpha$ numere reale nenule și $a_i \neq a_j$ pentru $i \neq j$), pentru care soluția este

$$x_1 = \frac{a_1^n}{\alpha^{n-1}} \cdot \frac{V(\alpha, a_2, a_3, \ldots, a_n)}{V(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)}, \ldots, x_n = \frac{a_n^n}{\alpha^{n-1}} \cdot \frac{V(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, \alpha)}{V(a_1, a_2, \ldots, a_n)}.$$

CO 7. *Să se găsească relația de recurență, care să permită calculul din aproape în aproape, al sumelor:*

$$S_m^k = 1^k(C_m^1)^2 + 2^k(C_m^2)^2 + 3^k(C_m^3)^2 + \ldots + m^k(C_m^m)^2.$$

Să se efectueze acest calcul pentru $k = 1, 2, 3, 4$.

Gh. D. Simionescu, G. M. vol. XLIII, 1937

Soluție. Avem $p^k(C_m^p)^2 = p^k\left[\frac{m!}{p!(m-p)!}\right]^2 = m^2 \cdot p^{k-2}\left[\frac{(m-1)!}{(p-1)!(m-p)!}\right]^2 =$

$$= m^2 p^{k-2}(C_{m-1}^{p-1})^2.$$

Rezultă

$$S_m^k = m^2\sum_{p=1}^{m} p^{k-2}(C_{m-1}^{p-1})^2 = m^2\sum_{p-1}^{m} p^{k-2}(C_m^p - C_{m-1}^p)^2 = m^2\sum_{p-1}^{m} p^{k-2}[(C_m^p)^2 +$$

$$+ (C_{m-1}^p)^2 - 2C_m^p C_{m-1}^p].$$

Dar $C_m^p C_{m-1}^p = \frac{m-p}{m}(C_m^p)^2 = \left(1 - \frac{p}{m}\right)(C_m^p)^2.$

Înlocuind în sumă obținem

$$S_m^k = m^2\sum_{p=1}^{m} p^{k-2}[(C_{m-1}^p)^2 - (C_m^p)^2 + 2_m^p(C_m^p)^2] = m^2\sum_{p-1}^{m} p^{k-2}[(C_{m-1}^p)^2 -$$

$$-(C_m^p)^2] + 2m\sum_{p=1}^{m} p^{k-1}(C_m^p)^2.$$

Deci, relația de recurență este

$$S_m^k = m^2(S_{m-1}^{k-2} - S_m^{k=2}) + 2mS_m^{k-1}.$$

Se cunoaște $S_m^0 = C_{2m}^m - 1$, fiind suma pătratelor coeficienților binomiali, fără primul termen.

Pentru $k = 1$, se poate calcula direct. Avem

$$S_m^1 = 1 \cdot (C_m^1)^2 + 2(C_m^2)^2 + \ldots + (m-1)(C_m^{m-1})^2 + m(C_m^m)^2;$$

$$S_m^1 = m \cdot (C_m^0)^2 + (m-1)(C_m^1)^2 + \ldots + 2 \cdot (C_m^{m-2})^2 + 1 \cdot (C_m^{m-1})^2$$

Rezultă din adunarea celor două relații

$$2S_m^1 = m\sum_{p=0}^{m}(C_m^p)^2 = mC_{2m}^m. \text{ Deci } S_m^1 = \frac{m}{2}C_{2m}^m.$$

Pentru $k = 2$ avem

$$S_m^2 = m^2(S_{m-1}^0 - S_m^0) + 2mS_m^1 = m^2[C_{2(m-1)}^{m-1} - 1 - (C_{2m}^m - 1)] + 2m \cdot \frac{m}{2}C_{2m}^m.$$

Rezultă $S_m^2 = m^2 C_{2(m-1)}^{m-1}$.

Pentru $k = 3$ avem

$$S_m^3 = m^2(S_{m-1}^1 - S_m^1) + 2mS_m^2 = m^2\left[\frac{m-1}{2} C_{2(m-1)}^{m-1} - \frac{m}{2} C_{2m}^m\right] + 2m \cdot m^2 C_{2(m-1)}^{m-1}$$

Rezultă
$$S_m^3 = \frac{m^2}{2}[(5m-1) C_{2(m-1)}^{m-1} - mC_{2m}^m].$$

Pentru $k = 4$.

$$S_m^4 = m^2(S_{m-1}^2 - S_m^2) + 2mS_m^3 = m^2[(m-1)^2 C_{2(m-2)}^{m-2} - m^2 C_{2(m-1)}^{m-1}] +$$

$$+ 2m \cdot \frac{m^2}{2}[(5m-1) C_{2(m-1)}^{m-1} - mC_{2m}^m].$$

Rezultă $S_m^4 = m^2[(m-1)^2 C_{2(m-2)}^{m-2} + m(4m-1) C_{2(m-1)}^{m-1} - m^2 C_{2m}^m]$

CO 8. *Demonstrați că* $(\forall)\, n \in \mathbf{N}$, *există egalitatea*

$$C_n^0 x_0 + C_n^1 x_1 \ldots + C_n^n x_n = x_{2n},$$

unde $(x_n)_{n \geq 0}$ *este șirul lui Fibonacci.*

Șerban Mihăescu, G. M. 7/1983

Soluție. Se știe că $x_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]$, $(\forall) n \in \mathbf{N}$.

Atunci
$$\sum_{i=1}^{n} C_n^i x_i = \frac{1}{5}\left[\sum_{i=0}^{n} C_n^i \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{i+1} - \sum_{i=0}^{n} C_n^i \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{i+1}\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1\right)^n - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} + 1\right)^n\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n} -\right.$$

$$\left. - \frac{1-\sqrt{5}}{2} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}\right] = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n+1}\right] = x_{2n}$$

CO 9. *Fie* G_n *mulțimea rădăcinilor unității de ordinul n. Să se arate că*

$$\prod_{\zeta \in G_n}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right) = \begin{cases} 0 \text{ dacă } n \equiv 0 \pmod 4 \\ 2 \text{ dacă } n \equiv 1 \pmod 4 \text{ sau } n \equiv 3 \pmod 4 \\ -4 \text{ dacă } n = 2 \pmod 4 \end{cases}$$

Marcel Țena, G. M. 7/1983

Soluție. C a z u l I. n impar $= 2p + 1$ (deci $n \equiv 1 \pmod 4$ sau $n \equiv 3 \pmod 4$). Avem evident pentru orice $x \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$:

$$\frac{x^{2p+1} - 1}{x - 1} = \prod_{k=1}^{2p} \left(x - \cos \frac{2k\pi}{2p+1} - i \sin \frac{2k\pi}{2p+1} \right) =$$

$$= \prod_{k=1}^{p} \left[\left[x - \cos \frac{2k\pi}{2p+1} - i \sin \frac{2k\pi}{2p+1} \right) \left(x - \cos \frac{2k\pi}{2p+1} + i \sin \frac{2k\pi}{2p+1} \right) \right] =$$

$$= \prod_{k=1}^{p} \left(x^2 - 2 \cos \frac{2k\pi}{2p+1} x + 1 \right). \text{ Făcînd } x = -i$$

obținem:

$$\frac{1 - (-i)^{2p+1}}{1 + i} = i^p \left(\prod_{k=1}^{p} 2 \cos \frac{2k\pi}{2p+1} \right). \tag{1}$$

Dacă $\zeta \in G_n \setminus \{1\}$, atunci $(\exists)\ 1 \leqslant k \leqslant p$, cu $\zeta = \cos \frac{2k\pi}{2p+1} + i \sin \frac{2k\pi}{2p+1}$

sau $\zeta = \cos \frac{2k\pi}{2p+1} - i \sin \frac{2k\pi}{2p+1}$, astfel că oricum $\zeta + \frac{1}{\zeta} = \zeta + \bar{\zeta} =$

$= 2 \cos \frac{2k\pi}{2p+1}$.

În produsul $\prod_{\substack{\zeta \in G_n \\ \zeta \neq 1}} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right)$ fiecare paranteză apare de două ori, deci vom avea

$$\prod_{\substack{\zeta \in G_n \\ \zeta \neq 1}} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right) = \left(\prod_{k=1}^{p} 2 \cos \frac{2k\pi}{2p+1} \right)^2 \tag{2}$$

Ridicînd (1) la pătrat obținem

$\frac{1 + 2(-1)^p i - 1}{2i} = (-1)^p \left(\prod_{k=1}^{p} 2 \cos \frac{2k\pi}{2p+1} \right)^2$ și ținînd seama de (2) rezultă

$\prod_{\substack{\zeta \in G_n \\ \zeta \neq 1}} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right) = 1.$

Pentru $\zeta = 1$ avem $\zeta + \frac{1}{\zeta} = 2$, astfel că scriind și acest factor, vom obține

$\prod_{\zeta \in G_n} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right) = 2.$

Cazul II. n par $= 2p$ (deci $n \equiv 0 \pmod 4$ sau $n \equiv 2 \pmod 4$). Avem pentru orice $x \in \mathbf{C} \setminus \{-1, 1\}$:

$$\frac{x^{2p}-1}{x^2-1} = \prod_{k=1}^{p-1}\left(x - \cos\frac{2k\pi}{2p} - i\sin\frac{2k\pi}{2p}\right)\cdot\prod_{k=p+1}^{2p}\left(x - \cos\frac{2k\pi}{2p} - \right.$$

$$\left. - i\sin\frac{2k\pi}{2p}\right) = \prod_{k=1}^{p-1}\left[\left(x - \cos\frac{2k\pi}{2p} - i\sin\frac{2k\pi}{2p}\right)\left(x - \cos\frac{2k\pi}{2p} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + i\sin\frac{2k\pi}{2p}\right)\right] = \prod_{k=1}^{p-1}\left(x^2 - 2\cos\frac{2k\pi}{2p}\cdot x + 1\right).$$

Făcînd $x = -i$ obținem

$$\frac{(-1)^p - 1}{-2} = i^{p-1}\left(\prod_{k=1}^{p-1} 2\cos\frac{2k\pi}{2p}\right). \tag{3}$$

Dacă $\zeta \in G_n \setminus \{-1, 1\}$, $(\exists)\ 1 \leqslant k \leqslant p-1$ astfel încît

$$\zeta = \cos\frac{2k\pi}{2p} + i\sin\frac{2k\pi}{2p} \quad \text{sau} \quad \zeta = \cos\frac{2k\pi}{2p} - i\sin\frac{2k\pi}{2p},$$

deci oricum $\zeta + \frac{1}{\zeta} = \zeta + \bar{\zeta} = 2\cos\frac{2k\pi}{2p}$.

Deoarece în produsul $\prod_{\substack{\zeta \in G_n \\ \zeta \neq 1;-1}}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right)$ fiecare factor apare de două ori, vom avea $\prod_{\substack{\zeta \in G_n \\ \zeta \neq 1;-1}}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right) = \left(\prod_{k=1}^{p-1} 2\cos\frac{2k\pi}{2p}\right)^2$.

Ridicînd (3) la pătrat, avem

$\frac{1-(-1)^p}{2} = (-1)^{p-1}\left(\prod_{\substack{\zeta \in G_n \\ \zeta \neq 1;-1}} 2\cos\frac{2k\pi}{2p}\right)^2$, de unde ținînd seama și de (4) vom avea

$$\prod_{\substack{\zeta \in G_n \\ \zeta \neq 1;-1}}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right) = \frac{(-1)^{p-1}}{2}.$$

Pentru $\zeta = 1$ avem $\zeta + \frac{1}{\zeta} = 2$, iar pentru $\zeta = -1$ avem $\zeta + \frac{1}{\zeta} = -2$, astfel că, dacă vom ține cont și de acești doi factori, vom avea

$$\prod_{\zeta \in G_n}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right) = -4\,\frac{1 + (-1)^{p-1}}{2} = 2[(-1)^p - 1]. \tag{5}$$

Dacă $n \equiv 0 \pmod 4$, atunci p este par și din (5) rezultă

$$\prod_{\zeta \in G_n} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right) = 0.$$

Dacă $n \equiv 2 \pmod 4$, atunci p este impar și din (5) rezultă

$$\prod_{\zeta \in G_n} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right) = -4.$$

CO 10. *Arătați că grupurile aditive* $(\mathbf{Z}[X], +)$ *și* $(\mathbf{Q}[X], +)$ *nu sînt izomorfe.*

Toma Albu, G. M. Metodică 1–2/1982

Soluție. Să presupunem că există un izomorfism de grupuri

$$\varphi: (\mathbf{Q}[X], +) \to (\mathbf{Z}[X], +)$$

Fie $f \in \mathbf{Q}[X]$ un polinom nenul și să considerăm polinomul $\varphi(f) = a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n \in \mathbf{Z}[X]$; acesta va fi un polinom nenul. Alegem $k \in \mathbf{N}^*$, $k > \max(|a_0|, a_1|, \ldots, |a_n|)$ și considerăm polinomul

$$g \in \mathbf{Q}[X],\ g = \frac{1}{k} f.\ \text{Rezultă } kg = f. \tag{1}$$

Aplicînd în (1) izomorfismul φ obținem $k\varphi(g) = \varphi(f)$, de unde

$$\varphi(g) = \frac{1}{k}\varphi(f). \tag{2}$$

Dar, ținînd seama de alegerea lui k, cum $\varphi(f)$ este nenul, din (2) deducem că $\varphi(g) \notin \mathbf{Z}[X]$, contradicție.

Comentariu. Un grup aditiv $(G, +)$ se numește grup divizibil, dacă $(\forall)\ a \in G$ și $(\forall)\ n \in \mathbf{N}^*$, $(\exists)\ x \in G$ astfel ca $nx = a$.
Ideea soluției problemei constă în aceea că în timp ce grupul $(\mathbf{Q}[X], +)$ este divizibil, grupul $(\mathbf{Z}[X], +)$ nu este un grup divizibil și ca atare ele nu pot fi izomorfe.

CO 11. *Fie* $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ *o progresie aritmetică cu termeni numere naturale. Presupunem că* $a_1 > 1$ *și rația progresiei este un număr impar pozitiv. Să se arate că dacă* $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ *sînt numere întregi impare, atunci pentru orice* $n > 1$,

$$\frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} + \cdots + \frac{b_n}{a_n} \notin \mathbf{Z}.$$

C. Năstăsescu, G. M. 12/1980

Soluție. Deoarece rația este impară, oricare doi termeni consecutivi ai progresiei au paritați diferite. Cum $n>1$, înseamnă că între numerele $a_1, a_1, ..., a_n$ avem efectiv și numere pare. Fiecare din aceste numere pare se va scrie sub forma unui produs dintre o putere a lui 2 și un număr impar. Fie a_k acela dintre numerele $a_1, a_2, ..., a_n$, care are o putere maximă a lui 2 în scrierea menționată, deci $a_k = 2^p \cdot c_k$ cu c_k impar. Arătăm că a_k este unic cu această proprietate. Să presupunem prin absurd că ar mai exista printre $a_1, a_2, ..., a_n$ un termen $a_l = 2^p \cdot c_l$ (c_l impar) și $l \neq k$; fixînd ideile, putem presupune $k>l$. Atunci, notînd cu r rația, avem: $(k-l)r = a_k - a_l = 2^p(c_k - c_l) = 2^{p+1} \cdot \alpha$, $\alpha \in N^*$. Cum r este impar, rezultă $k - l = 2^{p+1} \cdot \beta$, $\beta \in N^*$. Avem $k = l + 2^{p+1} \cdot \beta > l + 2^p > l$, ceea ce arată că $l + 2^p \in \{1, 2, ..., n\}$. Dar atunci: $a_{l+2^p} = a_l + 2^p r = 2^p c_l + 2^p r = 2^p(c_l + r) = 2^{p+1}\gamma$, ceea ce contrazice faptul că puterea maximă a lui 2 în descompunerea numerelor $a_1, a_1, ..., a_n$ este 2^p. Așadar între termenii $a_1, a_2, ..., a_n$ numai a_k conține pe 2 la putere maximă. Efectuînd suma $\frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} + \cdots + \frac{b_n}{a_n}$, cînd se aduce la același numitor, toți numărătorii se amplifică cu diverse puteri ale lui 2, excepție făcînd b_k, ceea ce face ca numărătorul să fie impar. Cum numitorul este par, rezolvarea este terminată.

CO 12. a) *Să se determine polinoamele P de gradul n, cu coeficienți reali nenegativi, cu proprietatea că $P\left(\cos\frac{\pi}{n} + i\sin\frac{\pi}{n}\right)$ este un număr real.*

b) *Pentru un astfel de polinom P, care este mulțimea numerelor complexe z, astfel încît $P(z)$ să fie un număr real?*

Alexandru Lupaș, G. M. 1/1979

Soluție. a) Fie $z_1 = \cos\frac{\pi}{n} + i\sin\frac{\pi}{n}$ și $P(x) = c_n + \sum_{k=1}^{n-1} c_{n-k}x^k + c_0x^n$.

Deoarece $z_1^k = \cos\frac{k\pi}{n} + i\sin\frac{k\pi}{n}$, avem:

$$P(z_1) = \left(c_n - c_0 + \sum_{k=1}^{n-1} c_{n-k}\cos\frac{k\pi}{n}\right) + i\sum_{k=1}^{n-1} c_{n-k}\sin\frac{k\pi}{n} \qquad (1)$$

Condiția ca $P(z_1)$ să fie un număr real implică faptul că partea imaginară a lui $P(z_1)$ trebuie să fie zero. Deci din (1) obținem:

$$\sum_{k=1}^{n-1} c_{n-k}\sin\frac{k\pi}{n} = 0 \qquad (2)$$

Pe de altă parte avem $c_{n-k} \geqslant 0$, $\sin\frac{k\pi}{n} > 0$ și deci $c_{n-k}\sin\frac{k\pi}{n} \geqslant 0$ pentru $k \in \{1, 2, ..., n-1\}$. Prin urmare din (2) rezultă $c_{n-k} = 0$ pentru

$k \in \{1, 2, ..., n-1)\}$. Deci, forma generală a polinoamelor P de gradul n. cu coeficienți nenegativi cu proprietatea că $P(z_1) \in \mathbf{R}$ este:

$$P(x) = c_0 x^n + c_n, \text{ unde } c_0 > 0,\ c_n \geqslant 0, \tag{3}$$

b) Fie $z = r(\cos\theta + i \sin\theta)$, $r > 0$, $\theta \in [0, 2\pi)$ un număr complex arbitrar. Din (3) obținem:

$$P(z) = (c_0 r^n \cos n\theta + c_n) + i r^n \sin n\theta.$$

Impunînd condiția ca $P(z) \in \mathbf{R}$, deducem că $\sin n\theta = 0$.

În concluzie, mulțimea tuturor numerelor complexe z, pentru care $P(z)$ este număr real este:

$$C_1 = \left\{ z \in \mathbf{C} \mid z = r\left(\cos\frac{j\pi}{n} + i \sin\frac{j\pi}{n}\right),\ j \in \{0, 1, ..., n-1\} \right\}.$$

CO 13. *Dacă ecuația* $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, *are toate rădăcinile cuprinse între* 0 *și* $\frac{1}{2}$, *avem*

$$-\frac{3}{4} < p + q < 0.$$

iar dacă toate rădăcinile sînt mai mari ca 2, *avem*

$$-\frac{3}{4} < \frac{p+q}{r} < 0.$$

C. Ionescu Țiu, vol. XLV, 1939

Soluție. Fie x_i, $i = 1, 2, 3$, rădăcinile ecuației, $0 < x_i < \frac{1}{2}$. Rezultă $0 < \sum_{i=2}^{3} x_i = -p$. Apoi: $p + q = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 3} x_i x_j - \sum_{i=1}^{3} x_i = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 3} x_i (x_j - 1)$, unde $x_i > 0$ și $x_j < \frac{1}{2} \Rightarrow x_j - 1 < 0$. Rezultă: $p + q < 0$.

Cum $x_i - \frac{1}{2} < 0$, fie $y_i = x_i - \frac{1}{2}$; înlocuind în ecuație pe x cu $y + \frac{1}{2}$ obținem

$$y^3 + \left(p + \frac{3}{2}\right) y^2 + \left(p + q + \frac{3}{4}\right) y + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} p + \frac{1}{2} q + r = 0.$$

Rădăcinile acestei ecuații fiind toate negative obținem:

$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 3} y_i y_j = p + q + \frac{3}{4} > 0$, deci $p + q > -\frac{3}{4}$, adică $-\frac{3}{4} < p+q < 0$.

Pentru partea a doua, înlocuind pe x cu $\frac{1}{t}$ obținem ecuația $t^3 + \frac{q}{r} t^2 + \frac{p}{r} t + \frac{1}{r} = 0$, care are ca soluții numerele $t_i (i = 1, 2, 3)$ ce îndeplinesc condițiile din prima parte: $0 < t_i < \frac{1}{2}$; deci va rezulta

$$-\frac{3}{4} < \frac{q}{r} + \frac{p}{r} < 0 \text{ sau } -\frac{3}{4} < \frac{p+q}{r} < 0.$$

C0 14. *Să se determine soluțiile în numere întregi ale ecuației:*

$$x^5 + y^5 = u^5 + v^5, \text{ dacă } x + y = u + v (x, y, u, v \in \mathbf{Z}).$$

M. Ghermănescu, G.M. vol. XLVIII, 1942

Soluție. Ecuația dată se mai poate scrie:

$$(x + y)[(x + y)^4 - 5xy(x + y)^2 + 5x^2y^2] =$$
$$= (u + v)[(u + v)^4 - 5uv(u + v)^2 + 4u^2v^2].$$

Fie $s = x + y = u + v$. Dacă $s = 0$, se obțin soluțiile $x = -y$ și $u = -v$. Dacă $s \neq 0$, simplificînd ecuația dată prin s rezultă:

$$s^2(uv - xy) = (u^2v^2 - x^2y^2) \quad \text{sau} \quad (uv - xy)[s^2 - 3(uv + xy)] = 0.$$

Deci rezultă:

$$\begin{cases} uv = xy \\ x + y = u + v \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} s^2 = uv + xy \\ x + y = u + v. \end{cases}$$

Primul sistem admite soluțiile $x = u$ și $y = v$ sau $x = v$ și $y = u$. Al doilea sistem se mai poate scrie

$$\begin{cases} (x + y)^2 + (u + v)^2 = 2xy + 2uv \quad \text{sau} \\ x^2 + y^2 + u^2 + v^2 = 0, \text{ adică } x = y = u = v = 0. \end{cases}$$

Dar această soluție contrazice faptul că $s \neq 0$.
Deci soluțiile ecuației date sînt:

a) pentru $x + y = u + v = 0 \Rightarrow x = -y$ și $u = -v$.

b) pentru $x + y = u + v \neq 0 \Rightarrow x = u$, $y = v$ și $x = v$, $y = u$.

CO 15. *Să se arate că:*

$$\sin x \sin\left(x+\frac{\pi}{n}\right)\sin\left(x+\frac{2\pi}{n}\right)\ldots\sin\left(x+\frac{(n-1)\pi}{n}\right)=\frac{\sin nx}{2^{n-1}},\ x\in\mathbf{R}.$$

D. Brînduşescu, G M. 2/1978

Soluţie. Polinomul $P(t)=t^n-(\cos 2nx+i\sin 2nx)$ are rădăcinile $t_k=$ $=\cos\left(2x+\frac{2k\pi}{n}\right)+i\sin\left(2x+\frac{2k\pi}{n}\right)$, $k=0,1,\ldots,n-1$. Rezultă

$$t^n-(\cos 2nx+i\sin 2nx)=\prod_{k=0}^{n-1}\left[t-\cos\left(2x+\frac{2k\pi}{n}\right)-i\sin\left(2x+\frac{2k\pi}{n}\right)\right].$$

În această egalitate se ia $t=1$, se efectuează calculele, se egalează părţile reale, respectiv cele imaginare şi se obţine relaţia cerută.

CO 16. *Determinaţi partea întreagă a numărului real:*

$$\alpha=\log_2 3+\log_3 5+\log_5 8.$$

Matematika v şcole, 3/1981, GM 10/1981

Soluţie. Cum $\log_2 3>0$, $\log_3 5>0$, $\log_5 8>0$, putem aplica inegalitatea mediilor şi obţinem:

$$\alpha>3\sqrt[3]{\log_2 3\log_3 5\log_5 8}=3\sqrt[3]{\log_2 8}=3\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{81}>\sqrt[3]{64}=4.$$

Deci $\alpha>4$ (1).
Dar

$$\log_2 3<\log_2 4=2, \tag{2}$$

iar $\log_3 5<\frac{3}{2}$, deoarece $3^3>5^2$, deci

$$\log_3 5<\frac{3}{2}. \tag{3}$$

De asemenea, deoarece $5^3>8^2$ rezultă că

$$\log_5 8<\frac{3}{2}. \tag{4}$$

Adunînd inegalităţile (2), (3) şi (4) obţinem

$$\alpha<5. \tag{5}$$

Din (1) şi (5) rezultă $[\alpha]=4$.

CO 17. *Se dau trei numere complexe z_1, z_2, z_3 pentru care $|z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1|=a>0$ şi $|z_1z_2z_3|=b>0$. Să se arate că cel puţin unul dintre aceste numere are modulul mai mic sau cel mult egal cu $\frac{3\cdot b}{a}$. Generalizare.*

D. M. Bătineţu, G. M. 6/1981

Soluție. Să presupunem prin absurd că $|z_1|>\frac{3b}{a}$, $|z_2|>\frac{3b}{a}$, $|z_3|>\frac{3b}{a}$. Va rezulta că $\frac{1}{|z_1|}<\frac{a}{3b}$, $\frac{1}{|z_2|}<\frac{a}{3b}$, $\frac{1}{|z_3|}<\frac{a}{3b}$.
Prin adunarea acestor relații obținem:

$$\frac{1}{|z_1|}+\frac{1}{|z_2|}+\frac{1}{|z_3|}<\frac{a}{b}. \tag{1}$$

Dar

$$\frac{a}{b}=\frac{|z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1|}{|z_1z_2z_3|}\leqslant\frac{|z_1z_2|+|z_2z_3|+|z_3z_1|}{|z_1z_2z_3|}=\frac{1}{|z_1|}+$$

$$+\frac{1}{|z_2|}+\frac{1}{|z_3|}. \tag{2}$$

Comparînd (1) și (2) rezultă că am ajuns la o contradicție. Deci presupunerea făcută este falsă, adică există cel puțin unul dintre numerele z_1, z_2, z_3 cu modulul mai mic sau egal cu $\frac{3}{b}$.

Generalizare. Fie n numere complexe $z_1, \ldots, z_n$ pentru care

$|z_1z_2\ldots z_{n-1}+z_1z_2\ldots z_{n-2}z_n+\ldots+z_2z_3\ldots z_n|=a>0$ și $|z_1z_2\ldots z_n|=b>0$.

Atunci cel puțin unul dintre aceste numere are modulul mai mic sau egal cu $\frac{nb}{a}$. Demonstrația imită întocmai pe cea de mai sus.

CO 18. *Găsiți restul împărțirii numărului 2^{p^3} la 13, unde p este un număr prim.*

Matematika v škole, 3/1981, G. M. 10/1981

Soluție. Scriem $2^{p^3}=2\cdot 2^{p^3-1}$.

Pentru p prim, $p\geqslant 5$, 3 nu divide p, deci 3 divide $(p-1)$ sau 3 divide $(p+1)$, deci:

$$3\mid(p^2-1). \tag{1}$$

Pentru p prim,

$$p\geqslant 3,\ 4\mid(p^2-1). \tag{2}$$

Din (1) și (2) rezultă că pentru p prim, $p\geqslant 5$, avem că $12\mid(p^2-1)$ deci există $k\in\mathbf{N}$, cu proprietatea că $p^2-1=12k$. Facem notația $A(p)=2^{p^3}$. Cu această notație vom avea pentru p prim, $p\geqslant 5: A(p)=2\cdot 2^{12k}=2\cdot(2^{12})^k$. Conform teoremei lui Fermat, $2^{12}\equiv 1 \pmod{13}$, deci $A(p)\equiv 2 \pmod{13}$. Deci pentru p prim, $p\geqslant 5$, restul căutat este 2. Pentru $p=2$

avem $A(2) = 2^{2^2} = 16$, deci $A(2) \equiv 3 \pmod{13}$, iar pentru $p = 3$ avem $A(3) = 2^{3^3} = 512$, deci $A(3) \equiv 5 \pmod{13}$.

În concluzie, dacă notăm cu $r(A(p))$ restul împărțirii lui $A(p)$ la 13, vom avea

$$r(A(p)) = \begin{cases} 3, \text{ pentru } p = 2 \\ 5, \text{ pentru } p = 3 \\ 2, \text{ pentru } p \geqslant 5,\ p \text{ prim.} \end{cases}$$

CO 19. *Să se arate că dacă* $n \in \mathbf{N}^*$, *atunci numărul* C_{2n}^{k} *este divizibil cu* $2^{n-1} + 1$, *unde* $k = 2^{n-1}$.

Liviu Pîrșan, G. M./1982.

Soluție [Generalizare]. Vom arăta că $(p + 1) \mid C_{2p}^{p}$, $(\forall)\, p \in \mathbf{N}^*$. Avem:

$$\frac{C_{2p}^{p}}{p+1} = \frac{(2p)!}{p!(p+1)!} = \frac{(2p)!}{p!(p-1)!} \cdot \frac{1}{p(p+1)} =$$

$$= \frac{(2p)!}{p!(p-1)!}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right) = C_{2p}^{p} - C_{2p}^{p-1}.$$

Dar $C_{2p}^{p} \in \mathbf{Z}$, $C_{2p}^{p-1} \in \mathbf{Z}$, deci $\dfrac{C_{2p}^{p}}{p+1} \in \mathbf{Z}$, adică $(p + 1) \mid C_{2p}^{p}$.

Pentru $p = 2^{n-1}$ se obține problema dată.

CO 20. *Fie* n *un număr natural impar. Să se arate că oricum am alege* $\dfrac{n+3}{2}$ *numere întregi, există două dintre ele astfel încît suma sau diferența lor să fie un număr divizibil cu* n.

S. Cremarenco, G. M. 10/1981.

Soluție. Fie $n = 2k + 1$. Atunci inelul claselor de resturi modulo n este $\mathbf{Z}_n = \mathbf{Z}_{2k+1} = \{\hat{0}, \hat{1}, \ldots, \widehat{2k}\}$. Deoarece $\widehat{2k} = -\hat{1}$, $\widehat{2k-1} = -\hat{2}$, ..., $\widehat{k+1} = -\hat{k}$, rezultă: $\mathbf{Z}_n = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \ldots, \hat{k}, -\hat{1}, -\hat{2}, \ldots, -\hat{k}\}$.

Fie $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_{k+2}$ clasele de resturi ale numerelor întregi alese.

1) Dacă există două clase egale, atunci diferența acelor numere se divide cu n și problema este rezolvată.

2) Presupunem acum că cele $k + 2$ clase de resturi sînt distincte.

a) Dacă există două clase opuse în mulțimea $A = \{\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_{k+2}\}$, atunci problema este iarăși rezolvată, întrucît suma numerelor ce corespund acelor clase se divide cu n.

b) Să presupunem acum că în A nu există două clase opuse. Atunci $\hat{0} \notin A$ (căci dacă am admite $\hat{0} \in A$, atunci $-\hat{0} \notin A$, contradicție). Rezultă $A \subset \{\hat{1}, \hat{2}, ..., \hat{k}, -\hat{1}, -\hat{2}, ..., -\hat{k}\}$. Dar A conține $k + 2$ elemente și în mulțimea $\{\hat{1}, \hat{2}, ..., \hat{k}, -\hat{1}, -\hat{2}, ..., -\hat{k}\}$ nu putem alege mai mult de k clase, fără a obține două clase opuse printre ele. Așadar A ar trebui să aibă clase opuse, în contradicție cu presupunerea făcută. Astfel, acest caz nu este posibil.

Cum singurele cazuri posibile rămîn 1) și 2) subcazul a), problema este rezolvată.

CO 21. *Să se demonstreze că pentru $n \in \mathbf{N}^*$, numărul $4^{2^n+1} - 1$ nu admite alți divizori de forma $2^{2^p} + 1$ decît pe 3.*

Traian Lalescu, G. M. vol. VI, 1901

Soluție. Numărul dat se scrie sub forma:

$$4^{2^n+1} - 1 = 4(2^{2^n} + 1)(2^{2^n} - 1) + 3 =$$
$$= 4(2^{2^n} + 1)(2^{2^{n-1}} + 1)(2^{2^{n-2}} + 1) ... (2^{2^0} + 1)(2^{2^0} - 1) + 3 =$$
$$= 3 + 4(2^{2^n} + 1)(2^{2^{n-1}} + 1) ... (2^{2^0} + 1).$$

În termenul al doilea avem toate numerele de forma $2^{2^p} + 1$ cu $p \leqslant n$. Oricare din aceste numere, ca să dividă numărul dat, ar trebui să dividă și pe 3. Rezultă că singurul număr de forma $2^{2^p} + 1$ cu $p \leqslant n$, divizor al numărului din enunț, este 3.

Urmează să mai arătăm că nu avem divizori de aceeași formă pentru $p > n$. Observăm că

$$4^{2^n+1} - 1 < 2^{2^{n+1}} + 1,$$

ceea ce înseamnă că nu putem avea $p \geqslant n + 2$, deci $p = n + 1$. E suficient așadar să se arate că $2^{2^{n+1}} + 1$ nu divide pe $4^{2^{n+1}} - 1$. Aceasta rezultă imediat, dacă punem numărul dat sub forma $4(2^{2^n+1} + 1) - 5$ și ținem seama că pentru $n > 0$, numărul $2^{2^{n+1}} + 1$ nu divide numărul 5.

CO 22. *Să se rezolve în numere întregi ecuația $x^3 + 24 = 2^x$.*

N. Georgescu-Roegen, G. M. vol. XXVII, 1921

Soluție. Trebuie ca numărul x să fie par și pozitiv. Dar puterile pare ale lui 2 se termină cu 4 sau 6, deci x trebuie să se termine în 0 sau 2, adică x^3 se termină în 0 sau 8.

Pe de altă parte pentru $x > 10$, avem $x^3 + 24 < 2^x$, ceea ce se poate arăta prin inducție. Deci orice soluție este dată pentru $x \leqslant 10$. Din observația de mai sus rezultă că numai $x = 10$ este soluție a ecuației date.

CO 23. *Să se arate că în sistemul de numerație cu baza 6, nici un număr format din mai multe cifre, toate egale, nu este pătrat perfect.*

I. Cucurezeanu, G. M. 6/1972

Soluție. Pentru ca un număr să fie pătrat perfect, el trebuie să fie de forma $4k$ sau $4k + 1$. Ținînd cont că, în sistemul de numerație cu baza 6, un număr e divizibil cu 4, dacă numărul format din ultimele sale două cifre e divizibil cu 4 rezultă că toate numerele de forma $\overline{aaa \ldots a_6}$ sînt:

$$11 \ldots 1_6 \equiv 3 \pmod 4$$

$$22 \ldots 2_6 \equiv 2 \pmod 4$$

$$33 \ldots 3_6 \equiv 1 \pmod 4$$

$$44 \ldots 4_6 \equiv 0 \pmod 4$$

$$55 \ldots 5_6 \equiv 3 \pmod 4.$$

Ținînd cont de cele arătate mai sus urmează să mai analizăm numerele $33 \ldots 3_6$ și $44 \ldots 4_6$. Deoarece numerele $11 \ldots 1_6$ nu sînt pătrate perfecte, rezultă că nici numerele de forma $4 \cdot 11 \ldots 1_6 = 44 \ldots 4_6$ nu pot fi pătrate perfecte. Pe de altă parte se observă că $3 \mid 33 \ldots 3_6$, dar acest factor 3 nu poate apărea la puterea a doua, deoarece în baza 6 pentru ca un număr să se dividă cu 3 trebuie ca ultima sa cifră să se dividă cu 3. În cazul nostru ar trebui ca $3 / 11 \ldots 1_6$, ceea ce nu se poate.

CO 24. *Să se găsească un întreg pozitiv x astfel încît $2x + 1$ să fie pătrat perfect, iar între numerele $2x + 2$, $2x + 3$, ..., $3x + 2$ să nu existe pătrate perfecte.*

R. N. Gologan, G. M. 3/1972

Soluție. Trebuie să avem $2x + 1 = n^2$ și $n^2 \leqslant 3x + 2 < (n + 1)^2$ sau $x = \dfrac{n^2 - 1}{2}$ și $n^2 \leqslant \dfrac{3n^2 + 1}{2} < n^2 + 2n + 1$ sau $2n^2 \leqslant 3n^2 + 1 < 2n^2 + 4n + 2$. Prima parte a inegalității este evidentă, deoarece $0 < n^2 + 1$. Partea a doua a inegalității poate fi scrisă $n^2 - 4n - 1 < 0$ sau $n \in (2 - \sqrt{5}, 2 + \sqrt{5})$. Deoarece n este întreg și strict pozitiv rezultă $0 < n < 4$, adică $n = 1, 2, 3$ sau 4. Dintre aceste numere numai pentru $n = 3$ avem $x = \dfrac{n^2 - 1}{2} = 4$ întreg și pozitiv. Deci singura soluție a problemei este $x = 4$.

CO 25. *Să se găsească două pătrate perfecte de cîte trei cifre, care să difere numai prin cifra sutelor (se cer toate soluțiile posibile).*

Traian Lalescu, G. M. vol. VI, 1900

Soluție. Fie a și b două numere ale căror pătrate să aibă cîte 3 cifre și să difere numai prin cifra sutelor și fie d această diferență. Rezultă deci că $10 \leqslant a \leqslant 31$, $10 \leqslant b \leqslant 31$ iar $1 \leqslant d \leqslant 8$. În plus, mai avem relația

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) = 100\, d.$$

Deoarece diferența $a^2 - b^2$ este pară rezultă că a și b au aceeași paritate, deci $a - b$ este un număr par. Punînd $a - b = 2n$, rezultă $a + b = \frac{50d}{n}$ și din aceste relații găsim $a = \frac{25d}{n} + n$, iar $b = \frac{25d}{n} - n$. Deci se vede că $n \mid 25d$. Dar $a \leqslant 31$, $b \geqslant 10$ implică $a - b \leqslant 21$ și de aici rezultă $n \leqslant 10$. Urmează că $n = 5$ sau $d = kn$, sau $n = 10$ și d este un număr par. Fie $n = 5$. Atunci avem $a = 5(d + 1)$, iar $b = 5(d - 1)$ care generează soluțiile $d = 3$, $d = 4$, $d = 5$. Se găsesc soluțiile: $20^2 - 10^2 = 300$, $25^2 - 15^2 = 400$ și $30^2 - 20^2 = 500$.

Fie $d = kn$. Atunci avem $a = 25k + n$ și $b = 25k - n$. Pentru ca a și b să nu depășească valorile de mai sus nu putem lua decît $k = 1$, iar $n \leqslant 6$. Pentru $n = 1, 2, 3, 4, 5$ și 6 rezultă soluțiile: $26^2 - 24^2 = 100$, $27^2 - 23^2 = 200$, $28^2 - 22^2 = 300$, $29^2 - 21^2 = 400$, $30^2 - 20^2 = 500$, $31^2 - 19^2 = 600$.

Fie în sfîrșit $n = 10$ iar $d = 2k$. Se găsește atunci $a = 5k + 10$ și $b = 5k - 10$. Pentru ca $a \leqslant 31$ se ia $k \leqslant 4$, iar pentru $b \geqslant 10$ se ia $k \geqslant 4$. Deci $k = 4$ și avem soluția $30^2 - 10^2 = 800$. Astfel, problema admite 9 soluții.

CO 26. *Să se rezolve ecuația*

$$x + [x] = k \text{ unde } k > 0 \text{ și } k \in \mathbf{R}.$$

Ș. Bărcănescu, G. M. 8/1967

Soluție. Observăm că dacă x_0 este o soluție a acestei ecuații atunci $x_0 > 0$. Rezultă deci că $p \leqslant x_0 < p + 1$, unde p este un întreg nenegativ. Dar atunci $[x_0] = p$. Deoarece x_0 verifică ecuația dată, putem scrie $x_0 + p = k$, adică $x_0 = k - p$. Să stabilim în cele ce urmează legătura dintre p și k. Soluția x_0 verifică relația de mai sus, adică:

$$p \leqslant k - p < p + 1 \text{ sau } 2p < k < 2p + 1, \text{ adică } p \leqslant \frac{k}{2} < p + \frac{1}{2} < p + 1.$$

Deoarece $p \in \mathbf{Z}$, rezultă că $p = \left[\frac{k}{2}\right]$. Deci, ca observație, k verifică relația: $\left[\frac{k}{2}\right] \leqslant \frac{k}{2} < \left[\frac{k}{2}\right] + \frac{1}{2}$. Soluția ecuației este $x_0 = k - \left[\frac{k}{2}\right]$.

CO 27. *Fie p și q două numere naturale prime consecutive ($p < q$). Să se determine valorile lui p pentru care este îndeplinită inegalitatea*

$$p^3 > q^2.$$

I. Ionescu, G. M. vol. XLVIII, 1942

Soluție. Din teorema lui Bertrand, demonstrată de Cebîșev, rezultă că pentru $p \geqslant 5$ între p și $2p - 2$ există cel puțin un număr prim (în cazul nostru q), adică

$$p < q < 2p - 2.$$

Pe de altă parte, pentru $p \geqslant 5$, rezultă $\sqrt{p} > 2$. Urmează deci că $p\sqrt{p} > 2p$. Deci se poate scrie

$$q < 2p - 2 < 2p < p\sqrt{p}, \text{ adică } q^2 < p^3, \text{ pentru } p \geqslant 5.$$

Dacă $p = 2$, $q = 3$ inegalitatea nu se verifică, iar dacă $p = 3$, $q = 5$ inegalitatea dată este verificată.

În concluzie inegalitatea dată se verifică pentru orice număr prim $p \geqslant 3$.

CO 28. *Știind că numărul* $\overline{2x03y6z3}$ *se divide cu* 3367 *să se găsească cifrele* x, y, z *nenule.*

Hagi Ivanov, vol. XXII, 1915

Soluție. Se observă că numărul 3367 se poate scrie $3367 = 7 \cdot 13 \cdot 37$. Aplicînd criteriile de divizibilitate prin 7, 13 și 37 numărului $\overline{2x03y6z3}$ se găsesc relațiile:

$$\begin{cases} x - y + 3z + 5 = 7m & \text{unde } m < 6, \\ x - y + 10z + 8 = 13p, & \text{unde } p < 5, \\ x + y + 10z + 24 = 37q & \text{unde } q < 3, \quad \text{iar } m, p, q \in \mathbf{N}. \end{cases}$$

Scăzînd primele două relații rezultă:

$$7z + 3 = 13p - 7m \text{ sau } 7(z + m) = 13p - 3.$$

Rezultă deci că $p = 1, 2, 3$ sau 4. Numai $p = 4$ face membrul al doilea un multiplu de 7. Prin urmare $x - y + 10z = 44$.

Scăzînd această relație din a treia rezultă: $2y - 6 = 37(q - 2)$.

Dar membrul stîng nu poate fi decît zero, deci $y = 3$ și prin urmare $q = 2$. Ultima ecuație devine: $x + 10z = 47$ adică $x = 7$ și $z = 4$.

Numărul căutat va fi 27033643.

Comentariu. Pentru a proba divizibilitatea unui număr prin 7 (sau 13) se procedează astfel: se consideră numărul dat $n = a \cdot 1000 + b$ unde $a, b \in \mathbf{N}$, $b < 1000$. Dacă 7 sau 13 divide $b - a$, atunci 7 sau 13 divide n.

Pentru a proba divizibilitatea unui număr cu 37 se împarte numărul dat în grupe de trei cifre de la dreapta la stînga. Dacă suma numerelor ce alcătuiesc grupele de mai sus este un număr divizibil prin 37, atunci numărul dat este divizibil prin 37.

CO 29. *Să se arate că resturile împărțirii lui* $10^n - 1$ *prin* 37 *sînt pătrate perfecte pentru orice număr natural* n.

Ion Tomescu, G. M. 13/1962

Soluție. Se observă că $27 \cdot 37 = 999$, iar $999 = 10^3 - 1$. Deci $10^3 - 1 \equiv 0 \pmod{37}$. Să arătăm că $10^{3k} - 1 \equiv 0 \pmod{37}$. Într-adevăr

$$10^{3k} - 1 = (10^3 - 1)(10^{3k-3} + 10^{3k-6} + \ldots + 1) \equiv 0 \pmod{37}.$$

De aici rezultă că dacă $n = 3k$, restul împărțirii lui $10^n - 1$ prin 37 va fi 0, deci un pătrat perfect.

Dacă $n = 3k + 1$ rezultă: $10^n - 1 = 10^{3k+1} - 1 = \underbrace{999\ldots99}_{3k+1 \text{ cifre}} \equiv 9 \pmod{37}$ adică restul împărțirii este 9, care este un pătrat perfect.

Dacă $n = 3k + 2$ rezultă: $10^n - 1 = 10^{3k+2} - 1 = \underbrace{999\ldots99}_{3k+2 \text{ cifre}} \equiv 99 \pmod{37} \equiv 25 \pmod{37}$. Deci în acest caz restul este $25 = 5^2$.

CO 30. *Să se rezolve în numere naturale ecuația:*

$$\frac{x!\,(x+y+1)!}{x(x-1)\ldots21 + (x-1)\,x\ldots32 + \ldots + (x+y)\ldots(y+1)} = 720.$$

C. Popovici, vol. XXXVIII, 1932

Soluție. Ecuația dată se scrie sub forma:

$$\frac{(x+y+1)!}{\frac{x!}{x!} + \frac{(x+1)\,x\ldots3.2}{x!} + \ldots + \frac{(x+y)\,(x+y-1)\ldots(y+1)}{x!}} = 720$$

sau

$$\frac{(x+y+1)!}{C_x^x + C_{x+1}^x + C_{x+2}^x + \ldots + C_{x+y}^x} = 720$$

sau

$$\frac{(x+y+1)!}{C_{x+y+1}^{x+1}} = 720 \quad \text{sau} \quad \frac{(x+y+1)!}{\frac{(x+y+1)!}{(x+1)!\,(y)!}} = 720.$$

Deci, în urma simplificărilor, rezultă ecuația $(x+1)!\,y! = 720$. Descompunînd numărul 720 în factori primi și aranjîndu-i sub formă de produs de două factoriale, rezultă:

$$(x+1)!\,y! = 6! \cdot 1! \quad \text{sau} \quad (x+1)!\,y! = 3! \cdot 5!.$$

Rezultă deci soluțiile $x = 5$, $y = 1$; $x = 0$, $y = 6$; $x = 2$, $y = 5$; $x = 4$, $y = 3$; $x = 6$, $y = 0$.

CO 31. *Să se găsească două numere naturale astfel încît suma lor ridicată la o putere egală cu cel mai mic dintre ele să dea acelaşi rezultat ca diferenţa lor ridicată la o putere egală cu cel mai mare dintre cele două numere.*

V. Şerbănescu, G. M. vol. XVII, 1911

Soluţie. Fie x, y $(x > y)$ cele două numere căutate. Rezultă:

$$(x + y)^y = (x - y)^x. \tag{1}$$

Fie $x + y = u$, iar $x - y = v$. Deci $x = \frac{1}{2}(u + v)$ şi $y = \frac{1}{2}(u - v)$.

Înlocuind în (1) rezultă

$$\left(\frac{u}{v}\right)^{\frac{u}{2}} = (uv)^{\frac{v}{2}} \text{ şi de aici } \left(\frac{u}{v}\right)^u = (uv)^v.$$

Cum membrul al doilea este număr întreg, trebuie să existe $z \in \mathbf{N}^*$ astfel încît $\frac{u}{v} = z$, adică $u = vz$. Deci $z^{\frac{vz}{2}} = (v^2 z)^{\frac{v}{2}} = v^v \cdot z^{\frac{v}{2}}$ sau $\left(z^{\frac{z}{2}}\right)^v = \left(vz^{\frac{1}{2}}\right)^v$.

Deci $z^{\frac{z}{2}} = v \cdot z^{\frac{1}{2}}$, adică $v = z^{\frac{z-1}{2}}$ şi deci $u = z^{\frac{z-1}{2}} \cdot z = z^{\frac{z+1}{2}}$.

Dar u şi v trebuie să fie numere raţionale. Acest lucru se poate realiza în două moduri şi anume:

a) Exponenţii lui z în expresiile lui u şi v sînt numere pare.

Este suficient pentru aceasta ca z să fie impar. Deci punem $z = 2t - 1$ $(t \in \mathbf{N}^*)$ şi rezultă:

$$\begin{cases} u = (2t - 1)^t \\ v = (2t - 1)^{t-1} \end{cases}$$

şi deci corespunzător, avem soluţiile:

$$\begin{cases} x = t(2t - 1)^{t-1} \\ y = (t - 1)(2t - 1)^{t-1} \end{cases}, \quad t \in \mathbf{N}^*.$$

b) Numărul z este pătrat perfect.

Fie $z = s^2$. Rezultă: $u = s^{s^2+1}$, $v = s^{s^2-1}$. Deci soluţiile sînt:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(s^{s^2+1} + s^{s^2-1}) = \frac{1}{2}(s^2 + 1)s^{s^2-1} \\ y = \frac{1}{2}(s^{s^2+1} - s^{s^2-1}) = \frac{1}{2}(s^2 - 1)s^{s^2-1} \end{cases}, \quad s \in \mathbf{N}^*.$$

CO 32. *Fie patru numere naturale nenule, distincte două cîte două și avînd proprietatea că oricare din ele divide suma celorlalte trei. Să se arate că unul din cele patru numere este egal cu suma celorlalte trei.*

Nicolae Papacu, G. M. 9–10/1982

Soluție. Fie $a, b, c, d \in \mathbb{N}^*$ cele patru numere, A $a < b < c < d$. Din ipoteză rezultă că există $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{N}$ astfel încît $b + c + d = a\alpha$, $a + c + d = b\beta$, $a + b + d = c\gamma$, $a + b + c = d\delta$.

Rezultă $a + b + c + d = (\alpha + 1)\, a$, $a + b + c + d = (\beta + 1)b$, $a + b + c + d = (\gamma + 1)\, c$, $a + b + c + d = (\delta + 1)\, d$.

Notînd $x = \alpha + 1$, $y = \beta + 1$, $z = \gamma + 1$, $t = \delta + 1$ avem $a + b + c + d = ax = by = cz = dt$. Cum $a < b < c < d$ rezultă $x > y > z > t$. Rezultă de asemenea

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} = 1. \qquad (1)$$

Vom demonstra că ecuația de mai sus cu $x > y > z > t$ are soluție, dacă și numai dacă $t = 2$. Într-adevăr din $x > y > z > t$ rezultă $\frac{1}{x} < \frac{1}{y} < \frac{1}{z} < \frac{1}{t}$, de unde $1 = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} < \frac{1}{t} + \frac{1}{t} + \frac{1}{t} + \frac{1}{t} = \frac{4}{t}$ deci $t < 4$, adică în mod necesar $t = 2$ sau $t = 3$. Dacă $t = 3$, ecuația devine $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{2}{3}$ cu $x > y > z > 3$. Dar $\frac{1}{x} < \frac{1}{y} < \frac{1}{z}$, de unde $\frac{2}{3} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} < \frac{3}{z}$, de unde $z < \frac{9}{2}$ și cum $z > 3$, deducem $z = 4$. Ecuația devine $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{12}$ cu $x > y > 4$. Demonstrăm că această ecuație nu are soluții. În adevăr: $\frac{5}{12} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} < \frac{2}{y}$, de unde $y < \frac{24}{5}$, adică $y \leqslant 4$, ceea ce contrazice $y > 4$. Așadar pentru $t = 3$ ecuația (1) nu are soluții.

Pentru $t = 2$ ecuația devine $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2}$ cu condiția $x > y > z > 2$. Această ecuație are soluții, de exemplu $x = 42$, $y = 7$, $z = 3$. (De altfel ecuația se poate rezolva complet și dă următoarele șase soluții: (42, 7, 3), (24, 8, 3), (18, 9, 3), (15, 10, 3), (20, 5, 4), (12, 6, 4)).

În concluzie, ecuația $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=1$ are soluție, dacă și numai dacă $t=2$, adică $\delta=1$, ceea ce implică $a+b+c=d$.

CO 33. *În cîte feluri se pot împărți n mere unei clase de m elevi în așa fel ca fiecare elev să primească cel puțin k mere? (Precizăm că nu contează ce mere primește fiecare elev, ci cîte mere primește).*

Cornel Grutan, G. M. 6/1980

Soluție. Trebuie ca $n \geqslant km$. Mai întîi se repartizează fiecărui elev cîte k mere, ceea ce se face într-un singur fel, pentru că am precizat că nu contează efectiv ce mere ajung la fiecare elev, ci numai cîte mere revin fiecăruia. Celelalte $n-km$ mere rămase se repartizează celor m elevi, primul elev primind k_1 mere, al doilea k_2 mere, ..., al m-lea k_m mere, unde $k_i \in \{0, 1, ..., n-km\}$ și $\sum_{i=1}^{m} k_i = n-km$. Așadar numărul de feluri căutat este egal cu numărul m-uplurilor $(k_1, k_2, ..., k_m)$ astfel ca $\sum_{i=1}^{m} k_i = n-km$, $k_i \geqslant 0$.

Notăm cu $N(m, n-km)$ numărul căutat; deoarece orice m-uplu $(k_1, ..., k_m)$ poate fi scris $\left(k_1, ..., k_{m-1}, n-km-\sum_{i=1}^{m-1} k_i\right)$ și deoarece $n-km-\sum_{i=1}^{m-1} k_i$ aparține mulțimii $\{0, 1, .., n-km\}$, rezultă relația de recurență:

$$N(m, n-km) = N(m-1, 0) + N(m-1, 1) + \\ + ... + N(m-1, n-km), \tag{1}$$

Observăm că $N(m-1, 0) = 1 = C_{m-1}^0$, $N(m-1, 1) = m-1 = C_{m-1}^1$ și $N(1, i) = i = C_i^1$. Atunci aplicînd în mod repetat relația de recurență (1) și regrupînd termenii după formula cunoscută

$$C_i^i + C_{i+1}^i + ... + C_{i+j}^i = C_{i+j+1}^{i+1}$$

pe care o folosim de asemenea în mod repetat, vom obține în cele din urmă: $N(m, n-km) = C_{n-km+m-1}^{m-1}$.

CO 34. *Într-o urnă sînt bile numerotate numai cu numere formate din trei cifre distincte. Presupunînd că în urnă sînt toate bilele cu numerele posibile cu trei cifre distincte, să se calculeze:*

a) *Probabilitatea ca extrăgînd o bilă să obținem un număr care să înceapă cu cifra 2.*

b) *Probabilitatea că extrăgînd o bilă să obținem o bilă care să înceapă cu o cifră impară.*

c) *Probabilitatea ca extrăgînd o bilă să obţinem o bilă care să conţină cel puţin o dată cifra 2.*

Marcel Chiriţă, G. M. 7/1971

Soluţie. a) Numărul de bile numerotate cu numere formate din trei cifre distincte este dat de numărul de sisteme ordonate de trei elemente distincte care se pot forma cu cele 10 elemente ale mulţimii cifrelor $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, din care trebuie să scădem numărul sistemelor ordonate care încep cu cifra 0 adică $A_{10}^3 - A_9^2 = 720 - 72 = 648$. Deci în urnă se găsesc 648 de bile. Se vor găsi $A_9^2 = 72$ numere care să înceapă cu cifra 2. Deci $P(A) = \frac{1}{9}$, unde A este evenimentul obţinerii unui număr care să înceapă cu cifra 2.

b) Numerele care încep cu cifră impară trebuie să înceapă cu una din cifrele 1, 3, 5, 7, 9, deci avem $5 \cdot A_9^2$ astfel de numere, de unde rezultă $P(B) = \frac{5}{9}$, unde B este evenimentul obţinerii unui număr care începe cu o cifră impară.

c) Numărul de bile care nu conţin cifra 2 este $A_9^2 - A_8^2 = 448$, de unde rezultă că $P(C) = 1 - \frac{448}{648} = \frac{25}{81}$, unde C este evenimentul obţinerii unui număr ce conţine cifra 2.

CO 35. *Avem k cutii $S_1, S_2, \ldots, S_k$, fiecare conţinînd cîte n chibrituri. Ori de cîte ori avem nevoie, luăm un chibrit dintr-o cutie aleasă la întîmplare. După un anumit timp constatăm că luînd prima cutie, aceasta conţine n_1 chibrituri. Să se afle probabilitatea ca în acel moment în celelalte cutii să fie respectiv $n_2, n_3, \ldots, n_k$ chibrituri $(0 \leqslant n_i \leqslant n$ pentru $i \in \{2, 3, \ldots, n\})$. (Generalizarea problemei lui Banach).*

Attila Darvas, G. M. 7/1971

Soluţie. Să considerăm experienţa aleatoare de extragere a uneia din cutiile $S_1, S_2, \ldots, S_k$ (după care, luînd un chibrit din ea, o repunem în mulţimea de cutii existente). Deoarece în cutia S_1 rămîn n_1 chibrituri, înseamnă că această cutie s-a scos de $n - n_1$ ori; analog cutia S_2 s-a scos de $n - n_2$ ori, ..., cutia S_k s-a scos de $n - n_k$ ori, deci experienţa s-a repetat în total de

$$n - n_1 + n - n_2 + \ldots + n - n_k = nk - \sum_{i=1}^{k} n_i \text{ ori.}$$

Într-o singură efectuare a experienţei, fiecare cutie este extrasă cu probabilitatea $\frac{1}{k}$, iar cerinţa problemei este ca din cele $nk - \sum_{i=1}^{k} n_i$ efectuări

ale experienței, cutia S_1 să apară de $n - n_1$ ori, cutia S_2 să apară de $n - n_2$ ori, ..., cutia S_k să apară de $n - n_k$ ori. Sîntem așadar în cazul schemei multinomiale. Probabilitatea cerută va fi:

$$P = \frac{\left(nk - \sum_{i=1}^{k} n_i\right)!}{(n-n_1)!\,(n-n_2)!\ldots(n-n_k)!} \cdot \left(\frac{1}{k}\right)^{n-n_1} \cdot \left(\frac{1}{k}\right)^{n-n_2} \cdot \ldots \cdot \left(\frac{1}{k}\right)^{n-n_k} =$$

$$= \frac{\left(nk - \sum_{i=1}^{k} n_i\right)!}{k^{nk-\sum_{i=1}^{k} n_i} \prod_{i=1}^{k} (n-n_i)!}.$$

În cazul $k = 2$, $n_1 = 0$, $n_2 = p$ obținem problema lui Banach, în care probabilitatea este

$$P = \frac{(2n-p)!}{2^{2n-p} \cdot n!(n-p)!} = \frac{C_{2n-p}^{n}}{2^{2n-p}}.$$

CO 36. *Pe un cerc se consideră punctele fixe A și B, care nu sînt diametrul opuse și punctele mobile C, D astfel încît linia poligonală $ABCD$ este un patrulater convex, iar $|CD| \equiv |AB|$. Să se arate că maximul perimetrului patrulaterului $ABCD$ se obține atunci cînd $CD \| AB$.*

A. V. Mihai, G. M. 9–10/1982

Soluție. Fie O centrul cercului. Notăm $2\alpha = m(\widehat{AOB})$ și $2x = m(\widehat{BOC})$, x variabil (fig. CO 36). Avem: $\|AB\| = 2R \sin\alpha = \|CD\|$, $\|BC\| = 2R \sin x$, unde R este raza cercului. Dar $m(\widehat{AOD}) = 360 - m(\widehat{AOB}) - m(\widehat{COD}) - m(\widehat{BOC})$, și deoarece $\|AB\| = \|CD\|$, avem $m(\widehat{AOB}) = m(\widehat{COD})$, deci,

$$m(\widehat{AOD}) = 360 - 4\alpha - 2x = 2(180 - 2\alpha - x).$$

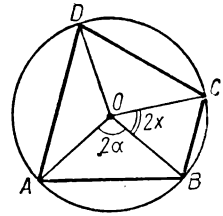


Fig. CO 36

În plus, $\|AD\| = 2R \sin\dfrac{\widehat{AOD}}{2} = 2R \sin(180 - 2\alpha - x) =$

$= 2R \sin(2\alpha + x)$.

Rezultă că perimetrul patrulaterului $ABCD$ este

$$P_{ABCD} = 4R \sin\alpha + 2R \sin x + 2R \sin(2\alpha + x).$$

Fie funcţia $E:\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbf{R}$, $E(x) = \sin x + \sin(2\alpha + x) = 2\sin(\alpha + x)\cos\alpha$.
Deoarece $\cos\alpha$ este constant, valoarea maximă a funcţiei E se atinge cînd $\sin(\alpha + x) = 1$, adică $\alpha + x = 90$. Deci $\max E(x) = 2\cos\alpha$.
Rezultă că valoarea maximă a perimetrului $P = P_{ABCD}$ este:

$$P = 4R\sin\alpha + 4R\cos\alpha = 4R(\sin\alpha + \cos\alpha).$$

Deoarece $\alpha + x = 90$, rezultă $2(\alpha + x) = 180$, sau
$m(\widehat{AOB}) + m(\widehat{BOC}) = 180$, deci $O \in |AC|$. Rezultă $\{O\} = |AC| \cap |BD|$. Dar $\|OA\| = \|OC\| = R$, $\|OB\| = \|OD\| = R$, deci patrulaterul $ABCD$ este paralelogram înscris într-un cerc. În concluzie, patrulaterul $ABCD$ este un dreptunghi şi în particular avem $AB \parallel CD$.

CO 37. *Să se arate că în orice triunghi avem (cu notaţiile obişnuite)* $\frac{R}{2r} \geqslant \frac{m_a}{h_a}$, *egalitatea avînd loc în cazul triunghiului echilateral.*

L. Panaitopol, G. M. 11/1982

Soluţie. Peste tot vom folosi notaţiile obişnuite într-un triunghi. Vom folosi o construcţie geometrică auxiliară; fie triunghiul ABC şi $A'B'C'$ triunghiul său median (A', B', C' sînt mijloacele laturilor $|BC|$, $|CA|$, $|AB|$. Fie $A'M' \perp AC$ (fig. CO 37), cu $M' \in AC$ şi fie M simetricul lui A' faţă de M'. De asemenea fie $A'N' \perp AB$, cu $N' \in AB$ şi fie N simetricul lui A' faţă de N'. Se observă că

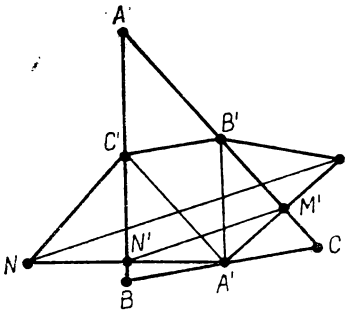


Fig. CO 37

$$\|MN\| \leqslant \|MB'\| + \|B'C'\| + \|C'N\|. \qquad (1)$$

Deoarece N este simetricul lui A' faţă de AB şi M este simetricul lui A' faţă de AC, avem:

$$\|MB'\| = \|B'A'\|, \ \|NC'\| = \|C'A'\|. \qquad (2)$$

Relaţiile (2) introduse în (1) dau:

$$\|MN\| \leqslant \|B'A'\| + \|A'C'\| + \|C'B'\| = P_{A'B'C'} = \frac{1}{2}P_{ABC} = p \qquad (3)$$

unde am notat cu P_{ABC}, respectiv cu $P_{A'B'C'}$ perimetrul triunghiului ABC, respectiv perimetrul triunghiului $A'B'C'$. Deoarece $\|A'N'\| = \|N'N\|$ şi $\|A'M'\| = \|M'M\|$, rezultă că $|M'N'|$ este linie mijlocie în triunghiul $A'NM$ şi deci

$$\|MN\| = 2\|M'N'\|. \qquad (4)$$

În triunghiul $A'N'M'$ aplicăm teorema sinusurilor:

$$\frac{\|M'N'\|}{\sin \widehat{N'A'M'}} = \frac{\|A'M'\|}{\sin \widehat{A'N'M'}}. \tag{5}$$

Deoarece $m(\widehat{A'N'B}) = m(\widehat{A'M'C}) = 90$, patrulaterul $AN'A'M'$ este inscriptibil, deci $m(\widehat{N'A'M'}) = 180 - m(\hat{A})$, de unde rezultă că $\sin(\widehat{N'A'M'}) = \sin \hat{A}$. De asemenea, $m(\widehat{A'AC}) = m(\widehat{A'N'M'})$. Deci egalitatea (5) se mai poate scrie

$$\frac{\|M'N'\|}{\sin \hat{A}} = \frac{\|A'M'\|}{\sin \widehat{A'AM'}} = \|AA'\|, \text{ deoarece } m(\widehat{AM'A'}) = 90.$$

Deci

$$\|M'N'\| = m_a \cdot \sin A. \tag{6}$$

Înlocuind relațiile (4) și (6) în relația (3), obținem

$$2 \cdot m_a \cdot \sin A \leqslant p.$$

Înmulțind ultima inegalitate cu $\frac{S}{p \cdot \sin A}$, obținem

$$\frac{2 \cdot m_a \cdot S}{p} \leqslant \frac{S}{\sin A}.$$

Dar $\frac{S}{p} = r$ și $S = \frac{bc \sin A}{2}$, astfel că obținem

$$2m_a \cdot r \leqslant \frac{b \cdot c \sin A}{2 \sin A} = \frac{b \cdot c}{2} = \frac{a \cdot b \cdot c}{4S} \cdot \frac{2S}{a} = R \cdot h_a,$$

$\left(\text{în ultima egalitate am folosit formulele cunoscute } R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4S} \text{ și } h_a = \frac{2S}{a}\right)$.

Rezultă așadar: $R/2r \geqslant m_a/h_a$.

În triunghiul echilateral ABC cu lungimea laturii egală cu a se poate arăta egalitatea cerută, ținînd cont că inegalitatea (3) devine egalitate, deoarece $B', C' \in |M'N'|$. Putem proceda și altfel, și anume din

$$R = \frac{a\sqrt{3}}{3}, \quad r = \frac{a\sqrt{3}}{6}, \quad m_a = h_a = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \text{ rezultă } \frac{R}{2r} = \frac{m_a}{h_a} = 1.$$

Comentariu. Se cunoaște că $\frac{R}{2r} \geqslant 1$ (Euler). Cum $\frac{m_a}{h_a} \geqslant 1$, rezultă că problema de mai sus implică inegalitatea lui Euler.

Găsim astfel o aproximare mai bună a raportului $R/2r$, deoarece $R/2r \geqslant m_a/h_a \geqslant 1$.

CO 38. *Se dă triunghiul ABC. Demonstrați că propozițiile*

i) $\| BC \|^2 \geqslant 4 \cdot \| AB \| \cdot \| AC \|$;

ii) $(\exists)\, D \in [BC]$ *astfel încît* $\| AB \| \cdot \| AC \| = \| BD \| \cdot \| DC \|$, *sînt echivalente.*

Dorel Miheț, G. M. 2/1982

Soluție. Vom demonstra implicația i) $\Rightarrow$ ii). Notăm $a = \| BC \|$, $b = \| AC \|$, $c = \| AB \|$, $x = \| BD \|$, x urmînd a fi determinat. Avem $\| DC \| = a - x$. Condiția i) se scrie

$$a^2 \geqslant 4bc \text{ sau } a^2 - 4bc \geqslant 0. \tag{1}$$

Condiția ii) se poate scrie

$$bc = x(a - x) \text{ sau } x^2 - ax + bc = 0. \tag{2}$$

Ecuația (2) are soluții reale, dacă și numai dacă $\Delta = a^2 - 4bc \geqslant 0$, ceea ce conform ipotezei (1) este adevărat.

Soluția $x_1 = \dfrac{a - \sqrt{a^2 - 4bc}}{2}$ convine, dacă $x_1 \geqslant 0$, adică $\sqrt{a^2 - 4bc} \leqslant a$.

Pentru ca soluția $x_2 = \dfrac{a + \sqrt{a^2 - 4bc}}{2}$ să răspundă afirmativ problemei, trebuie ca

$$x_2 \leqslant a \Leftrightarrow \frac{a + \sqrt{a^2 - 4bc}}{2} \leqslant a \Leftrightarrow \sqrt{a^2 - 4bc} \leqslant a.$$

Ambele condiții sînt îndeplinite (deși ne era suficientă una singură), căci sînt echivalente cu $a^2 - 4bc \leqslant a^2 \Leftrightarrow -4bc \leqslant 0$, evident. Deci există $D \in [BC]$, cu $\| BD \| = \dfrac{a \pm \sqrt{a^2 - 4bc}}{2}$ astfel încît:

$$\| AB \| \cdot \| AC \| = \| BD \| \cdot \| DC \|.$$

Demonstrăm implicația ii) $\Rightarrow$ i). Presupunem că există $D \in [BC]$ astfel încît $\| AB \| \cdot \| AC \| = \| BD \| \cdot \| DC \|$, ceea ce este evhivalent cu faptul că ecuația (2) admite soluții reale, altfel spus $\Delta = a^2 - 4bc \geqslant 0$.
Dar

$$a^2 - 4bc = \| BC \|^2 - 4 \| AB \| \cdot \| AC \|,$$

deci rezultă: $\| BC \|^2 \geqslant 4 \| AB \| \cdot \| AC \|$.

CO 39. *Fie $[AB]$ un diametru al cercului (O) și M un punct mobil pe acest cerc. Tangenta în M taie tangentele în A și B respectiv în punctele C și D. Se cere locul geometric al punctului I, intersecția diagonalelor $|AD|$ și $|BC|$ ale trapezului $ABCD$.*

C. Săndulache, G. M. F.-B. 1961

Soluție. Luînd dreapta care conține diametrul $[AB]$ ca axă Ox, mediatoarea acestui segment ca axă Oy, iar ca unitate de măsură raza cercului (fig. CO 39), avem ecuația cercului: $x^2 + y^2 = 1$.

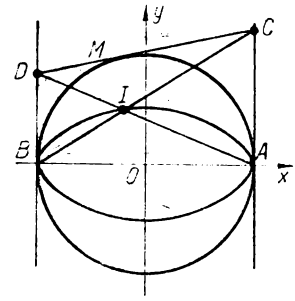


Fig. CO 39.

Dacă $M(\alpha, \beta)$ este un punct de pe cerc, adică pentru care avem

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1 \qquad (1)$$

atunci tangenta la cerc dusă prin acest punct va fi dată de:

$$\alpha x + \beta y - 1 = 0. \qquad (2)$$

Cele patru vîrfuri ale trapezului menționat în enunț vor fi: $A(1, 0)$; $B(-1, 0)$; $C\left(1, \frac{1-\alpha}{\beta}\right)$ și $D\left(-1, \frac{1+\alpha}{\beta}\right)$.

Coordonatele punctului I se vor obține din intersecția dreptelor BC și AD, ale căror ecuații sînt

$$y = \frac{1-\alpha}{2\beta}(x+1) \text{ respectiv } y = -\frac{1+\alpha}{2\beta}(x-1). \qquad (3)$$

Eliminînd α și β între relațiile (1) și (3) se obține:

$$x^2 + \frac{(1-x^2)^2}{4y^2} - 1 = 0, \text{ sau } (x^2-1)(4y^2 + x^2 - 1) = 0.$$

Cum $x^2 - 1 \neq 0$, M fiind între cele două tangente ecuația locului este elipsa $x^2 + 4y^2 - 1 = 0$.

CO 40. *Să se determine o parabolă dîndu-se focarul, o tangentă și parametrul.*

Bogdan Ionescu, G. M. vol. II, 1896/1897

Soluție. Pentru determinarea parabolei în condițiile specificate de enunțul problemei, vom utiliza următoarele proprietăți cunoscute din geometria analitică:

P1. Directoarele parabolelor cu focarul în punctul F și parametrul p, sînt dreptele situate la distanța p de focarul F, deci tangente cercului cu centrul în F și raza p, iar vîrfurile corespunzătoare acestor parabole se vor afla pe

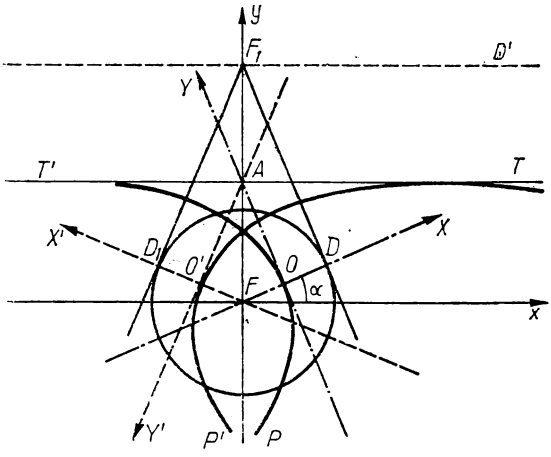


Fig. CO 40.

cercul concentric de rază $\frac{p}{2}$, deoarece distanța de la vîrf la focar este egală cu distanța de la vîrf la directoare.

P2. Simetricul focarului în raport cu orice tangentă la parabolă, aparține directoarei.

Fie deci punctul F focarul și dreapta $T'T$ tangenta la parabola cu parametrul dat p. Punctul F_1, simetricul punctului F în raport cu dreapta $T'T$ va aparține directoarei conform cu proprietatea P2. Directoarea la parabolă, va fi tangenta din punctul F_1 la cercul cu centrul în F și raza p, conform proprietății P2. În funcție de distanța $\|FA\|$ de la punctul P la dreapta $T'T$, problema poate avea sau nu soluție:

a) Dacă $\|FF_1\| = 2\|FA\| > p$, atunci prin punctul F_1, exterior cercului de centru F și rază p, vom putea duce două tangente la acest cerc, deci vom avea două soluții (fig. CO 40):

— parabola cu focarul în F, avînd ca directoare tangenta F_1D și vîrful în punctul O situat la jumătatea distanței dintre F și punctul de contact D;

— parabola cu focarul în F, avînd ca directoare cealaltă tangentă F_1D_1 și focarul în punctul O' situat la jumătatea distanței dintre F și celălalt punct de contact D_1.

b) Dacă $\|FF_1\| = p$, atunci prin punctul F_1, situat pe cercul de centru F și rază p, putem duce o singură tangentă la cerc, deci vom avea o singură soluție și anume, parabola cu focarul în F, avînd ca directoare tangenta F_1D_1 și vîrful în punctul A.

c) Dacă $\|FF_1\| < p$, nu avem soluții, deoarece punctul F_1 este interior cercului cu centrul F și raza p.

Soluție analitică. Alegem originea sistemului de coordonate în focarul F, ca axă a absciselor paralela prin F la tangenta $T'T$, iar ca axă a ordonatelor dreapta FA perpendiculară din F pe $T'T$. Notînd $\|FA\| = a$, ecuația dreptei $T'T$ va fi:

$$y = a \ (a > 0), \tag{1}$$

iar ecuația cercului cu centrul în F și raza p:

$$x^2 + y^2 - p^2 = 0. \tag{2}$$

Dacă D este un punct curent de pe cercul (2), atunci coordonatele lui vor fi:

$$x = p \cos \alpha, \quad y = p \sin \alpha \tag{3}$$

în care α este unghiul făcut de raza FD cu direcția pozitivă a axei absciselor (fig. CO 40). Conform cu proprietatea P1, directoarele parabolelor cu focarul F și parametrul p, vor fi tangentele acestui cerc în punctul D, deci vor avea ecuația:

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0. \tag{4}$$

Tangenta în vîrful parabolei va fi paralelă cu directoarea și trece prin mijlocul O al segmentului $|FD|$, ecuația ei fiind:

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0 \tag{5}$$

iar axul parabolei este dreapta FD, perpendiculară pe directoare, cu ecuația dată de:

$$-x \sin \alpha + y \cos \alpha = 0. \tag{6}$$

Utilizînd definiția parabolelor, ca locul geometric al punctelor din plan egal depărtate de focar și directoare, obținem ecuația acestora:

$$x^2 + y^2 = (x \cos \alpha + y \sin \alpha - p)^2,$$

$$x^2 + y^2 = (x \cos \alpha + y \sin \alpha)^2 - 2p(x \cos \alpha + y \sin \alpha) + p^2,$$

$$x^2 + y^2 - (x \cos \alpha + y \sin \alpha)^2 = p^2 - 2p(x \cos \alpha + y \sin \alpha),$$

$$x^2(1-\cos^2 \alpha) + y^2(1-\sin^2 \alpha) - 2xy \cos \alpha \sin \alpha = p^2 - 2p(x \cos \alpha + y \sin \alpha),$$

$$x^2 \sin^2 \alpha + y^2 \cos^2 \alpha - 2xy \cos \alpha \sin \alpha = p^2 - 2p(x \cos \alpha + y \sin \alpha) \tag{7}$$

deci, ecuația locului mai poate fi scrisă și sub forma:

$$(-x \sin \alpha + y \cos \alpha)^2 = p^2 - 2p(x \cos \alpha + y \sin \alpha). \tag{7'}$$

Pentru a determina valorile măsurii unghiului α vom pune condiția ca dreapta (1) să fie tangentă parabolelor (7'). Abscisele punctelor de intersecție dintre aceste curbe vor fi date de ecuația:

$$(-x \sin \alpha + a \cos \alpha)^2 - p^2 + 2p(x \cos \alpha + a \sin \alpha) = 0$$

sau

$$x^2 \sin^2 \alpha - 2\cos \alpha (a \sin \alpha - p)x + a^2 - (a \sin \alpha - p)^2 = 0 \tag{8}$$

iar condiția de tangență va fi dată de relația

$$\Delta = \cos^2 \alpha (a \sin \alpha - p)^2 - \sin^2 \alpha [a^2 - (a \sin \alpha - p)^2] =$$

$$= (a \sin \alpha - p)^2 - a^2 \sin^2 \alpha = p(p - 2a \sin \alpha) = 0. \tag{8'}$$

a) Pentru $p < 2a$, din ecuația $p - 2a \sin \alpha = 0$ deducem cele două valori acceptabile pentru argumentul α: $\alpha = \alpha'$ și $\alpha = \alpha''$ $(\alpha + \alpha'' = \pi)$, care ne vor conduce la cele două soluții ale problemei. Prin schimbarea de variabile definită astfel:

$$\begin{cases} X = x \cos \alpha' + y \sin \alpha' - \dfrac{p}{2} \\ Y = -x \sin \alpha' + y \cos \alpha' \end{cases} \tag{9}$$

obținem ecuația curbei sub forma canonică:

$$Y^2 = -2pX, \tag{10}$$

adică parabola P cu focarul în F și vîrful în O, iar prin schimbarea de variabile definită prin:

$$\begin{cases} X' = x \cos \alpha'' + y \sin \alpha'' - \dfrac{p}{2} \\ Y' = -x \sin \alpha'' + y \cos \alpha'' \end{cases} \tag{9'}$$

obținem forma canonică a ecuației:

$$Y'^2 = -2pX' \tag{10'}$$

ce reprezintă parabola cu același focar F și vîrful în O'.

b) Pentru $p = 2a$, obținem o singură valoare a argumentului: $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$. Ținînd seamă de această valoare, schimbarea de variabile definită mai sus se scrie:

$$\begin{cases} X = x - \dfrac{p}{2} = x - a \\ Y = y \end{cases} \tag{9''}$$

și ecuația canonică (10) va reprezenta parabola cu focarul F și vîrful în punctul A.

c) Pentru $p > 2a$ nu avem soluții, deoarece $\sin \alpha$ nu poate lua valori supraunitare.

CO 41. *Se consideră o elipsă și o dreaptă* Δ *perpendiculară în punctul* I *pe semiaxa mare* $|AB|$. *Fie* M *un punct variabil pe elipsă și* $\{P\} = AM \cap \Delta$; *dreapta* BP *întîlnește elipsa în* N. *Să se afle locurile proiecțiilor punctelor* A *și* B *pe dreapta* MN.

A. Susea, G. M. F.-B, 2/1961

Soluție. Fie $A(a, 0)$, $B(-a, 0)$, $I(i, 0)$ (fig. CO 41 a) cu condiția $-a < i < a$, $P(i, y_P)$, $M(a \cos \alpha, b \sin \alpha)$ și $N(a \cos \beta, b \sin \beta)$.

Punctele A, P şi M fiind coliniare, între coordonatele lor avem relaţia

$$ay_P(1 - \cos\alpha) = b(a - i)\sin\alpha \text{ sau}$$

$$ay_P \sin\frac{\alpha}{2} = b(a - i)\cos\frac{\alpha}{2} \quad (1)$$

iar din colinearitatea punctelor B, P şi N rezultă relaţia

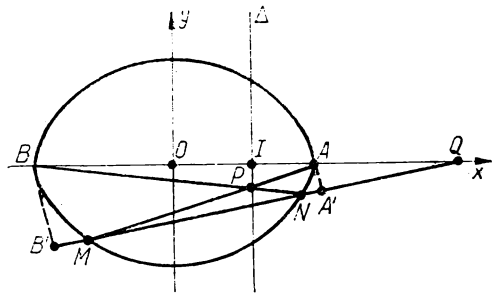


Fig. CO 41, a

$$ay_P(1 + \cos\beta) = b(a + i)\sin\beta \text{ sau } ay_P\cos\frac{\beta}{2} = b(a + i)\sin\frac{\beta}{2}. \quad (2)$$

Eliminînd parametrul y_P între relaţiile (1) şi (2) obţinem legătura între punctele M şi N astfel încît punctul $\{P\} = AM \cap BN$ să aparţină dreptei Δ atunci cînd punctul M variază pe elipsă:

$$(a - i)\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} = (a + i)\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2} \text{ sau } a\cos\frac{\alpha + \beta}{2} = i\cos\frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Fie acum $Q(q, 0)$ punctul în care dreapta MN intersectează axul Ox. Din colinearitatea punctelor M, N şi Q se deduce relaţia:

$$q(\sin\alpha - \sin\beta) = a(\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta)$$

sau

$$q\cos\frac{\alpha + \beta}{2} = a\cos\frac{\alpha - \beta}{2} \quad (4)$$

din care, ţinînd seamă de relaţia (3), se obţine $q = \frac{a^2}{i}$ $(i \neq 0)$ şi putem deci conchide că punctul Q este fix, iar dreapta MN conţine punctul fix Q oricare ar fi poziţia punctului M pe elipsă.

Ţinînd seamă de valoarea lui q calculată mai înainte, deducem

$$\frac{\|IA\|}{\|IB\|} : \frac{\|QA\|}{\|QB\|} = \frac{a - i}{a + i} : \frac{a - q}{a + q} = -$$

$$- \frac{(a - i)(q + a)}{(a + i)(q - a)} = -\frac{(a - i)(a + i)}{(a - i)(a - i)} =$$

$$= -1$$

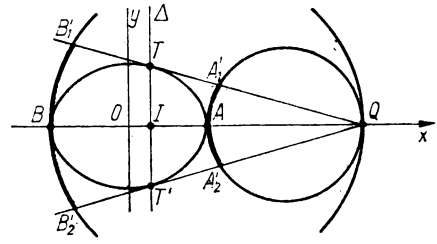


Fig. CO 41, b

de unde putem conchide că punctul Q este polul dreptei Δ, deoarece punctele I și Q sînt conjugate armonic în raport cu elipsa dată. Cum însă punctele T și T' de tangență ale tangentelor din Q la elipsă aparțin și dreptei Δ care este polara lui Q în raport cu elipsa, rezultă că punctele locurilor geometrice cerute trebuie căutate pe semidreptele cu originea în Q, situate în interiorul unghiului $\widehat{TQT'}$. Ecuația dreptei MQ și ecuațiile dreptelor perpendiculare pe aceasta din punctele B și A, sînt respectiv:

$$\frac{x-q}{a\cos\alpha - q} = \frac{y}{b\sin\alpha} \text{ (ecuația dreptei } MQ). \tag{5}$$

$$\frac{x+a}{b\sin\alpha} = \frac{-y}{a\cos\alpha - q} \text{ (ecuația dreptei } BB'). \tag{6}$$

$$\frac{x-a}{b\sin\alpha} = \frac{-y}{a\cos\alpha - q} \text{ (ecuația dreptei } AA'). \tag{7}$$

Locul geometric al punctului B', proiecția lui B pe dreapta MQ, va fi inclus în curba ce se obține eliminînd parametrul α între relațiile (5) și (6):

$$(x-q)(x+a) = -y^2$$

sau

$$x^2 + y^2 - (q-a)x - aq = 0$$

ce reprezintă cercul de diametru $[BQ]$. Locul geometric căutat va fi deci porțiunea din cerc situată în interiorul unghiului $\widehat{TQT'}$, adică arcul de cerc $\widehat{B_1'BB_2'}$.

Locul geometric al punctului A', proiecția lui A pe dreapta MQ, va fi inclus în curba ce se obține eliminînd parametrul α între relațiile (5) și (7):

$$(x-q)(x-a) = -y^2$$

sau

$$x^2 + y^2 - (q+a)x + aq = 0,$$

ce reprezintă cercul de diametru $[BQ]$. Locul geometric căutat va fi deci porțiunea din acest cerc situată în interiorul unghiului $\widehat{TQT'}$, adică arcul de cerc $\widehat{A_1'AA_2'}$ (fig. CO 41b).

CO 42. *Un triunghi are vîrful A fix și baza $|BC|$ de direcție fixă Δ și lungime constantă k. Pe dreptele AB și AC se iau punctele D și E astfel ca segmentul $|DE|$ să aibă o direcție fixă Δ' și o lungime constantă. Să se găsească locul punctelor D și E, cînd punctul B descrie o elipsă.*

Soluție. Luăm ca axe oblice de coordonate dreapta Δ și o paralelă la Δ' dusă prin punctul A (fig. CO 42). Pe semiaxa $A\Delta'$ luăm segmentul $[A\ M]$ de lungime egală cu a. Considerăm cazul general în care B descrie o conică oarecare Γ, care, raportată la sistemul de axe ales, va avea ca ecuație:

$$F(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0. \quad (1)$$

Dacă notăm cu u și v coordonatele punctului curent B de pe conica Γ, adică pentru care $F(u, v) = 0$, atunci punctul C va avea coordonatele $x = u + k$, $y = v$, iar locul geometric al punctului C va fi dat de ecuația

$$F(x - k, y) = 0 \quad (2)$$

și reprezintă o curbă Γ', obținută prin translația curbei Γ, pe direcția Δ, cu o cantitate egală cu k, adică o conică congruentă cu conica descrisă de punctul B.

Fie $B(u, v)$ punctul curent de pe conica Γ. Corespondentul său de pe curba Γ' va fi punctul $C(u + k, v)$.

În acest caz, dreptele AB și AC au drept ecuații:

$$vx - uy = 0 \text{ — dreapta } AB; \quad (3)$$

$$vx - (u + k)y = 0 \text{ — dreapta } AC. \quad (4)$$

Punctul D se află la intersecția dreptei AB cu paralela prin punctul M la dreapta AC. Ecuația dreptei MD, paralelă prin M la AC, este:

$$vx - (u + k)y + a(u + k) = 0. \quad (5)$$

Coordonatele punctului D vor fi date de soluția sistemului format din ecuațiile (3) și (5):

$$x = \frac{au(u + k)}{vk}, \quad y = \frac{a(u + k)}{k} \quad (6)$$

iar locul geometric al punctului D se va obține eliminînd pe u și v între relațiile (6) și $F(u, v) = 0$. Pentru u și v se obțin deci valorile: $u = \frac{k(y - a)}{a}$, $v = \frac{ky(y - a)}{ax}$

iar locul geometric va avea drept ecuație implicită pe:

$$F\left[\frac{k(y - a)}{a}, \frac{ky(y - a)}{ax}\right] = 0 \quad (7)$$

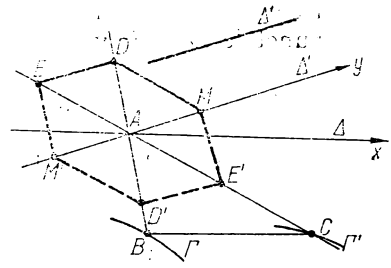


Fig. CO 42.

adică, ținînd seamă de forma (1):

$$k^2(y-a)^2(a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2)+$$
$$+2kax(y-a)(a_{13}x+a_{22}y)+a_{33}a^2x^2=0, \tag{7'}$$

ecuație de gradul 4 în variabilele x și y, reprezentînd o cuartică.

Punctul E se află la intersecția dreptei AC cu paralela prin punctul D la dreapta Δ'. Ecuația dreptei DE, paralela prin D la axa Ay, este:

$$x=\frac{au(u+k)}{vk}. \tag{8}$$

Coordonatele punctului E vor fi date de soluția sistemului format din ecuațiile (4) și (8):

$$x=\frac{au(u+k)}{vk},\quad y=\frac{au}{k} \tag{9}$$

iar locul geometric al punctului E se va obține eliminînd pe u și v între relațiile (9) și $F(u,v)=0$. Din relațiile (9) pentru u și v vom obține valorile:

$$u=\frac{ky}{a},\quad v=\frac{ky(y+a)}{ax}$$

iar locul geometric căutat, va fi dat de următoarea ecuație:

$$F\left(\frac{ky}{a},\ \frac{ky(y+a)}{ax}\right)=0 \tag{10}$$

adică, ținînd seamă de forma (1):

$$k^2y^2[a_{11}x^2+2a_{12}x(y+a)+a_{22}(y+a)^2+$$
$$+2kaxy(a_{13}x+a_{23}(y+a)]+a_{33}a^2x^2=0, \tag{10'}$$

care reprezintă de asemenea o cuartică, obținută prin translația cuarticei reprezentată prin ecuația (7), pe direcția Δ', cu o cantitate egală cu a.

În concluzie, putem spune că, punctele B și C descriind conice congruente, punctele D și E vor descrie cuartice congruente.

CO 43. *Fie* $f:[0,1]\to\mathbf{R}$ *continuă. Să se arate că seria* $\sum_{n=1}^{\infty}f(x^n)/2^n$ *este convergentă pentru orice* $x\in[0,1]$. *Să se determine funcția* f, *dacă*

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f(x^n)/2^n,\ (\forall)\ x\in[0,1].$$

Mihai Bălună, G. M. 7/1980

Soluție. Conform teoremei lui Weierstrass, funcția f fiind continuă pe intervalul compact $[0, 1]$, este mărginită și își atinge marginile, adică $(\exists)\ M > 0$ cu proprietatea $|f(x)| \leqslant M$, $(\forall)\ x \in [0, 1]$. Vom arăta că pentru orice $x \in [0, 1]$ seria $\sum_{n=1}^{\infty} f(x^n)/2^n$ este absolut convergentă și de aici va rezulta cu atît mai mult că este convergentă. În adevăr suma parțială de ordinul n din seria modulelor este:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} |f(x^n)|/2^k \leqslant M \sum_{k=1}^{n} 1/2^k = M(1 - 1/2^n) < M$$

și deci

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{n=1}^{\infty} |f(x^n)|/2^n < \infty.$$

Fie acum o funcție f cu proprietatea $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f(x^n)/2^n$, $(\forall)\ x \in [0, 1]$.

Fie $a \in [0, 1]$ și $M_a = \sup_{x\in[0,a]} f(x)$, $m_a = \inf_{x\in[0,a]} f(x)$. Deoarece funcția f este continuă, $(\exists)\ x_a \in [0, a]$ și $y_a \in [0, a]$ astfel încît $f(x_a) = M_a$ și $f(y_a) = m_a$. Avem $M_a = f(x_a) = \sum_{n=1}^{\infty} f(x_a^n)/2^n \leqslant M_a \sum_{n=1}^{\infty} 1/2^n = M_a$, ceea ce obligă la egalitățile $f(x_a^n) = M_a$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}^*$. Dar șirul $(x_a^n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge la zero și funcția f fiind continuă, avem: $f(0) = \lim f(x_a^n) = M_a$.

La fel, $m_a = f(y_a) = \sum_{n=1}^{\infty} f(y_a^n)/2^n \geqslant m_a \sum_{n=1}^{\infty} 1/2^n = m_a$ și ca mai sus deducem $m_a = f(0)$. Prin urmare f este constantă pe intervalul $[0, a]$; cum $a \in (0, 1)$ este arbitrar, făcînd $a \to 1$, obținem că f este constantă pe intervalul $[0, 1]$. Reciproc, orice funcție constantă verifică egalitatea din enunț. Deci funcțiile căutate sînt cele constante.

CO 44. *Fie* $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *un șir dat prin relațiile* $a_0 = 1$ *și* $a_n = 1 + a_{\left[\frac{n-1}{2}\right]}$, $(\forall)\ n \geqslant 1$, $n \in \mathbf{N}$. *Să se determine* a_n *în funcție de* n *și să se arate că* $\lim a_n/n = 0$.

Cristian Voica, G. M. 10/1980

Soluție. Demonstrăm prin inducție după $k \in \mathbf{N}$ următoarea proprietate:

$$2^k - 1 \leqslant n < 2^{k+1} - 1 \Rightarrow a_n = k + 1. \tag{1}$$

Pentru $k = 0$ și $k = 1$ se verifică ușor. Presupunem adevărată relația (1) pentru k și o demonstrăm pentru $k + 1$. Dacă $2^{k+1} - 1 \leqslant n < 2^{k+2} - 1$, atunci $2^k - 1 \leqslant \left[\frac{n-1}{2}\right] < 2^{k+1} - 1$ deci în baza ipotezei de inducție

$a_{\left[\frac{n-1}{2}\right]} = k + 1$ și atunci $a_n = 1 + a_{\left[\frac{n-1}{2}\right]} = k + 2$, ceea ce încheie demonstrația prin inducție. Dacă $2^k - 1 \leqslant n < 2^{k+1} - 1$, rezultă $k \leqslant \log_2 (n + 1) < k + 1$, adică $k = [\log_2 (n + 1)]$ și folosind proprietatea demonstrată (1) deducem că $a_n = 1 + [\log_2 (n + 1)]$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}$. Cum $0 < a_n/n < (2 + \log_2 (n + 1))/n$, rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} a_n/n = 0$.

CO 45. a) *Fie* $f \in \mathbf{R}[X]$ *un polinom de gradul* $n \geqslant 2$ *care are rădăcinile reale simple* $x_1, x_2, ..., x_n$. *Să se arate că* $\sum\limits_{k=1}^{n} 1/f'(x_k) = 0$;

b) *Să se deducă egalitatea:*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(a_1 - a_k)(a_2 - a_k)(a_3 - a_k) \ldots (a_{k-1} - a_k)(a_{k+1} - a_k) \ldots (a_n - a_k)} = 0$$

pentru $a_1, a_2, ..., a_n$ *numere reale distincte două cîte două.*

Marcel Țena, G. M. 5/1981

Soluție. a) Conform teoremei de descompunere a funcțiilor raționale în fracții simple, există $A_1, A_2, ..., A_n$ unic determinate astfel încît: $1/f(x) = A_1/(x - x_1) \oplus A_2/(x - x_2) + ... + A_n/(x - x_n)$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R} \setminus \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Înmulțind cu $x - x_k$ și făcînd apoi $x \to x_k$ obținem $A_k = 1/f'(x_k)$, $k = 1, 2, ..., n$. Avem așadar identitatea:

$$1/f(x) = \sum_{k=1}^{n} 1/f'(x_k)\,(x - x_k) \text{ și înmulțind cu } x:$$

$$x/f(x) = \sum_{k=1}^{n} x/f(x_k)\,(x - x_k). \text{ Făcînd } x \to \infty, \text{ obținem } 0 = \sum_{k=1}^{n} 1/f'(x_k),$$

adică egalitatea de demonstrat.

b) Se ia $f = (X - a_1)(X - a_2) \ldots (X - a_n)$ și se aplică a).

CO 46. *Să se calculeze valoarea expresiei:* $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n} \cdot \frac{d^n y}{dx^n}$ *pentru* $x = 0$, *cînd avem* $y = (\operatorname{arctg} x)^2$.

Gr. N. Makarie, G. M. vol. III, 1897

Soluție. Funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = y$ este o funcție pară deoarece „arctg" este funcție impară. Concluzie: derivata $d^n y/dx^n$ pentru $x = 0$ este nulă cînd n este impar, iar pentru n par, numărul cerut este coeficientul lui n^n din dezvoltarea Mac-Laurin a funcției f. Un procedeu simplu este următorul.

Avem

$$1/(1+x^2) = x - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots + (-1)^n x^{2n} + (-1)^{n+1} x^{2n+2}/(1+x^2),$$

$$(\forall)\, x \in (-1, 1);\ \operatorname{arctg} x = x - x^3/3 + x^5/5 - x^7/7 + \ldots +$$

$$+ (-1)^n x^{2n+1}/(2n+1) + (-1)^{n+1} \int_0^x t^{2n+2}/(1+t^2)\, dt.$$

Dar $1/(1+t^2) < 1 \Rightarrow t^{2n+2}/(1+t^2) < t^{2n+2} \Rightarrow \int_0^x t^{2n+2}/(1+t^2)\, dt <$

$$< x^{2n+3}/(2n+3) < x^3/(2n+3),\ \left|(-1)^{n+1}\int_0^x t^{2n+2}/(1+t^2)\, dt\right| <$$

$$< |x|^3/(2n+3) < 1/(2n+3)$$ și dezvoltarea căutată este:

$$\operatorname{arctg} x = x - x^3/3 + x^5/5 - x^7/7 + \ldots + (-1)^{n-1} x^{2n-1}/(2n-1) + \ldots \text{ și}$$

$$(\operatorname{arctg} x)^2 = \ldots + (-1)^{n-1} 2\,[(1/1)(2n-1) + (1/3)(2n-3) + (1/5)(2n-5) +$$

$$+ \ldots]\, x^{2n} + \ldots \text{ și coeficientul căutat se transformă în } (-1)^{n-1} 2 \cdot$$

$$(1/2)n[1/1 + 1/(2n-1) + 1/3 + 1/(2n-3) + 1/5 + 1/(2n-5) + \ldots]$$

deci are valoarea

$$(-1)^{n-1} \cdot 1/n[1 + 1/3 + 1/5 + 1/7 + \ldots + 1/(2n-3) + 1/(2n-1)].$$

CO 47. *Să se calculeze limita șirului* $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *de termen general*

$$a_n = \left(\sin \frac{n\pi}{6n+1} + \cos \frac{n\pi}{3n+1}\right)^n.$$

I. V. Maftei, G. M. 2/1979

Soluție. Se știe că $\lim_{x \to 0} \ln(1+x)/x = 1$, de unde rezultă

$$\lim_{y \to 1} \ln y/(y-1) = 1. \tag{1}$$

Logaritmînd termenul general al șirului nostru, avem:

$$\ln a_n = n \ln\left(\sin \frac{n\pi}{6n+1} + \cos \frac{n\pi}{3n+1}\right).$$

În continuare vom nota:

$$c_n = \frac{\ln\left(\sin \dfrac{n\pi}{6n+1} + \cos \dfrac{n\pi}{3n+1}\right)}{\sin \dfrac{n\pi}{6n+1} + \cos \dfrac{n\pi}{3n+1} - 1}$$

şi

$$b_n = n\left(\sin\frac{n\pi}{6n+1} - \frac{1}{2} + \cos\frac{n\pi}{3n+1} - \frac{1}{2}\right)$$

şi observăm că putem scrie $\ln a_n = c_n \cdot b_n$.

Folosind (1) în care luăm $y = \sin\frac{n\pi}{6n+1} + \cos\frac{n\pi}{3n+1}$, obţinem

$$\lim_{n\to\infty} c_n = 1. \tag{2}$$

Vom transforma acum convenabil pe b_n, pentru a putea calcula $\lim_{n\to\infty} b_n$.

Avem:

$$b_n = n\left[2\sin\frac{1}{2}\left(\frac{n\pi}{6n+1} - \frac{\pi}{6}\right)\cos\frac{1}{2}\left(\frac{n\pi}{6n+1} + \frac{\pi}{6}\right) + 2\sin\frac{1}{2}\left(\frac{n\pi}{3n+1} + \frac{\pi}{3}\right)\cdot\sin\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{n\pi}{3n+1}\right)\right] = 2n\left[\sin\frac{-\pi}{12(6n+1)}\cos\frac{(12n+1)\pi}{12(6n+1)} + \sin\frac{(6n+1)\pi}{6(3n+1)}\sin\frac{\pi}{6(3n+1)}\right] =$$

$$= 2\left[\frac{\sin\dfrac{-\pi}{12(6n+1)}}{\dfrac{-\pi}{12(6n+1)}}\cdot\frac{-n\pi}{12(6n+1)}\cdot\cos\frac{(12n+1)\pi}{12(6n+1)} + \sin\frac{(6n+1)\pi}{6(3n+1)}\cdot\frac{\sin\dfrac{\pi}{6(3n+1)}}{\dfrac{\pi}{6(3n+1)}}\cdot\frac{n\pi}{6(3n+1)}\right].$$

Atunci

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 2\left(-\frac{\pi}{72}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\pi}{18}\right) = \frac{\pi\sqrt{3}}{24}. \tag{3}$$

Aşadar, vom putea scrie folosind (2) şi (3):

$$\lim_{n\to\infty} \ln a_n = \lim_{n\to\infty} c_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = \frac{\pi\sqrt{3}}{24}$$

de unde:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = e^{\frac{\pi\sqrt{3}}{24}}.$$

CO 48. *Fie* $f(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_m$, $a_i > 0$ $i = 0, 1, \ldots, m$ *şi* A_n, G_n *media aritmetică şi media geometrică a numerelor* $f(1), f(2), \ldots, f(n)$. *Să se arate că*:

$$\lim_{n\to\infty} A_n/G_n = e^m/(m+1).$$

Tiberiu Popoviciu, G. M. vol. XLIII, 1937

Soluţie. Avem $f(x) > 0$, $x = 1, 2, \ldots, n$ astfel că media geometrică are sens. Fie $S_{n,k} = 1 + 2^k + 3^k + \ldots + n^k \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_{n,k}/n^{k+1} = 1/(k+1)$.

Avem: $A_n = \dfrac{f(1) + f(2) + \ldots + f(n)}{n} = a_0S_{n,m}/n + a_1S_{n,m-1}/n + \ldots + a_m$,

de unde $\lim_{n\to\infty} A_n/n^m = a_0/(m+1)$. Se ştie că, dacă există $\lim_{n\to\infty} u_n = u$, atunci avem şi $\lim_{n\to\infty} (u_1 + u_2 + \ldots + u_n)/n = u$. Să considerăm $u_n = \log f(x)/n^m$; atunci $\lim_{n\to\infty} u_n = \log a_0$, iar $\dfrac{\log f(1)/1^m + \log f(2)/2^m + \ldots + \log f(n)/n^m}{n} = \log G_n/(n!)^{m/n}$.

Se deduce: $\lim_{n\to\infty} \log G_n/(n!)^{m/n} = \log a_0$ sau $\lim_{n\to\infty} G_n/(n!)^{m/n} = a_0$. Deci $\lim_{n\to\infty} (A_n/G_n) \cdot (\sqrt[n]{n!}/n)^m = 1/(m+1)$. Se cunoaşte că, dacă există $\lim_{n\to\infty} u_{n+1}/u_n$, atunci există şi $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n}$ şi cele două limite sînt egale. Luînd $u_n = n!/n^n$, avem $\lim_{n\to\infty} u_{n+1}/u_n = \lim_{n\leftarrow\infty} (n/(n+1))^n = 1/e$, deci $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}/n = 1/e$. Rezultă că $\lim_{n\to\infty} A_n/G_n = e^m/(m+1)$.

CO 49. *Dacă* u_i *este al i-lea termen din şirul lui Fibonacci, să se găsească fracţiile ireductibile egale cu următoarele:*

$$\frac{u_{2n}-1}{u_{2n+1}},\quad \frac{u_{2n}+1}{u_{2n+1}},\quad \frac{u_{2n}-1}{u_{2n-1}},\quad \frac{u_{2n}+1}{u_{2n-1}}.$$

I. B. Florescu, G. M. vol. XLII, 1936

Soluţie. Se notează: $u_0 = 1$, $u_1 = 1$, $u_2 = 2$, ... termenii şirului lui Fibonacci. Se poate demonstra uşor că: $u_{n+m} = u_n \cdot u_m + u_{n-1} \cdot u_{m-1}$ şi $u_n^2 - (-1)^n = u_{n+1} \cdot u_{n-1}$ şi se deosebesc două cazuri după paritatea lui n.

Cazul 1. $n =$ par. Avem

$$\frac{u_{2n}-1}{u_{2n+1}} = \frac{u_n^2 + u_{n-1}^2 - 1}{u_n(u_{n+1} + u_{n-1})} = \frac{u_{n+1} \cdot u_{n-1} + u_{n-1}^2}{u_n(u_{n+1} + u_{n-1})} = \frac{u_{n-1}}{u_n};$$

$$\frac{u_{2n}+1}{u_{2n+1}} = \frac{u_n^2 + u_{n-1}^2 + 1}{u_n(u_{n+1} + u_{n-1})} = \frac{u_n \cdot u_{n-2} + u_n^2}{u_n(u_{n+1} + u_{n-1})} = \frac{u_n + u_{n-2}}{u_{n+1} + u_{n-1}}.$$

Cazul 2. n = impar. Avem

$$\frac{u_{2n}-1}{u_{2n+1}}=\frac{u_n^2+u_{n-1}^2-1}{u_n(u_{n+1}+u_{n-1})}=\frac{u_n^2+u_n\cdot u_{n-2}}{u_n(u_{n+1}+u_{n-1})}=\frac{u_n+u_{n-2}}{u_{n+1}+u_{n-1}};$$

$$\frac{u_{2n}+1}{u_{2n+1}}=\frac{u_n^2+u_{n-1}^2+1}{u_{2n+1}}=\frac{u_{n-1}^2+u_{n+1}u_{n-1}}{u_n(u_{n+1}+u_{n-1})}=\frac{u_{n-1}}{u_n}.$$

Fracția u_{n-1}/u_n este evident ireductibilă, deoarece doi termeni consecutivi ai șirului sînt primi între ei, iar dacă considerăm șirul $v_4=3$, $v_3=4$, $v_4=7$ ..., $v_n=v_{n-1}+v_{n-2}$, definit de recurența $v_n=u_n+u_{n-2}$ observăm că doi termeni consecutivi ai acestui șir sînt primi între ei, deci și fracțiile $(u_n+u_{n-2})/(u_{n+1}+u_{n-1})$ sînt ireductibile.

Pentru ultimele două fracții din enunț se observă că:

$$(u_{2n}-1)/u_{2n-1}=u_{2n+1}/(u_{2n}+1) \text{ și } (u_{2n}+1)/u_{2n-1}=u_{2n+1}/(u_{2n}-1),$$

deci fracțiile ireductibile egale cu ele se deduc din inversele primelor.

Comentariu. S-a folosit faptul că doi termeni consecutivi ai șirului $u_n=u_{n-1}+u_{n-2}$ sînt primi între ei. Se vede că în șirul $u_0=1$, $u_1=1$, $u_2=2$, $u_3=3$, $u_4=5$, $u_5=7$ proprietatea este adevărată. Vom presupune adevărată pentru numerele u_{n-1}, u_n și vom arăta că ea este adevărată și pentru u_n, u_{n+1}. Într-adevăr, din $u_{n+1}=u_n+u_{n-1}$ se vede că dacă u_{n+1}, u_n nu ar fi primi între ei, divizorul lor comun ar divide și pe u_{n-1} și atunci u_n, u_{n-1} nu ar fi primi între ei, ceea ce este contrar ipotezei. Deci u_n, u_{n+1} sînt primi între ei.

CO 50. *Fie ecuația cu rădăcinile pozitive*

$$x^n-a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}-a_3x^{n-3}+\ldots+(-1)^n a_n=0.$$

Să se arate că $a_k n^k \leqslant C_n^k a_1^k$

Dan Voiculescu, G. M. 10/1965

Soluție. Fie x_1, x_2, x_3, ..., x_n rădăcinile ecuației date. Deoarece $x_1+x_2+\ldots+x_n=$ constant, $x_1x_2x_3\ldots x_n$ este maxim, cînd $x_1=x_2=\ldots=x_n$. Rezultă deci că $\sum x_1x_2\ldots x_n=$ maxim cînd $x_1=x_2=\ldots=x_n=\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}=$ $=\left(\frac{a_1}{n}\right)^k$. Ținînd seama de faptul că numărul termenilor însumați în relația de mai sus, este C_n^k avem: $\sum x_1x_2\ldots x_k\leqslant C_n^k\left(\frac{a_1}{n}\right)^k$ sau, ținînd cont de relațiile lui Viète, rezultă $a_k\leqslant C_n^k\left(\frac{a_1}{n}\right)^n$.

CO 51. *Pentru orice* λ *real,* $\lambda \geqslant 1$, *se notează cu* $x(\lambda)$ *soluția reală a ecuației* $x(1 + \ln x) = \lambda$. *Să se demonstreze că:*

$$\lim_{\lambda \to \infty} \frac{x(\lambda)}{\frac{\lambda}{\ln \lambda}} = 1.$$

I. Tomescu, G, M. 6/1982

Soluție. Considerăm funcția $f:[1, \infty) \to [1, \infty)$ definită prin $f(x) = x(1 + \ln x)$. Observăm că funcția este strict crescătoare, deci este injectivă. De asemenea $f(1) = 1$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ și datorită proprietății lui Darboux, rezultă că f este surjectivă. Așadar f este bijectivă. Ecuația $x(1 + \ln x) = \lambda$ (1) ne arată că funcția $x:[1, \infty) \to [1, \infty)$, $\lambda \to x(\lambda)$ este funcția inversă funcției f. Deoarece f este derivabilă, rezultă că și x este derivabilă și avem

$$x'(\lambda) = \frac{1}{f'(x(\lambda))} = \frac{1}{2 + \ln x(\lambda)}.$$

Datorită faptului că f este strict crescătoare rezultă că și x este strict crescătoare și atunci $\lambda \to \infty \Leftrightarrow x(\lambda) \to \infty$.

Calculăm limita cerută. Avem

$$\lim_{\lambda \to \infty} \frac{x(\lambda)}{\frac{\lambda}{\ln \lambda}} = \lim_{\lambda \to \infty} \ln \lambda \cdot \frac{x(\lambda)}{\lambda} \overset{(1)}{=} \lim_{\lambda \to \infty} \frac{\ln \lambda}{1 + \ln x(\lambda)} \text{ (Hòspital)} =$$

$$= \lim_{\lambda \to \infty} \frac{\frac{1}{\lambda}}{\frac{1}{x(\lambda)} \cdot \frac{1}{2 + \ln x(\lambda)}} = \lim_{\lambda \to \infty} \frac{x(\lambda)}{\lambda} \cdot [2 + \ln x(\lambda)] \overset{(1)}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{2 + \ln x(\lambda)}{1 + \ln x(\lambda)} = 1.$$

CO 52. *Să se calculeze* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n + 1)}$.

Maria Elena Panaitopol, G. M. 6/1982

Soluție. Fie s_n suma parțială de ordinul n, adică: $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(2k + 1)}$.

Putem scrie

$$\frac{1}{2} s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k(2k + 1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{2k + 1} \right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k + 1} =$$

$$= 2 \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} - \sum_{k=2}^{2n+1} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{2n+1} \frac{1}{k} = 1 - \sum_{k=n+1}^{2n+1} \frac{1}{k} = 1 -$$

$$- \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n+1} \right).$$

Se arată însă ușor că $\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \right) = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} =$ $= \ln 2$. Trecînd la limită, rezultă $\frac{1}{2} \lim_{n \to \infty} s_n = 1 - \ln 2$, deci $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n+1)} =$ $= \lim_{n \to \infty} s_n = 2(1 - \ln 2)$.

CO 53. *Dacă* $(a_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$, $(b_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ *sînt șiruri de numere întregi mai mari ca 1, să se arate că:*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{p_{a_n}}{p_{b_n}} = 1 \Leftrightarrow \lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1,$$

unde p_i *înseamnă al i-lea număr prim.*

Laurențiu Panaitopol, G. M. -A, 1/1980

Soluție. Se știe că

$$\lim_{n \to \infty} \frac{p_n}{n \ln n} = 1, \quad (1). \text{ Să notăm } c_n = \frac{a_n}{b_n}.$$

Avem evident pentru orice n

$$\frac{p_{a_n}}{p_{b_n}} = \frac{p_{a_n}}{a_n \ln a_n} \cdot \frac{b_n \ln b_n}{p_{b_n}} \cdot c_n \cdot \left(1 + \frac{\ln c_n}{\ln b_n} \right) \tag{2}$$

și

$$\left| \frac{\ln c_n}{\ln b_n} \right| \leqslant \frac{|\ln c_n|}{\ln 2}. \tag{3}$$

Dacă presupunem $\frac{a_n}{b_n} \to 1$, din (1), (2), (3) rezultă ca $\frac{p_{a_n}}{p_{b_n}} \to 1$.

Reciproc, să presupunem că $\frac{p_{a_n}}{p_{b_n}} \to 1$ și fie $\varepsilon > 0$ fixat. Din (2) rezultă $c_n \left(1 + \frac{\ln c_n}{\ln b_n} \right) \to 1$, deci $(\exists)\, n_\varepsilon \in \mathbf{N}^*$ astfel că pentru orice $n \geqslant n_\varepsilon$ avem

$$1 - \varepsilon < c_n \left(1 + \frac{\ln c_n}{\ln b_n} \right) < 1 + \varepsilon. \tag{4}$$

Dacă ar exista $n \geqslant n_\varepsilon$ cu proprietatea $c_n \geqslant 1 + \varepsilon$ atunci $\ln c_n > 0$, deci $c_n\left(1 + \frac{\ln c_n}{\ln b_n}\right) > c_n \geqslant 1 + \varepsilon$ și astfel se contrazice (4).

Rezultă $c_n < 1 + \varepsilon$, $(\forall)\, n \geqslant n_\varepsilon$ și complet analog deducem $c_n > 1 - \varepsilon$, $(\forall)\, n \geqslant n_\varepsilon$. Cum $\varepsilon > 0$ a fost fixat, dar arbitrar, rezultă că $(\forall)\, \varepsilon > 0$, $(\exists)\, n_\varepsilon \in \mathbf{N}^*$ astfel încît $(\forall)\, n \geqslant n_\varepsilon : |c_n - 1| < \varepsilon$, ceea ce arată că $c_n \to 1$ adică $\frac{a_n}{b_n} \to 1$.

CO 54. Fie $k \in \mathbf{N}$ și $p_k \in \mathbf{R}[x]$ *cu proprietatea că pentru orice* $n \in \mathbf{N}$, *are loc relația:* $p_k(n) = 1^k + 2^k + \ldots + n^k$.

a) *Să se arate că, pentru fiecare* $k \in \mathbf{N}$, *există și este unic un polinom* p_k *cu proprietatea din enunț;*

b) *Șirul de polinoame* $(p_k)_{k \in \mathbf{N}}$ ***satisface relația***

$$p_k(x) = k\int_0^x p_{k-1}(t)\,\mathrm{d}t + \left(1 - k\int_0^1 p_{k-1}(t)\,\mathrm{d}t\right)x.$$

Dan Radu, G. M.-A 7/1971

Soluție. Fie $p_k \in \mathbf{R}[x]$ un polinom cu proprietatea din enunț și să considerăm un alt polinom $q_k \in \mathbf{R}[x]$ avînd proprietatea $q_k(0) = 0$ și $q_k(x + 1) = q_k(x) + (x + 1)^k$, $(\forall)x \in \mathbf{R}$.

Notînd $r_k(x) = p_k(x) - q_k(x)$ se ajunge ușor la concluzia că $r_k(n) = 0$ pentru orice $n \in \mathbf{N}$. Aceasta arată că r_k este polinomul nul, deci $p_k = q_k$ și atunci polinomul p_k satisface și egalitatea (1). Din această relație rezultă că grad $p_k = k + 1$. Scriind $p_k(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_{k+1}x^{k+1}$, vom observa mai întîi că $a_0 = p_k(0) = 0$, iar apoi făcînd succesiv $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$, ..., $x = k + 1$ obținem

$$\begin{cases} 1a_1 + 1^2a_2 + \ldots + 1^{k+1}a_{k+1} = 1^k \\ 2a_1 + 2^2a_2 + \ldots + 2^{k+1}a_{k+1} = 1^k + 2^k \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (k+1)\,a_1 + (k+1)^2\,a_2 + \ldots + (k+1)^{k+1}a_{k+1} = 1^k + 2^k + \ldots + (k+1)^k. \end{cases}$$

Acest sistem cu necunoscutele $a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}$ are determinantul Vandermonde nenul, deci se rezolvă cu regula lui Cramer și unicitatea soluției este asigurată. Deducem existența și unicitatea polinomului p_k cu proprietatea din enunț.

b) Scriind relația (1) pentru polinomul p_k și derivînd obținem

$$p_k'(x + 1) = p_k'(x) + k(x + 1)^{k-1}, \quad (\forall)x \in \mathbf{R}.$$

Făcînd în această relație $x = 0$, $x = 1$, ..., $x = n - 1$ și sumînd egalitățile respective, obținem

$$p_k'(n) = p_k'(0) + k\sum_{i=1}^{n} i^{k-1}, \text{ adică } p_k'(n) = p_k'(0) + kp_{k-1}(n).$$

Cum această egalitate are loc pentru o infinitate de valori ale lui $n (n \in \mathbf{N}^*$ a fost arbitrar,) deducem egalitatea:

$$p_k'(x) = p_k'(0) + kp_{k-1}(x), \ (\forall)\ x \in \mathbf{R}.$$

Trecînd la primitive, rezultă

$$p_k(x) = p_k'(0) \cdot x + k\int_0^x p_{k-1}(t)\,\mathrm{d}t + c, \tag{2}$$

Din condiția $p_k(0) = 0$ rezultă $c = 0$. Din condiția $p_k(1) = 1$ rezultă $p_k'(0) = 1 - k\int_0^x p_{k-1}(t)\,\mathrm{d}t$. Atunci, relația (2) devine

$$p_k'(x) = k\int_0^x p_{k-1}(t)\,dt + \left(1 - k\int_0^1 p_{k-1}(t)\,dt\right)x.$$

CO 55. *Fie șirul* $(a_n)_{n\geqslant 1}$ *cu* $a_1 \in (0, 1)$ *și* $a_{n+1} = 2^{a_n} - 1$, $(\forall)\ n \geqslant 1$.

Să se arate că $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *este convergentă.*

Laurențiu Panaitopol, G. M. 4/1980

Soluție. 1) Arătăm prin inducție că $a_n \in (0, 1)$, $(\forall) n \in \mathbf{N}^*$.

Pentru $n = 1$ avem $a_1 \in (0, 1)$; presupunînd că $a_n \in (0, 1)$, atunci:

$$2^0 - 1 < 2^{a_n} - 1 < 2^1 - 1 \text{ adică } a_{n+1} \in (0, 1).$$

2) Arătăm că șirul $(a_n)_{n\geqslant 1}$ este convergent. Pentru aceasta, este suficient să mai arătăm că este monoton. Avem: $a_{n+1} - a_n = 2^{a_n} - 1 - a_n < 0$, $(\forall) n \in \mathbf{N}^*$, deoarece am ținut seama de inegalitatea $2^x - x - 1 < 0$, $(\forall)\ x \in (0, 1)$. Pentru stabilifea acestei inegalități se studiază monotonia funcției $f: [0, 1] \to \mathbf{R}$, $f(x) = 2^x - x - 1$, cu ajutorul derivatei acesteia. Așadar șirul $(a_n)_{n\geqslant 1}$ este descrescător și fiind și mărginit este convergent.

3) Determinăm $\lim a_n$. Notînd cu a această limită, folosind relația de recurență în care facem $n \to \infty$, obținem $a = 2^a - 1$ sau $f(a) = 0$, unde f este funcția de la 2) (ținem seama și de faptul că $a \in [0, 1]$). Singurele rădăcini ale funcției f sînt 0 și 1 deci $a \in \{0, 1\}$. Cum $1 > a_1 > a_2 > \ldots > a_n > \ldots > 0$, conform teoremei lui Weierstrass avem $a = \inf a_n = 0$.

4) Pentru demonstrarea convergenței seriei, folosim criteriul raportului al lui d'Alembert. Se știe că $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2^x - 1}{x} = \ln 2$ și atunci folosind acest fapt, putem scrie

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{a_n} - 1}{a_n} = \ln 2 < 1.$$

Cu aceasta problema este complet rezolvată.

CO 56. *Se dă şirul cu termenul general* $a_n = \frac{1}{b_1^2} + \frac{1}{b_2^2} + \ldots + \frac{1}{b_n^2}$, *unde* $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ *sînt în progresie aritmetică şi* $0 < b_1 < b_2 < \ldots < b_n < b_{n+1} < \ldots$ *Să se arate că şirul* $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ *este convergent.*

Liviu Pîrşan, G. M. 1/1973

Soluţie. Fie $r > 0$ raţia progresiei aritmetice. Avem succesiv

$$a_n = \frac{1}{b_1^2} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{b_k^2} < \frac{1}{b_1^2} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{b_k^2 - r^2} = \frac{1}{b_1^2} + \frac{1}{2r} \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{b_k - r} - \frac{1}{b_k + r} \right) =$$

$$= \frac{1}{b_1^2} + \frac{1}{2r} \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{b_{k-1}} - \frac{1}{b_{k+1}} \right) = \frac{1}{b_1^2} + \frac{1}{2r} \left(\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} - \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b_{n+1}} \right) <$$

$$< \frac{1}{b_1^2} + \frac{1}{2r} \left(\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} \right).$$

Deci avem

$$0 < a_n < \frac{1}{b_1^2} + \frac{1}{2r} \left(\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} \right).$$

Rezultă că şirul $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ este mărginit. Şirul este strict crescător, deoarece $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{b_{n+1}^2} > 0$. Rezultă că şirul $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ este convergent.

CO 57. *Să se dovedească inegalitatea* $(m - n + 1)^n > m(m - n)^{n-1}$ *ştiind că* m *şi* n *sînt numere reale care îndeplinesc condiţia* $m > n > 1$.

Th. Angheluţă, G. M. vol. 39/1933

Soluţie. Inegalitatea propusă se mai poate scrie:

$(m - n + 1)^n / m(m - n)^{n-1} > 1$ sau aplicînd logaritmii, rezultă că trebuie arătat că $\ln [(m - n + 1)^n / m (m - n)^{n-1}] > 0$.

Pentru a stabili această ultimă inegalitate vom studia variaţia funcţiei $f(m) = \ln [(m - n + 1)^n / m(m - n)^{n-1}]$, presupunînd n constant iar m variabilă independentă în intervalul $(n, +\infty)$. Calculînd derivata funcţiei $f(m)$ rezultă $f'(m) = n/(m - n + 1) - (n-1)/m - (n - 1)/(m - n)$, sau

$$f'(m) = n(1 - n)/m(m - n)(m - n + 1).$$

Ţinînd cont că $m > n > 1$ rezultă că $f'(m)$ este negativ cînd m variază în intervalul (n, ∞) adică $f(m)$ este descrescătoare pe acest interval. Pe de altă parte avem: $\lim\limits_{\substack{m \to n \\ m > n}} f(m) = \infty$, iar $\lim\limits_{m \to \infty} f(m) = 0$.

Prin urmare este satisfăcută inegalitatea $f(m) > 0$, $(\forall) m \in (n, \infty)$.

CO 58. *Fie un şir* $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $x_{n+1} = x_n - nx_n^2$ *pentru* $n \in \mathbf{N}^*$, $x_1 \in (0, 1)$. *Să se arate că seria* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *este convergentă.*

Laurenţiu Panaitopol, G. M.-A 1/1980

Soluţie. Pentru fiecare $n \geqslant 1$ vom defini funcţia $f_n:(0,1) \to \mathbf{R}$, $f_n(x) = x - nx^2$ şi observăm uşor că $0 < f_n(x) \leqslant \frac{1}{4n}$, $(\forall)\, x \in (0, 1)$; de asemenea se observă că pe intervalul $\left(0, \frac{1}{2n}\right]$ funcţia f_n este strict crescătoare. Demonstrăm prin inducţie inegalitatea

$$0 < x_n \leqslant \frac{2}{n^2},\ (\forall)\, n \geqslant 2, \tag{1}$$

Pentru $n = 2$: $x_2 = f_1(x_1)$, $0 < x_2 \leqslant \frac{1}{4} < \frac{2}{4}$.

Pentru $n = 3$: $x_3 = f_2(x_2)$, $0 < x_3 \leqslant \frac{1}{8} < \frac{2}{9}$.

Pentru $n = 4$: $x_4 = f_3(x_3)$, $0 < x_4 \leqslant \frac{1}{12} < \frac{2}{16}$.

Presupunem inegalitatea adevărată pentru $n \geqslant 4$ şi o demonstrăm pentru $n + 1$. Cum $n \geqslant 4$ avem $x_n \leqslant \frac{2}{n^2} \leqslant \frac{1}{2n}$ şi atunci cum $x_{n+1} = f_n(x_n)$, rezultă

$$0 < x_{n+1} \leqslant f_n\left(\frac{2}{n^2}\right) = \frac{2}{n^2} - n \cdot \frac{4}{n^4} = \frac{2n-4}{n^3}. \text{ Dar } \frac{2n-4}{n^3} < \frac{2}{(n+1)^2},$$

inegalitate ce se stabileşte uşor. În concluzie $0 < x_{n+1} < \frac{2}{(n+1)^2}$, ceea ce încheie demonstraţia prin inducţie.

Seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ fiind cu termeni pozitivi şi fiind majorată de seria convergentă $2\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ va fi şi ea o serie convergentă.

CO 59. *Fie* $g:[a, b] \to \mathbf{R}$ ***continuă, cu proprietatea*** *că* $g(a) \leqslant g(b)$ *şi fie* $f:[a, b] \to [g(a), g(b)]$, ***crescătoare. Să se arate că există*** $\xi \in [a, b]$. *astfel încît* $f(\xi) = g(\xi)$. *(**Generalizare a teoremei lui Knaster**, care se regăseşte pentru* $g(x) = x$*).*

Anița S. Sebastian, G. M. 2/1983

Soluție. Demonstrația se va baza pe procedeul dichotomiei. Deoarece $\mathrm{Im}\, f \subset [g(a), g(b)]$ rezultă că $g(a) \leqslant f(a)$ și $g(b) \geqslant f(b)$. Notăm intervalul $[a, b] = [a_0, b_0]$. Dacă $g(b) = f(b)$ sau $g(a) = f(a)$, problema este rezolvată. De asemenea dacă $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = g\left(\frac{a+b}{2}\right)$. Presupunem contrariul; fie $[a_1, b_1]$ acela dintre intervalele $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ și $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$ pentru care $f(a_1) - g(a_1)$ și $f(b_1) - g(b_1)$ au semne contrare. Dacă $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) = g\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)$ problema este rezolvată. Presupunem contrariul; fie $[a_2, b_2]$ acela dintre intervalele $\left[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}\right]$ și $\left[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1\right]$ pentru care $f(a_2) - g(a_2)$ și $f(b_2) - g(b_2)$ au semne contrare și așa mai departe.

Intervalul $[a_{n-1}, b_{n-1}]$ îl împărțim în două intervale egale și îl notăm cu $[a_n, b_n]$ pe acela pentru care $f(a_n) - g(a_n)$ și $f(b_n) - g(b_n)$ au semne contrare. $\left(\text{În cazul în care } f\left(\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}\right) = g\left(\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}\right) \text{problema este rezolvată}\right)$. Dacă există $n \in \mathbf{N}$ astfel încît $f(a_n) = g(a_n)$ sau $f(b_n) = g(b_n)$ problema este rezolvată. Să presupunem contrariul, adică:

$$f(a_n) - g(a_n) \neq 0 \text{ și } f(b_n) - g(b_n) \neq 0, \quad (\forall)\, n \in \mathbf{N} \tag{1}$$

Din modul de construcție a intervalelor $[a_n, b_n]$, rezultă în plus că diferențele $f(a_n) - g(a_n)$ și $f(b_n) - g(b_n)$ au semne contrare, oricare ar fi $n \in \mathbf{N}$.

În aceste condiții, vom demonstra, prin inducție după n, că avem

$$f(a_n) > g(a_n) \text{ și } f(b_n) < g(b_n),\ (\forall)\, n \in \mathbf{N}.$$

Pentru $n = 0$, avem $f(a_0) > g(a_0)$ și $f(b_0) < g(b_0)$.

Presupunem $f(a_{n-1}) > g(a_{n-1})$ și $f(b_{n-1}) < g(b_{n-1})$.

Dacă

$$f\left(\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}\right) > g\left(\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}\right), \text{ avem } \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2} = a_n,$$

$$b_{n-1} = b_n \text{ și } f(a_n) > g(a_n),\ f(b_n) < g(b_n) \tag{2}$$

Dacă

$$f\left(\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}\right) < g\left(\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}\right), \text{ avem } a_{n-1} = a_n,$$

$$\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2} = b_n,\ f(a_n) > g(a_n),\ f(b_n) < g(b_n), \tag{3}$$

Din (2) și (3) rezultă că proprietatea este adevărată pentru n și demonstrația prin inducție este terminată.

Deci

$$f(a_n) > g(a_n),\ f(b_n) < g(b_n),\ (\forall)\ n \in \mathbf{N}. \tag{4}$$

În continuare, vom demonstra că şirurile $(a_n)_{n\geqslant 0}$, $(b_n)_{n\geqslant 0}$ au o limită comună (faptul că aceste şiruri sînt convergente se observă uşor din modul de construcţie al intervalelor $[a_n, b_n]$, $n \in \mathbf{N}$).

Avem

$$[a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset \ldots \supset [a_{n-1}, b_{n-1}] \supset [a_n, b_n] \supset \ldots$$

Conform lemei intervalelor închise incluse (Cantor), rezultă că intervalele $\{[a_n, b_n]\}_{n\in\mathbf{N}}$ au un punct comun, fie acesta ξ.

Mai departe, $b_n - a_n = \dfrac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2} = \ldots = \dfrac{b_0 - a_0}{2^n}$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$. Avem $a_n \leqslant \xi \leqslant b_n$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}$; şirul $(a_n)_{n\geqslant 0}$ este strict crescător, iar şirul $(b_n)_{n\geqslant 0}$ este strict descrescător. Fie $\xi_1 = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $\xi_2 = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Evident $\xi_1 \leqslant \xi \leqslant \xi_2$.

Dar în mod necesar $\xi_1 = \xi_2$, căci $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \xi$.

Din faptul că $a_n \leqslant b_n$ şi f este crescătoare, rezultă că $f(a_n) \leqslant f(b_n)$. $(\forall) n \in \mathbf{N}$, deci conform cu (4) rezultă

$$g(a_n) < f(a_n) \leqslant f(b_n) < g(b_n).$$

Prin trecere la limită, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = \lim\limits_{n\to\infty} f(b_n) = g(\xi)$.

Din nou, din ipoteza că f este crescătoare, rezultă

$$f(a_n) \leqslant f(\xi) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(a_n) \leqslant f(\xi) \Rightarrow g(\xi) \leqslant f(\xi), \tag{5}$$

$$f(b_n) \geqslant f(\xi) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(b_n) \geqslant f(\xi) \Rightarrow g(\xi) \geqslant f(\xi). \tag{6}$$

Din (5) şi (6) rezultă că $f(\xi) = g(\xi)$.

CO 60. *Fie $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ un şir convergent de numere reale cu limita $l \in (0, 1)$. Să se demonstreze că $\lim\limits_{n\to\infty} (x_1\, x_2 \ldots x_n) = 0$.*

D. Buşneag, G. M. 8/1982

Soluţie. Vom demonstra în prealabil următoarea afirmaţie:

Dacă $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este un şir de numere reale cu proprietatea că $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ există şi este egală cu $l \in (0, 1)$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ există şi este egală cu 0. În adevăr, deoarece $l \in (0, 1)$, există un $\varepsilon > 0$, suficient de mic, astfel încît $l + \varepsilon < 1$, $l - \varepsilon > 0$.

Cum $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l$ rezultă că există un rang $N = N(\varepsilon)$ astfel încît pentru orice $n \geqslant N$ să avem

$$0 < l - \varepsilon < \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < l + \varepsilon < 1,$$

sau

$$0 < |a_{n+1}| < |a_n|, \ (\forall)\, n \geqslant N.$$

Deci şirul $(|a_n|)_{n\in\mathbf{N}}$ este monoton descrescător şi mărginit, deci este convergent. Fie $a = \lim\limits_{n\to\infty} |a_n|$. Evident $a \geqslant 0$.

Dacă $a > 0$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{a}{a} = 1 \neq l$,

contradicţie. Deci $a = 0$, adică $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$, ceea ce implică $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Revenim la soluţia problemei.

Fie şirul $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ cu termenul general $a_n = x_1 \cdot x_2 \ldots x_n$.

Atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\leftarrow\infty}\left|\frac{x_1x_2\ldots x_nx_{n+1}}{x_1x_2\ldots x_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}|x_{n+1}| = |l| = l$, deoarece conform ipotezei $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l \in (0, 1)$. Deci, conform afirmaţiei precedente,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(x_1 \cdot x_2 \ldots x_n) = 0.$$

CO 61. *Să se arate că pentru orice* $k \in \mathbf{N}^*$, *există* $n \in \mathbf{N}$ *astfel încît*

$$\left[1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right] = k.$$

Vatile Zidaru, G. M. 2/1982

Soluţie. Folosim rezultatul: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, unde $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$.

O demonstraţie a acestei afirmaţii este următoarea:

Avem $a_{2^n} = \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{16}\right) +$

$$+ \ldots + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right).$$

Dar $1+\frac{1}{2}>1$; $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>\underbrace{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}_{2\text{ termeni}}=\frac{1}{2}$; $\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{8}>$

$>\underbrace{\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{8}}_{2^3\text{ termeni}}=\frac{1}{2}$; $\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{61}>\underbrace{\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{16}}_{2^3\text{ termeni}}=\frac{1}{2}$; $\ldots$; $\frac{1}{2^{n-1}+1}+$

$+\ldots+\frac{1}{2^n}>\underbrace{\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n}+\ldots+\frac{1}{2^n}}_{2^{n-1}\text{ termeni}}=\frac{1}{2}$.

Rezultă

$$a_{2^n}>1+\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2}}_{(n-1)\text{ termeni}}=1+\frac{n-1}{2}.$$

Deci $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2^n}=\infty$.

Dar şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este crescător şi deoarece admite un subşir $(a_{2^n})_{n\in\mathbb{N}}$ cu limita infinită, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty$, adică

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)=\infty.$$

Trecem la rezolvarea problemei propriu-zise. Pentru $k=1$ luăm $n=1$ şi problemea este rezolvată. Fie acum $k\geqslant 2$.

Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty$, rezultă că dat fiind numărul $k\in\mathbf{N}^*$, $k\geqslant 2$, există $n_0\in\mathbf{N}^*$ astfel încît

$$a_{n_0}<k\leqslant a_n,\ (\forall)\ n>n_0.$$

Aşadar avem $a_{n_0}<k\leqslant a_{n_0+1}=a_{n_0}+\frac{1}{n_0+1}<k+1$, deci $k\leqslant a_{n_0+1}<$ $<k+1$, de unde rezultă $[a_{n_0+1}]=k$.
Deci, pentru $k\geqslant 2$, vom lua $n=n_0+1$, determinat mai sus.

CO 62. *Fie $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ un şir de numere strict pozitive. Să se arate că există două şiruri $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ şi $(y_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ de numere strict pozitive şi crescătoare astfel încît să avem $a_n=\frac{x_n}{y_n}$, $(\forall)\ n\in\mathbf{N}^*$.*

I. Şandor, G. M. 11/1981

Soluția I. Fie șirurile definite recursiv prin:

$$x_1 = a_1,\ y_1 = 1,\ y_{n+1} = \max\left(y_n,\ \frac{x_n}{a_{n+1}}\right) + 1 = \frac{y_n + \frac{x_n}{a_{n+1}} + \left|y_n - \frac{x_n}{a_{n+1}}\right|}{2} + 1$$

și

$$x_{n+1} = a_{n+1} \cdot y_{n+1},\ (\forall)\ n \geqslant 1 \tag{1}$$

Arătăm că $x_n,\ y_n > 0,\ (\forall)\ n \in \mathbf{N}^*$. Într-adevăr pentru $n = 1$ avem $x_1 = a_1 > 0,\ y_1 = 1 > 0$.

Să presupunem că $x_k > 0,\ y_k > 0,\ (\forall)\ k \leqslant n$. Atunci $y_n > 0,\ \frac{x_n}{a_{n+1}} > 0$ (deoarece $a_{n+1} > 0$), deci $\max\left(y_n,\ \frac{x_n}{a_{n+1}}\right) + 1 > 0$, adică $y_{n+1} > 0$. Evident, $x_{n+1} > 0$.

Arătăm că șirurile $(x_n)_{n \in \mathbf{N}^*},\ (y_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ sînt strict **crescătoare. În** adevăr $y_{n+1} = \max\left(y_n,\ \frac{x_n}{a_{n+1}}\right) + 1 \geqslant y_n + 1 > y_n$, deci $y_{n+1} > y_n$.

De asemenea $y_{n+1} \geqslant \frac{x_n}{a_{n+1}} + 1 > \frac{x_n}{a_{n+1}}$, adică $y_{n+1} > \frac{x_n}{a_{n+1}}$ sau $a_{n+1} \cdot y_{n+1} > x_n$, sau încă $x_{n+1} > x_n$.

Din (1) rezultă $a_n = \frac{x_n}{y_n},\ (\forall)\ n \in \mathbf{N}^*$,

ceea ce încheie soluția.

Soluția. II. Deoarece $a_1 \in \mathbf{R}_+^*$, a_1 poate fi scris

$$a_1 = \frac{x_1}{y_1}, \quad \text{cu } x_1,\ y_1 \in \mathbf{R}_+^*.$$

Prin același procedeu, fie $a_2 = \frac{x_2'}{y_2'}$. Conform axiomei lui Arhimede, există un $n \in \mathbf{N}^*$, suficient de mare, astfel încît

$$n \cdot \max(x_2', y_2') \geqslant \max(x_1,\ y_1) \tag{1}$$

Fie n_0 cel mai mic număr natural n cu proprietatea (1). Amplificăm fracția $\frac{x_2'}{y_2'}$ cu n_0; deci $a_2 = \frac{n_0 x_2}{n_0 y_2'}$.

Dar $nx_2' > x_1,\ ny_2' > y_2$ și vom nota $x_2 = nx_2',\ y_2 = ny_2'$.

Atunci $a_2 = \frac{x_2}{y_2}$, cu $x_2 > x_1,\ y_2 > y_1$, și $x_2 > 0,\ y_2 > 0$.

Prin acest procedeu, continuat la nesfîrșit, se pot obține, șirurile $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$, $(y_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ cu proprietățile cerute.

Observație. Metoda folosită arată că există o infinitate de șiruri $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$, $(y_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ cu proprietățile cerute.

CO 63. *Fie $f, g: [a, b] \to [c, d]$ două funcții bijective, avînd proprietatea lui Darboux. Să se demonstreze că următoarele afirmații sînt echivalente.*

a) *funcția $f - g$ păstrează același semn pe $[a, b]$;*

b) *funcția $f^{-1} - g^{-1}$ păstrează același semn pe $[c, d]$.*

Florin Vulpescu-Jalea, G. M. 9/1982

Soluție. În prealabil enunțăm următorul rezultat:

Dacă o funcție este injectivă și are proprietatea lui Darboux pe un interval, atunci funcția este strict monotonă pe acel interval.

Pentru acest rezultat se poate consulta cartea „Contraexemple în Analiza matematică" de Oliver Konnerth, Editura Dacia, 1982.

În condițiile problemei noastre, funcțiile f și g sînt injective (fiind bijective), au proprietatea lui Darboux, deci sînt strict monotone pe intervalul considerat $[a, b]$.

Vom demonstra implicația a) $\Rightarrow$ b). Deci, să presupunem că funcția $f - g$ are semn constant pe $[a, b]$; fără a pierde din generalitate putem presupune că:

$$f(x) - g(x) \geqslant 0, \ (\forall)\ x \in [a, b]. \tag{1}$$

Cazul $f(x) - g(x) \leqslant 0$, $(\forall)\ x \in [a, b]$, se tratează similar. Din (1) rezultă

$$f(x) \geqslant g(x), \ (\forall)\ x \in [a, b]. \tag{1'}$$

Fie $y \in [c, d]$. Din bijectivitatea lui g rezultă că există și este unic elementul $g^{-1}(y) \in [a, b]$, și conform cu (1'), avem

$$f(g^{-1}(y) \geqslant g(g^{-1}(y)) = y = f(f^{-1}(y)),$$

deci

$$f(g^{-1}(y)) \geqslant f(f^{-1}(y)), \ (\forall)\ y \in [c, d]. \tag{2}$$

Dacă f este strict crescătoare, din (2) deducem

$$g^{-1}(y) \geqslant f^{-1}(y), \ (\forall)\ y \in [c, d] \text{ sau } f^{-1}(y) - g^{-1}(y) \leqslant 0, \ (\forall)\ y \in [c, d].$$

Dacă f este, strict descrescătoare, din (2) deducem

$$f^{-1}(y) - g^{-1}(y) \geqslant 0, \ (\forall)\ y \in [c, d].$$

În ambele cazuri funcția $f^{-1} - g^{-1}$ are semn constant pe $[c, d]$. Vom demonstra implicația b) $\Rightarrow$ a); deci, să presupunem că funcția $f^{-1} - g^{-1}$ are semn constant pe $[c, d]$. Fără a restrînge generalitatea putem presupune:

$$f^{-1}(y) \geqslant g^{-1}(y), \ (\forall)\ y \in [c, d], \tag{3}$$

celălalt caz tratîndu-se analog.

Oricare ar fi $x \in [a, b]$, există și este unic elementul $g(x) \in [c, d]$, deci conform cu (3):

$$f^{-1}(g(x)) \geqslant g^{-1}(g(x)) = x, \quad (\forall)\ x \in [a, b]. \tag{4}$$

Dar $f^{-1}(g(x)) \in [a, b]$, $(\forall)\ x \in [a, b]$, deci în cazul în care f este strict crescătoare, conform cu (4) avem:

$$g(x) = f(f^{-1}(g(x))) \geqslant f(x), \quad (\forall)\ x \in [a, b], \quad \text{sau} \quad f(x) - g(x) \leqslant 0, \quad (\forall)\ x \in [a, b];$$

în cazul în care f este strict descrescătoare, conform cu (4) ɯəʌɐ

$$f(x) - g(x) \geqslant 0, \quad (\forall)\ x \in [a, b].$$

În concluzie, în ambele cazuri funcția $f - g$ are semn constant pe intervalul $[a, b]$.

Observație. Este suficient ca cel puțin una din funcțiile f, g să aibă proprietatea lui Darboux (în demonstrația dată am folosit faptul că funcția f are proprietatea lui Darboux, dar nu am folosit faptul că funcția g are proprietatea lui Darboux).

Capitolul VI

PROBLEME PREGĂTITOARE PENTRU OLIMPIADE NAȚIONALE (ON)

Introducere

Olimpiadele naționale au fost inițiate în țara noastră de Societatea de Științe Matematice, prima avînd loc în anul 1950. Gazeta Matematică a avut totdeauna un rol principal, chiar primul rol, în pregătirea generațiilor succesive de concurenți la această competiție de importanță și amploare naționale. Numeroase țări europene și din alte părți organizează olimpiade naționale de matematică, dîndu-le rolul de criteriu de lansare a viitorilor matematicieni, ingineri. fizicieni, informaticieni, economiști etc.

Gazeta Matematică este recunoscută de sutele de mii de elevi care se angajează în diversele faze, începînd cu cea locală, ale acestor concursuri anuale, ca fiind depozitara fondului cel mai prețios de probleme de competiție, cu care ei își încearcă pregătirea și aptitudinile. De aceea, capitolul consacrat olimpiadelor naționale este compus îndeosebi din probleme date în ultimii ani, cu scopul metodologic de a da concurenților o viziune cît mai apropiată de ambianța concurenților.

Vom începe tot cu teoria numerelor, care dă adesea multe preocupări concurenților din toate clasele. Ecuațiile diofantice neliniare se bucură de o celebritate perpetuată de teorema lui *Fermat*. Problema (ON 24) ne-o amintește și cititorul va mai găsi alte exemple și în alte capitole, asigurare valabilă dealtfel și pentru multe dintre tipurile de probleme exemplificate în acest capitol. O problemă interesantă de divizibilitate este (ON 19), iar (ON 20) și (ON 23) privesc cuburile perfecte. Menționăm de asemenea o inegalitate strictă în (ON 18), care nu poate fi redusă la egalitate.

Algebra ocupă în acest capitol locul cel mai larg, avînd în vedere că în programele analitice actuale ea cuprinde la clasa a IX-a și noțiuni fundamentale ale analizei privitoare la funcții; problemele (ON 1), (ON 3), (ON 6) privesc astfel de noțiuni. Aceasta este bogată în probleme privitoare la polinoame, de exemplu (ON 8), (ON 9), (ON 10), (ON 7), de asemenea în probleme de relații între numere reale sau complexe, pentru care citățm (ON 2), (ON 4), (ON 5), (ON 15). Mai puțin reprezentate sînt structurile algebrice prin (ON 11), ca și ecuațiile algebrice prin (ON 12), (ON 13).

Geometria este mai puțin reprezentată, deși în olimpiade oferă concurenților prilejuri inedite de a-și forța imaginația și ingeniozitatea. O vom regăsi în alte capitole cu aceeași funcție, pregătitoare pentru competiții. Ceea ce regretăm, în general, este numărul mic de probleme de geometrie în spațiu, care se propun în concursurile din țara noastră. Avem un singur exemplu (ON 25), în schimb vom găsi o problemă tratată vectorial în (ON 28), alta de reprezentare a numerelor complexe în (ON 29), celelalte privind relații metrice în triunghiuri și patrulatere.

Analiza pune, la rîndul ei, probleme frumoase și grele în cadrul olimpiadelor, multe dintre acestea avînd caracter teoretic și monografic. Proprietăți generale ale unor clase de funcții sau proprietăți speciale ale altora ocupă locurile principale, calculului propriu-zis, deci algoritmilor specifici analizei rămînîndu-le locuri mai umbroase, ceea ce are unele consecințe păgubitoare asupra tehnicilor matematice necesare oricărui practicant al matematicii.

Proprietăți de continuitate și discontinuitate se găsesc, de exemplu, în (ON 33) și (ON 44), de derivabilitate în (ON 35) și (ON 41), ale morfismelor de grupuri de funcții în (ON 37), ale șirurilor de numere în (ON 34) și de funcții în (ON 43), o singură problemă cu aspecte aplicative fiind de semnalat în (ON 36).

Cititorul, interesat în pregătirea pentru olimpiade, va studia cu mult folos și celelalte capitole consacrate într-o formă sau alta concursurilor, lucrarea avînd caracter de sinteză antologică și metodologică ca și G. M. însăși.

ON 1. *Să se arate că funcția* $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *definită prin* $f(x) = x + a^x$, *cu* a *supraunitar, este bijectivă.*

Marcel Țena, **G. M. 2/1976, Olimpiada locală, 1976**

Soluție. a) *Injectivitatea.* Deoarece $a > 1$, atunci funcția $f_1: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f_1(x) = a^x$ este strict crescătoare. Dar și funcția $f_2: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f_2(x) = x$ este o funcție strict crescătoare. Rezultă că funcția f este strict crescătoare, deoarece este suma a două funcții strict crescătoare. Deoarece f este strict monotonă, rezultă că este injectivă.

b) *Surjectivitatea.* Trebuie să arătăm că $(\forall)\ m \in \mathbf{R}$, $(\exists)\ x \in \mathbf{R}$ astfel încît $x + a^x = m$ sau $a^x = -x + m$. A arăta că această ecuație are soluție, revine la a arăta că graficele funcțiilor $f_1: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f_1(x) = a^x$ și $f_3: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$f_3(x) = -x + m$ se intersectează. Funcția f_3 are graficul o dreaptă paralelă cu a doua bisectoare și se observă că cele două grafice se intersectează.

c) *Comentarii:* 1) Se poate trage o concluzie analoagă pentru funcția $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(x) = -x + a^x$, unde $0 < a < 1$.

2) Problema a fost generalizată de D. Acu sub forma următoare: Dacă $g, h: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ sînt funcții strict crescătoare și bijective, iar $a > 1$, atunci funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = a^{g(x)} + h(x)$ este bijectivă. Soluția acestei probleme se găsește în cartea „Teme pentru cercurile și concursurile de matematică ale elevilor" de D. Buşneag și I. V. Maftei, Scrisul românesc, Craiova 1983, la pag. 125.

ON 2. *Să se determine numerele* $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ *strict pozitive, care verifică relația*

$$a_1^3 + a_2^3 + ... + a_n^3 = (a_1 + a_2 + ... + a_n)^2,$$

oricare ar fi $n \in \mathbf{N}$.

L. Panaitopol, Olimpiada județeană, 1977, cl. X

Soluție. Vom demonstra prin inducție propoziția

$$P(n): a_n = n, \ (\forall)\ n \in \mathbf{N}^*.$$

Să arătăm că $P(1)$ este adevărată. Făcînd $n = 1$ în relația din enunț obținem $a_1^3 = a_1^2$ și cum $a_1 > 0$, deducem $a_1 = 1$. Să presupunem acum că $P(1)$, $P(2)$, ..., $P(k)$ sînt adevărate și să arătăm că și $P(k+1)$ este adevărată. Înseamnă că $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, .., $a_k = k$ și vrem să arătăm că $a_{k+1} = k + 1$. Făcînd $n = k + 1$ în relația din enunț și ținînd seama de ipoteza de inducție, avem

$$1^3 + 2^3 + ... + k^3 + a_{k+1}^3 = (1 + 2 + ... + k + a_{k+1})^2$$

sau

$$\frac{k^2(k+1)^2}{4} + a_{k+1}^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} + k(k+1)a_{k+1} + a_{k+1}^2$$

sau încă
$a_{k+1}^2 - a_{k+1} - k(k+1) = 0$, de unde (ținînd seama că $a_{k+1} > 0$) se obține $a_{k+1} = k + 1$.

ON 3. a) *Se consideră o mulțime* $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ *de numere reale și* $\varphi: A \to A$ *o aplicație bijectivă astfel că:*

$a_1 < a_2 < ... < a_n$ *și* $a_1 + \varphi(a_1) < a_2 + \varphi(a_2) < ... < a_n + \varphi(a_n)$.
Să se arate că φ *este aplicația identică a mulțimii* A.

b) *Rămîne adevărată afirmația dacă se înlocuiește mulțimea* A *cu mulțimea numerelor întregi?*

Marius Dădîrlat, Olimpiada pe țară, 1978, cl. X

Soluție. Demonstrăm prin inducție după $n \geqslant 2$ (evident, pentru $n = 1$ problema nu are sens).

Pentru $n = 2$, deoarece φ este bijecție, putem avea

$$\varphi(a_1) = a_1,\ \varphi(a_2) = a_2 \text{ sau } \varphi(a_1) = a_2,\ \varphi(a_2) = a_1.$$

În al doilea caz una din ipoteze devine $a_1 + a_2 < a_1 + a_2$, care este o contradicție. Rămîne deci $\varphi(a_1) = a_1,\ \varphi(a_2) = a_2$.

Să presupunem acum proprietatea adevărată pentru mulțimile cu $n - 1$ elemente și să o demonstrăm și în cazul în care A are n elemente. Vom arăta mai întîi că $\varphi(a_n) = a_n$. Pentru aceasta, să presupunem prin absurd că $\varphi(a_n) \neq a_n$. Cum φ este surjectivă, există $a_p \in A$ $(p < n)$ cu $\varphi(a_n) = a_n$. Atunci

$$a_p + a_n = a_p + \varphi(a_p) < a_{p+1} + \varphi(a_{p+1}) < a_{p+2} + \varphi(a_{p+2}) < \ldots < a_n + \varphi(a_n).$$

Din inegalitatea $a_p + a_n < a_{p+1} + \varphi(a_{p+1})$ rezultă $a_p < \varphi(a_{p+1})$ (deoarece $a_n \geqslant a_{p+1}$); din inegalitatea $a_p + a_n < a_{p+2} + \varphi(a_{p+2})$ rezultă $a_p < \varphi(a_{p+2})$; ...; din inegalitatea $a_p + a_n < a_n + \varphi(a_n)$ rezultă $a_p < \varphi(a_n)$; de asemenea avem evident $a_p < \varphi(a_p) = a_n$. Așadar în mulțimea A există cel puțin $n - p + 1$ numere mai mari ca a_p și anume $\varphi(a_p)$, $\varphi(a_{p+1})$, ..., $\varphi(a_n)$ (care sînt distincte, deoarece φ este injectivă). Pe de altă parte avem $a_1 < a_2 < \ldots a_p < a_{p+1} < \ldots < a_n$ ceea ce arată că în mulțimea A există exact $n - p$ elemente mai mari ca a_p (și anume $a_{p+1}, a_{p+2}, \ldots a_n$). Contradicția obținută arată că trebuie să avem $\varphi(a_n) = a_n$. Dar atunci luînd mulțimea $A' = \{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}\}$ și restricția lui φ la această mulțime, conform ipotezei de inducție va rezulta $\varphi(a_i) = a_i$, $i = 1, 2, \ldots, n - 1$. Rezultă că φ este aplicația identică a mulțimii A.

ON 4. *Care este cea mai mare valoare a lui n pentru care există n numere reale distincte două cîte două $x_1, x_2, \ldots, x_n$, astfel încît să aibă loc egalitatea de mulțimi*

$$\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} = \{x_1^n, x_2^n, \ldots x_n^n\}.$$

Adrian Ghioca, Olimpiada județeană, 1978, cl. X

Soluție. Să presupunem că $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$.

Cazul I n impar. Ținînd seama că în acest caz funcția $f(x) = x^n$ este strict crescătoare pe $\mathbf{R}$, vom avea $x_1^n < x_2^n < \ldots < x_n^n$. Atunci cele două mulțimi sînt egale dacă și numai dacă $x_1 = x_1^n$, $x_2 = x_2^n$, ..., $x_n = x_n^n$, adică $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sînt soluții reale ale ecuației $x = x^n$. Această ecuație are trei soluții și anume $-1, 0, 1$ și le vom lua pe toate, întrucît n trebuie să fie maxim. Rezultă $n = 3$ (și $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$).

Cazul II n par. n Îacest caz mulțimea $\{x_1^n, x_2^n, \ldots, x_n^n\}$ are numai elemente pozitive, deci și $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ va avea elementele pozitive, adică vom avea $0 \leqslant x_1 < x_2 < \ldots < x_n$. Pe intervalul $[0, \infty)$ funcția $f(x) = x^n$ este strict crescătoare, deci $x_1^n < x_2^n < \ldots < x_n^n$. Rezultă la fel $x_1 = x_1^n$,

$x_2 = x_2^n$, ..., $x_n = x_n^n$, deci $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sînt soluţii pozitive ale ecuaţiei $x = x^n$. Această ecuaţie are două soluţii pozitive şi anume 0 şi 1. Rezultă $n = 2$ (şi $x_1 = 0$, $x_2 = 1$). În concluzie cea mai mare valoare a lui n cu proprietatea din enunţ este $n = 3$.

ON5. *Fie z_1, z_2, z_3 trei numere complexe nenule astfel încît $|z_1| = |z_2| = |z_3|$.*

a) *Să se arate că există numerele complexe a, b, astfel încît*

$$z_2 = az_1, \; z_3 = bz_1 \text{ şi } |a| = |b| = 1.$$

b) *Să se rezolve în raport cu una dintre necunoscutele a sau b ecuaţia*

$$a^2 + b^2 - ab - a - b + 1 = 0.$$

c) *Să se arate că, dacă $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1$, atunci fie $z_1 = z_2 = z_3$, fie imaginile geometrice ale numerelor z_1, z_2, z_3 sînt vîrfurile unui triunghi echilateral.*

I. Tomescu, Olimpiada judeţeană, 1982, cl. X

Soluţie. a) Luăm $a = \dfrac{z_2}{z_1}$, $b = \dfrac{z_3}{z_1}$ şi sînt îndeplinite condiţiile din enunţ.

b) Rezolvînd în raport cu a, obţinem uşor:

$$a_{1,2} = b\left(\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{1 \mp i\sqrt{3}}{2}, \text{ unde semnele se corespund.}$$

c) Vom arăta că, dacă cel puţin două din numerele z_1, z_2, z_3 sînt distincte, atunci imaginile lor geometrice sînt vîrfurile unui triunghi echilateral, adică

$$|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1|. \tag{1}$$

Să presupunem că $z_1 \neq z_2$. Relaţia din enunţ se mai scrie

$$(z_1 - z_2)^2 + (z_2 - z_3)^2 + (z_3 - z_1)^2 = 0. \tag{2}$$

Observăm mai întîi că în mod necesar avem şi $z_2 \neq z_3$ şi $z_3 \neq z_1$ (căci dacă de exemplu am presupune $z_2 = z_3$, relaţia (2) devine $(z_1 - z_2)^2 + 0 + (z_2 - z_1)^2 = 0$, de unde $z_1 = z_2$, contradicţie; analog, dacă am presupune $z_3 = z_1$). Aşadar, deocamdată imaginile geometrice ale lui z_1, z_2, z_3 sînt trei puncte distincte în plan.

Pentru simplitate, să notăm $\omega_1 = z_1 - z_2$, $\omega_2 = z_2 - z_3$, $\omega_3 = z_3 - z_1$. Se vede imediat că

$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0 \tag{3}$$

iar (2) se transcrie sub forma

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 = 0. \tag{4}$$

Relația (1), la care vrem să ajungem,se transcrie

$$|\omega_1| = |\omega_2| = |\omega_3|. \tag{5}$$

Din cele obținute, deducem că numerele complexe ω_1, ω_2, ω_3 sînt nenule și să considerăm o ordonare a modulelor acestora, de exemplu

$$|\omega_1| \leqslant |\omega_2| \leqslant |\omega_3|. \tag{6}$$

Ridicînd (3) la pătrat și ținînd seama de (4) obținem

$$\omega_1\omega_2 + \omega_2\omega_3 + \omega_3\omega_1 = 0 \text{ sau } \omega_1(\omega_2 + \omega_3) + \omega_2 + \omega_3 = 0$$

sau, datorită lui (3):

$$-\omega_1^2 + \omega_2\omega_3 = 0, \text{ deci } \omega_1^2 = \omega_2\omega_3.$$

De aici rezultă

$$|\omega_1|^2 = |\omega_2|\,|\omega_3|. \tag{7}$$

Dacă în inegalitățile (6), cel puțin una ar fi strictă, atunci prin înmulțire am ajunge la $|\omega_1|^2 < |\omega_2|\,|\omega_3|$, ceea ce ar contrazice (7).

Rezultă că inegalitățile (6) sînt de fapt egalități, adică

$$|\omega_1| = |\omega_3| = |\omega_3|,$$

care este tocmai relația (5) la care voiam să ajungem.

Cu aceasta, problema este rezolvată.

O extindere a rezultatului de la pct. c) se găsește în G. M. 4—5/1984 și este dată de Florin Vulpescu-Jalea.

ON 6. *Se consideră funcțiile de gradul al doilea* $f(x) = 2x^2 + 2$, $g(x) = x^2 + 2x + 1$. *Să se arate că pentru orice funcție de gradul al doilea* h *astfel încît* $g(x) \leqslant h(x) \leqslant f(x)$, *oricare ar fi* x *real, avem* $h(1) = 4$ *și există* $\lambda \in [0, 1]$ *constant, astfel încît* $h(x) = \lambda f(x) + (1 - \lambda)\, g(x)$ *pentru orice* $x \in \mathbf{R}$.

L. Panaitopol, Olimpiada județeană, 1978, cl. IX

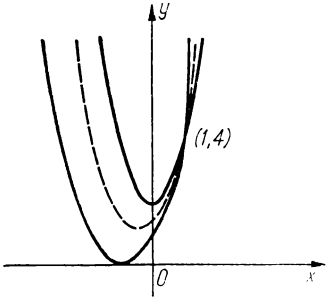


Fig. ON6

Pentru $x = 1$ avem $g(1) \leqslant h(1) \leqslant f(1)$, adică $4 \leqslant h(1) \leqslant 4$, deci $h(1) = 4$. Graficele funcțiilor f, g, h arată ca în fig. ON 6. Se observă că parabolele corespunzătoare sînt tangente două cîte două în punctul de coordonate (1,4). Atunci ecuația de gradul II $h(x) = g(x)$ are pe $x = 1$ rădăcină dublă. Deci $(\exists)\ \lambda \in \mathbf{R}$ astfel încît

$$h(x) - g(x) = \lambda(x - 1)^2, \quad (\forall)\ x \in \mathbf{R}. \tag{1}$$

Dar $f(x) - g(x) = (x-1)^2$ și relația (1) devine

$h(x) - g(x) = \lambda[f(x) - g(x)]$ sau $h(x) = \lambda f(x) + (1-\lambda)g(x)$, $(\forall)x \in \mathbf{R}$.

Rămîne să mai arătăm că $\lambda \in [0, 1]$.

Din condiția $g(x) \leqslant h(x) \leqslant f(x)$ deducem $0 \leqslant h(x) - g(x) \leqslant f(x) - g(x)$ sau, ținînd seama de (1) și de definițiile lui f și g obținem

$$0 \leqslant \lambda(x-1)^2 \leqslant (x-1)^2, \ (\forall)\ x \in \mathbf{R}, \text{ adică } 0 \leqslant \lambda \leqslant 1.$$

ON 7. *Se consideră polinoamele* $P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$, $Q(x) = x^{n+1} + b_1x^n + \ldots + b_{n+1}$ *cu rădăcinile* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *respectiv* $x_1', x_2', \ldots, x_{n+1}'$. *Să se arate că*

$$P(x_1')\ P(x_2') \ldots P(x_{n+1}') = Q(x_1)\ Q(x_2) \ldots Q(x_n).$$

N. Micu, Olimpiada județeană 1975, cl. XII

Soluție. Avem $P(x) = \prod_{j=1}^{n}(x - x_j)$, $Q(x) = \prod_{i=1}^{n+1}(x - x_i')$ și deci

$$P(x_i') = \prod_{j=1}^{n}(x_i' - x_j) \quad \text{pentru } i = 1, 2, \ldots, n+1$$

iar

$$Q(x_j) = \prod_{i=1}^{n+1}(x_j - x_i') \quad \text{pentru } j = 1, 2, \ldots, n.$$

Atunci:

$$\prod_{i=1}^{n+1} P(x_i') = \prod_{i=1}^{n+1}\prod_{j=1}^{n}(x_i' - x_j) \text{ și } \prod_{j=1}^{n} Q(x_j) = \prod_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{n+1}(x_j - x_i').$$

Deoarece numărul factorilor $x_i' - x_j$ pentru $i = 1,2,\ldots, n+1$ și $j = 1,2,\ldots, n$ este egal cu $n(n+1)$, care este număr par, rezultă că putem scrie:

$$\prod_{i=1}^{n+1} P(x_i') = \prod_{i=1}^{n+1}\prod_{j=1}^{n}(x_i' - x_j) = (-1)^{n(n+1)}\prod_{j=1}^{n+1}\prod_{j=1}^{n}(x_j - x_i') = \prod_{j=1}^{n}\prod_{j=1}^{n+1}(x_j - x_i') =$$

$$= \prod_{j=1}^{n} Q(x_j).$$

ON 8. *Se consideră polinoamele cu coeficienți reali*

$$P = X^3 + aX^2 + bX + c, \ P_1 = X^3 + a_1X^2 + b_1X + c_1.$$

Să se demonstreze că următoarele trei afirmații sînt echivalente:

a) *Polinoamele* P, P_1 *au cel puțin două rădăcini comune (reale sau complexe);*

b) *Există două polinoame* Q, Q_1 *de gradul întîi astfel încît* $PQ = P_1Q_1$;

c) *Matricea*

$$\begin{pmatrix} a-a_1 & 1 & 1 \\ b-b_1 & a & a_1 \\ c-c_1 & b & b_1 \\ 0 & c & c_1 \end{pmatrix}$$

are toți determinanții ***de ordinul 3 nuli.***

Mircea Martin, Olimpiada județeană, 1978, cl. XII

Soluție. Demonstrăm echivalența afirmațiilor a) și b).

a) $\Rightarrow$ b) Fie u, v, α respectiv, u, v, β rădăcinile polinoamelor P și P_1. Avem atunci $P = (X-u)(X-v)(X-\alpha)$, $P_1 = (X-u)(X-v)(X-\beta)$ și dacă luăm $Q = X-\beta$ și $Q_1 = X-\alpha$ rezultă $PQ = P_1Q_1$.

b) $\Rightarrow$ a) Fie u, v, w, respectiv u_1, v_1, w_1 rădăcinile polinoamelor P și P_1. Fie de asemenea t și t_1 rădăcinile polinoamelor de gradul întîi Q și Q_1. Rădăcinile polinomului PQ sînt u, v, w, t iar cele ale polinomului P_1Q_1 sînt u_1, v_1, w_1, t_1. Din egalitatea $PQ = P_1Q_1$ rezultă $\{u, v, w, t\} = \{u_1, v_1, w_1, t_1\}$. Dacă $t = t_1$, rezultă $\{u, v, w\} = \{u_1, v_1, w_1\}$, deci polinoamele P și P_1 au toate cele trei rădăcini comune. Dacă $t \neq t_1$, fie de exemplu $t = u_1$; atunci $\{u, v, w\} = \{v_1, w_1, t_1\}$, deci polinoamele P și P_1 au două rădăcini comune.

Demonstrăm acum echivalența afirmațiilor b) și c).

b) $\Rightarrow$ c). Fie Q, Q_1 polinoame de gradul I astfel ca $PQ = P_1Q_1$. Rezultă imediat că Q și Q_1, au același coeficient dominant și notînd cu t, t_1 rădăcinile acestor polinoame, avem egalitatea: $(X-t)P = (X-t_1)P_1$, care este echivalentă cu $X(P-P_1) = tP - t_1P_1$.

Identificînd coeficienții ajungem la egalitățile:

$$\begin{cases} a - a_1 = t \cdot 1 - t_1 \cdot 1 \\ b - b_1 = t \cdot a - t_1 \cdot a_1 \\ c - c_1 = t \cdot b - t_1 \cdot b_1 \\ 0 = t \cdot c - t_1 \cdot c_1 \end{cases}$$

ceea ce arată că în matricea considerată coloana I este combinație liniară de coloanele II și III. Rezultă că toți determinanții de ordinul 3 sînt nuli.

c) $\Rightarrow$ b). Dacă toți determinanții de ordinul 3 ai matricii considerate sînt nuli, rezultă că rangul matricii este < 3. Cum rangul reprezintă numărul maxim de coloane liniar independente, înseamnă că dacă vom considera toate cele 3 coloane ale matricii, ele vor fi liniar dependente. Scriem atunci că prima coloană este o combinație liniară de a doua și a treia coloană (să zicem cu coeficienții t și $-t_1$) și parcurgînd drumul invers față de ceea de am făcut la implicația anterioară, ajungem la egalitatea $(X-t)P = (X-t_1)P_1$. Luînd $Q = X-t$ și $Q_1 = X-t_1$, avem deci $PQ = P_1Q_1$ și cu aceasta problema este complet soluționată.

ON 9. *Se consideră polinomul* $P = 4X^3 + 8aX^2 + 4bX + 1$, $a, b \in \mathbf{R}$. *Să se arate că:*

a) *Dacă* x_0 *este o rădăcină reală a lui* P, *atunci* $x_0 \leqslant b^2 - 2a$;

b) *Dacă* x_1, x_2 *sînt rădăcini distincte ale lui* P, *ambele rădăcini fiind reale sau ambele complexe nereale, atunci* $x_1 x_2 \geqslant b - a^2$.

Eugen Onofraș, Olimpiada județeană, 1978, cl. XII

Soluție. a) Dacă x_0 este o rădăcină reală, avem

$$4x_0^3 + 8ax_0^2 + 4bx_0 + 1 = 0, \text{ de unde } 4x_0^3 = -8ax_0^2 - 4bx_0 - 1 =$$

$$= 4b^2x_0^2 - 8ax_0^2 - 4b^2x_0^2 - 4bx_0 - 1 = 4x_0^2(b^2 - 2a) - (2bx_0 + 1)^2 \leqslant$$

$$\leqslant 4x_0^2(b^2 - 2a),$$

adică $4x_0^3 \leqslant 4x_0^2(b^2 - 2a)$. Cum $4x_0^2 > 0$ (nu putem avea $x_0 = 0$) putem împărți și obținem $x_0 \leqslant b^2 - 2a$.

b) Dacă x_1, x_2 sînt ambele rădăcini reale sau complexe nereale, în mod sigur cealaltă rădăcină x_3 va fi reală.

Folosind și relațiile lui Viète, putem scrie

$$x_1x_2 = b - x_3(x_1 + x_3) = b - x_3(-2a - x_3) = b + 2ax_3 + x_3^2 =$$

$$= b - a^2 + a^2 + 2ax_3 + x_3^2 = b - a^2 + (a + x_3)^2 \geqslant b - a^2, \text{ adică } x_1x_2 \geqslant b - a^2.$$

ON 10. *Fie* P *un polinom cu coeficienți complecși. Să se demonstreze că funcția polinomială asociată este pară, dacă și numai dacă există un polinom* Q *cu coeficienți complecși astfel încît*

$$P(x) = Q(x)\,Q(-x), \quad (\forall)\ x \in \mathbf{C}.$$

Marcel Țena, Olimpiada pe țară, 1979, cl. XII

Soluție. Dacă există un polinom Q cu proprietatea din enunț, este clar că funcția polinomială P este o funcție pară. Reciproc, să presupunem că funcția polinomială P este pară. Scriind că $P(-x) = P(x)$, $(\forall)\ x \in \mathbf{C}$ și identificînd coeficienții, rezultă că coeficienții termenilor cu puteri impare ale lui x sînt nuli. Putem deci scrie

$$P(x) = a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 + \ldots + a_{2n}x^{2n} = P_1(x^2), \quad (\forall)\ x \in \mathbf{C} \qquad (1)$$

unde P_1 este un polinom de gradul n. Dacă $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbf{C}$ sînt rădăcinile polinomului P_1, putem scrie

$P_1(x) = a(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)$ cu $a \in \mathbf{C}^*$ și atunci (1) devine:

$$P(x) = a(x^2 - x_1)(x^2 - x_2) \ldots (x^2 - x_n) =$$

$$= (-1)^n\, a(x_1 - x^2)(x_2 - x^2) \ldots (x_n - x^2). \qquad (2)$$

Fie numerele $y_1, y_2, \ldots, y_n \in \mathbf{C}$, astfel ca $y_1^2 = x_1$, $y_2^2 = x_2, \ldots, y_n^2 = x_n$ și de asemenea fie $b \in \mathbf{C}$, astfel ca $b^2 = (-1)^n\, a$.

Relația (2) devine:

$P(x) = b^2(y_1^2 - x^2)(y_2^2 - x^2) \dots (y_n^2 - x^2) = [b(y_1 + x)(y_2 + x) \dots (y_n + x)] \cdot$
$\cdot [b(y_1 - x)(y_2 - x) \dots (y_n - x)]$ sau, punînd $Q(x) = b(y_1 + x)(y_2 + x) \dots (y_n + x)$ obținem $P(x) = Q(x)\,Q(-x)$, $(\forall)\, x \in \mathbf{C}$.

ON 11. *Să se arate că dacă* $\frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} = \frac{1}{A+B+C}$ *atunci* $\frac{1}{A^n} + \frac{1}{B^n} + \frac{1}{C^n} = \frac{1}{A^n + B^n + C^n}$, *unde* $A, B, C \in \mathbf{R}^*$, $A + B + C \neq 0$, $A^n + B^n + C^n \neq 0$, *iar* n *este natural impar.*

G. M. F. B. 7/1958, Olimpiada matematică cl. IX–X Kiev

Soluție. Efectuînd calculele în relația din ipoteză, obținem:

$$BC(A + B + C) + AC(A + B + C) + AB(A + B + C) = ABC$$

sau

$$ABC + BC(B + C) + A^2C + AC(B + C) + A^2B + AB(B + C) = ABC$$

sau

$$A^2(B + C) + A(B + C)^2 + BC(B + C) = 0$$

sau

$$(B + C)[A^2 + (B + C)A + BC] = 0$$
$$(B + C)(A + B)(A + C) = 0.$$

Rezultă deci că $B = -C$ sau $A = -B$ sau $A = -C$.
Relația fiind simetrică în A, B, C să demonstrăm de exemplu egalitatea dorită în cazul $B = -C$. Deoarece $n = 2p + 1$ $(p \in \mathbf{N})$, rezultă $B^n = -C^n$ și prin urmare avem

$$\frac{1}{A^n} + \frac{1}{B^n} + \frac{1}{C^n} = \frac{1}{A^n} - \frac{1}{C^n} + \frac{1}{C^n} = \frac{1}{A^n}.$$

Pe de altă parte rezultă

$$\frac{1}{A^n + B^n + C^n} = \frac{1}{A^n - C^n + C^n} = \frac{1}{A^n}$$

și astfel relația dată este demonstrată.

ON 12. *Dacă rădăcinile polinomului cu coeficienți complecși*

$$P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + (-1)^n$$

au același modul, atunci $P(-1) \in \mathbf{R}$.

N. Micu, G. M. 7/1974, Olimpiada pe țară cl, XII, 1974

Soluție. Fie $x_1, x_2, \ldots, x_n$ rădăcinile lui $P(x)$. Vom calcula $P(-1)$ ținînd seama de relațiile între rădăcini și coeficienți. Avem

$$P(-1) = (-1)^n + a_1(-1)^{n-1} + \ldots + a_{n-1}(-1) + (-1)^n =$$

$$= (-1)^n[1 - a_1 + a_2 + \ldots + (-1)^{n-1}a_{n-1} + 1] =$$

$$= (-1)^n\left[1 + \sum_{k_1=1}^{n} x_{k_1} + \sum_{k_1<k_2} x_{k_1}x_{k_2} + \ldots + \sum_{k_1<\ldots<k_{n-1}} x_{k_1}x_{k_2}\ldots x_{k_{n-1}} + \right.$$

$$\left. + x_1x_2\ldots x_n\right] = (-1)^n \prod_{k=1}^{n}(1 + x_k).$$

Avem

$$x_1 x_2 \ldots x_n = 1. \tag{1}$$

Aplicînd modulul și ținînd seama că $|x_1| = |x_2| = \ldots = |x_n|$ obținem $|x_1| = |x_2| = \ldots = |x_n| = 1$. Atunci putem scrie $x_k = \cos\alpha_k + i\sin\alpha_k$, $k = \overline{1, n}$ și (1) devine

$$\cos\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\right) + \mathrm{i}\sin\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\right) = 1.$$

Rezultă că $\sum_{k=1}^{n}\alpha_k = 2p\pi$, adică

$$\frac{\sum_{k=1}^{n}\alpha_k}{2} = p\pi. \tag{2}$$

Să observăm că:

$$1 + x_k = 1 + \cos x_k + \mathrm{i}\sin\alpha_k = 2\cos^2\frac{\alpha_k}{2} + 2\mathrm{i}\sin\frac{\alpha_k}{2}\cos\frac{\alpha_k}{2} =$$

$$= 2\cos\frac{\alpha_k}{2}\left(\cos\frac{\alpha_k}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\alpha_k}{2}\right).$$ Atunci putem scrie

$$P(-1) = (-1)^n\prod_{k=1}^{n}(1+x_k) = (-1)^n 2^n\left(\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{\alpha_k}{2}\right)\left(\cos\frac{\sum_{k=1}^{n}\alpha_k}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\sum_{k=1}^{n}\alpha_k}{2}\right) =$$

$$= (-1)^n 2^n (\cos p\pi + \mathrm{i}\sin p\pi)\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{\alpha_k}{2} = (-1)^{n+p}2^n\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{\alpha_k}{2} \in \mathbf{R}.$$

ON 13. *Să se arate că o ecuație algebrică de grad par, cu coeficienți numere întregi impare, nu admite rădăcini raționale.*

Ștefan Alexe, G. M. 6/1977

Soluție. Să presupunem prin absurd că ecuația $a_0x^{2n} + a_1x^{2n-1} + \ldots + a_{2n-1}x + a_{2n} = 0$ ($a_0, a_1, \ldots, a_{2n}$ întregi impare) admite rădăcina rațională $\frac{p}{q}$ (fracție ireductibilă).

Atunci p divide a_{2n}, iar q divide a_0, deci q și p sînt impare. Scriind că $\frac{p}{q}$ este rădăcină, obținem

$$a_0 \cdot \frac{p^{2n}}{q^{2n}} + a_1 \cdot \frac{p^{2n-1}}{q^{2n-1}} + \ldots + a_{2n-1} \cdot \frac{p}{q} + a_{2n} = 0$$

sau

$$a_0p^{2n} + a_1p^{2n-1}q + \ldots + a_{2n-1}pq^{2n-1} + a_{2n}q^{2n} = 0.$$

Ultima egalitate este însă o contradicție, deoarece membrul stîng este o sumă cu un număr impar de numere impare, deci este un număr impar, în timp ce membrul drept este par. Cazul $n = 1$ (ecuație de gradul 2) a constituit subiectul unei probleme date la Olimpiada pe țară 1980, cl. IX.

ON 14. *Se consideră permutările*

$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & 19 & 20 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \ldots & a_{19} & a_{20} \end{pmatrix},$$

$$p_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & 19 & 20 \\ a_{19} & a_{20} & a_{17} & a_{18} & \ldots & a_1 & a_2 \end{pmatrix}.$$

Dacă $Inv\,(p_1) = 100$, *arătați că* $Inv\,(p_2) \leqslant 100$.

I. Rașa, G. M. 11/1979, Olimpiada locală, Cluj-Napoca, 1979

Soluție. Fie (a_i, a_j) o inversiune în permutarea p_1, adică $i < j$ și $a_i > a_j$. Să analizăm ce devine (a_i, a_j) în permutarea p_2, adică în ce ordine apar. Avem următoarele cazuri:

1) i par, j par. În p_2 avem (a_j, a_i) care nu mai este inversiune.

2) i par, j impar. În p_2 avem (a_j, a_i) care nu mai este inversiune.

3) i impar, j par. Dacă $j > i + 1$ în p_2 avem (a_j, a_i), care nu mai este inversiune; dacă însă $j = i + 1$, atunci în p_1 avem (a_i, a_{i+1}), iar în p_2 avem tot (a_i, a_{j+1}) care este deci inversiune; asemenea inversiuni care se „transmit" de la p_1 la p_2 sînt cel mult 10, deoarece i ia cel mult valorile 1, 3, 5, ... 19.

4) i impar, j impar. În p_2 avem (a_j, a_i) care nu mai este inversiune.

Așadar din cele 100 de inversiuni ale permutării p_1, cel mult 10 se transmit ca inversiuni și permutării p_2, în timp ce celelalte cel puțin 90, se transformă în neinversiuni în permutarea p_2.

În permutarea p_2 există $(20 \cdot 19)/2 = 190$ cupluri de tipul (a_i, a_j) cu $i < j$, dintre care cel puțin 90 sînt neinversiuni. Înseamnă că cel mult 100 pot fi inversiuni, adică $\text{Inv}(p_2) \leqslant 100$.

ON 15. *Fie* $n \geqslant 3$ *un întreg finit și* $\omega = \cos\frac{2\pi}{n} + i \sin\frac{2\pi}{n}$. *Să se arate că pentru orice* $a \in \mathbf{C}$ *și* $r \in \mathbf{R}$, $r > 0$, *numărul*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{|a - r\omega^k|^2}{|a|^2 + r^2}$$

este întreg; interpretare geometrică.

O. Stănășilă, G. M. 9/1981, baraj

Soluție. Notînd $a = |a|(\cos\theta + i \sin\theta)$, obținem

$$a - r\omega^k = \left(|a| \cos\theta - r\cos\frac{2k\pi}{n}\right) + i\left(|a| \sin\theta - r \sin\frac{2k\pi}{n}\right) \text{ și apoi}$$

$$|a - r\omega^k|^2 = |a|^2 + r^2 - 2r|a| \cos\left(\frac{2k\pi}{n} - \theta\right). \text{ Atunci}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{|a - r\omega^k|^2}{|a|^2 + r^2} = n - \frac{2r|a|}{|a|^2 + r^2} \cdot \sum_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{2k\pi}{n} - \theta\right).$$

În identitatea cunoscută

$$\sum_{k=1}^{n} \cos(x + k\varphi) = \frac{\sin\frac{n\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}} \cdot \cos\left(x + \frac{(n+1)\varphi}{2}\right),$$

luînd $x = -\theta$ și $\varphi = \frac{2\pi}{n}$, obținem

$$\sum_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{2k\pi}{n} - \theta\right) = 0,$$

ceea ce arată că suma din enunțul problemei este n.

Dacă A_k este imaginea geometrică a numărului complex $r\omega^k (1 \leqslant k \leqslant n)$, A este imaginea geometrică a numărului complex a, iar B este un punct de pe cercul cu centrul în origine și rază r, astfel ca $AO \perp OB$ (fig. ON 15) atunci relația din problemă devine:

$$\sum_{k=1}^{n} \| AA_k \|^2 = n \| AB \|^2.$$

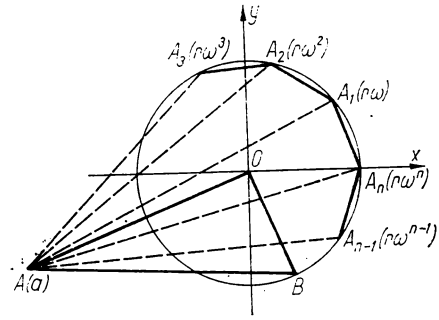


Fig. ON 15

ON 16. *Fie P și Q două polinoame nenule cu coeficienți complecși. Să se arate că o condiție necesară și suficientă ca polinoamele să aibă aceleași rădăcini și aceleași multiplicități ale rădăcinilor corespunzătoare, este ca funcția $f : \mathbf{C} \to \mathbf{R}$, definită prin $f(z) = |P(z)| - |Q(z)|$, să aibă semn constant pe întreg $\mathbf{C}$, putîndu-se anula.*

Marcel Țena, Olimpiada pe țară, 1978, cl. XII

Soluție. ($\Rightarrow$) Dacă P și Q au aceleași rădăcini, cu multiplicități corespunzătoare egale (adică sînt asociate în divizibilitate), există $\lambda \in \mathbf{C}^*$ cu $P(z) = \lambda Q(z)$ $(\forall)\ z \in \mathbf{C}$. Atunci

$$f(z) = |Q(z)|\,(|\lambda| - 1), \text{ care menține semn constant pe } \mathbf{C}.$$

Presupunem că funcția f menține semn constant pe $\mathbf{C}$ și pentru a fixa ideile, fie $f(z) \geqslant 0$, adică $|P(z)| \geqslant |Q(z)|$, $(\forall)\ z \in \mathbf{C}$. Dacă $P(z) = 0$, rezultă imediat $Q(z) = 0$, ceea ce arată că rădăcinile distincte ale lui P se găsesc printre rădăcinile distincte ale lui Q. Notînd cu $z_1, z_2, \ldots, z_k$ rădăcinile distincte ale lui Q și cu $q_1, q_2, \ldots, q_k$ multiplicitățile lor, vom avea

$$Q(z) = b(z - z_1)^{q_1}(z - z_2)^{q_2} \ldots (z - z_k)^{q_k}, \text{ unde } b \in \mathbf{C}^*.$$

Putem considera că rădăcinile distincte ale lui P sînt tot $z_1, z_2, \ldots, z_k$, respectiv cu multiplicitățile $p_1, p_2, \ldots, p_k$, cu convenția că dacă rădăcina z_i nu apare, atunci $p_i = 0$. Atunci

$$P(z) = a(z - z_1)^{p_1}(z - z_2)^{p_2} \ldots (z - z_k)^{p_k}, \text{ unde } a \in \mathbf{C}^*.$$

Inegalitatea $|P(z)| \geqslant |Q(z)|$ devine:

$$|a|\,|z - z_1|^{p_1}\,|z - z_2|^{p_2} \ldots |z - z_k|^{p_k} \geqslant |b|\,|z - z_1|^{q_1}\,|z - z_2|^{q_2} \ldots |z - z_k|^{q_k},$$

$$(\forall)\ z \in \mathbf{C}. \qquad (1)$$

Arătăm mai întîi că $q_i \geqslant p_i$, $(\forall)\, i \in \{1, 2. ..., k\}$. În adevăr, dacă ar exista un indice j cu $q_j < p_j$, în inegalitatea (1), împărțind prin $|z - z_j|^{q_j}$, pentru $z \neq z_j$, vom obține:

$$|a|\,|z - z_1|^{p_1} \ldots |z - z_j|^{p_j - q_j} \ldots |z - z_k|^{p_k} \geqslant |b|\,|z - z_1|^{q_1} \cdot$$

$$\ldots |z - z_{j-1}|^{q_{j-1}}\,|z - z_{j+1}|^{q_{j+1}} \ldots |z - z_k|^{q_k},\ (\forall)\, z \in \mathbf{C} \setminus \{z_j\}. \qquad (2)$$

În (2) făcînd $|z - z_j| \to 0$, în stînga se obține 0 iar în dreapta un număr strict pozitiv, ceea ce ar fi o contradicție. Așadar $q_i \geqslant p_i$, $i \in \{1, 2, ..., k\}$ și atunci pentru $z \in \mathbf{C} \setminus \{z_1, z_2, ..., z_k\}$ inegalitatea (1) devine

$$|a| \geqslant |b|\,|z - z_1|^{q_1 - p_1}|z - z_2|^{q_2 - p_2} \ldots |z - z_k|^{q_k - p_k}. \qquad (3)$$

Arătăm acum că inegalitățile $q_i \geqslant p_i$ sînt de fapt egalități. În adevăr, dacă una din aceste inegalități ar fi strictă, de exemplu $q_j > p_j$, atunci alegînd pe z în afara unor discuri cu centrul în z_j și de rază oricît de mare, astfel ca $|z - z_j| \to \infty$, din (3), vom obține $|a| \geqslant \infty$, contradicție.
Cu aceasta $p_i = q_i$, $(\forall)\, i \in \{1, 2, ..., k\}$ și problema este rezolvată.

ON 17. *Fie* $G = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ *un subgrup al grupului* $(\mathbf{C}^*, .)$ *și fie* $k \in \mathbf{N}^*$. *Să se arate că:*

a) $G = U_n$, *unde* U_n *este grupul multiplicativ al rădăcinilor de ordinul n ale unității.*

b) *Există relația:*

$$a_1^k + a_2^k + \ldots + a_n^k = \begin{cases} 0 & \text{dacă } k \neq \text{multiplu de } n \\ n & \text{dacă } k = \text{multiplu de } n. \end{cases}$$

Marcel Țena, G. M. 1/1982, Olimpiada 1982, București

Soluție. a) Cum $(G, .)$ este un grup de n elemente, se știe că $x^n = 1$, $(\forall) x \in G$ (deoarece ordinul unui element divide ordinul grupului). Aceasta înseamnă că $G \subset U_n$. Dar atît G cît și U_n au cîte n elemente și atunci incluziunea $G \subset U_n$ este chiar egalitate, adică $G = U_n$.

b) Notînd $\xi = \cos\dfrac{2\pi}{n} + i \sin\dfrac{2\pi}{n}$, vom avea $G = U_n = \{1, \xi, \xi^2, ..., \xi^{n-1}\}$.

Avem $k = nq + r$ cu $0 \leqslant r \leqslant n - 1$ și deci, notînd cu S suma din enunț, rezultă

$$S = a_1^k + a_2^k + \ldots + a_n^k = 1 + \xi^k + \xi^{2k} + \ldots + \xi^{(n-1)k} =$$

$$= 1 + (\xi^n)^q \cdot \xi^r + (\xi^n)^{2q} \cdot \xi^{2r} + \ldots + (\xi^n)^{(n-1)q} \cdot \xi^{(n-1)r} =$$

$$= 1 + \xi^r + \xi^{2r} + \ldots + \xi^{(n-1)r}.$$

Deci dacă $r = 0$, atunci $S = n$, iar dacă $r > 0$ atunci

$$S = 1 + \xi^r + \xi^{2r} + \ldots + \xi^{(n-1)r} = \frac{1 - (\xi^r)^n}{1 - \xi^r} = \frac{1 - (\xi^n)^r}{1 - \xi^r} = \frac{1 - 1}{1 - \xi^r} = 0.$$

ON 18. *Fie* $m \geqslant 1$, $n \geqslant 1$ *întregi astfel încît* $\sqrt{7} - \frac{m}{n} > 0$. *Să se arate că* $\sqrt{7} - \frac{m}{n} > \frac{1}{mn}$.

Radu Gologan Olimpiada pe țară, 1978, cl. IX

Soluție. Cum $\sqrt{7} - \frac{m}{n} > 0$ rezultă $7n^2 - m^2 > 0$. Să notăm $k_0 = \min \{7n^2 - m^2 \mid m, n \in \mathbf{N}^*, 7n^2 - m^2 > 0\}$ și fie $k_0 = 7n_0^2 - m_0^2$, ceea ce este echivalent cu $m_0^2 + k_0 = 7n_0^2$. Deoarece

$$k_0 \in \{k \in \mathbf{N}^* \mid m_0^2 + k = \mathcal{M}7\}^{not} A,$$

deducem $k_0 \geqslant \min A$ (1).
Observăm ușor că dacă $m_0 = \mathcal{M}7$, atunci $\min A = 7$; dacă $m_0 = \mathcal{M}7 \pm 1$, atunci $\min A = 6$; dacă $m_0 = \mathcal{M}7 \pm 2$, atunci $\min A = 3$; în sfîrșit, dacă $m_0 = \mathcal{M}7 \pm 3$, atunci $\min A = 5$. Ținînd seama și de (1), rezultă $k_0 \geqslant 3$. Astfel rezultă inegalitatea $7n^2 - m^2 \geqslant 3$, care se mai scrie $7 \geqslant \frac{m^2 + 3}{n^2}$, de unde $\sqrt{7} \geqslant \frac{\sqrt{m^2 + 3}}{n}$ și atunci

$$\sqrt{7} - \frac{m}{n} \geqslant \frac{\sqrt{m^2 + 3} - m}{n}. \tag{2}$$

Arătăm că pentru $m > 1$ avem inegalitatea

$$\frac{\sqrt{m^2 + 3} - m}{n} > \frac{1}{mn}. \tag{3}$$

Într-adevăr aceasta este echivalentă succesiv cu:

$$\sqrt{m^2 + 3} > 1/m + m \Leftrightarrow m^2 + 3 > 1/m^2 + 2 + m^2 \Leftrightarrow 1 > 1/m^2.$$

Din (2) și (3) tragem concluzia că $\sqrt{7} - m/n > 1/mn$ pentru orice m, n cu proprietatea din enunț și $m > 1$. Să mai observăm că pentru $m = 1$ această inegalitate este evidentă, fiind echivalentă cu $\sqrt{7} > 2/n$ sau $n > 2/\sqrt{7}$. Cu aceasta, problema este rezolvată.

ON 19. *Să se arate că oricum am alege cinci numere întregi, există două dintre acestea, care au suma sau diferența divizibile cu* 7.

I. Tomescu, Olimpiada județeană, 1981, cl. IX

Soluție. Fie a, b, c, d, e cinci numere întregi arbitrare. Se constată ușor că $(\forall) x \in \mathbf{Z}$, avem $x^2 = 7m + k$ unde $m \in \mathbf{Z}$ iar $k \in \{0, 1, 2, 4\}$, adică resturile pe care le dau pătratele perfecte la împărțirea cu 7 sînt 0, 1, 2

sau 4. Deoarece avem cinci numere a, b, c, d, e și cele cinci pătrate ale lor nu pot da la împărțirea cu 7 decît unul din cele patru resturi 0, 1, 2, 4, rezultă conform principiului lui Dirichlet că cel puțin două dintre aceste cinci pătrate dau la împărțirea cu 7 același rest.
Deci există $x, y \in \{a, b, c, d, e\}$ astfel încît $x^2 - y^2$ se divide cu 7. Așadar 7 divide produsul $(x + y)(x - y)$ și fiind număr prim, deducem că 7 divide $x + y$ sau 7 divide $x - y$.

ON 20. *Fie $a, b, c \in \mathbf{N}$ astfel încît ab, bc, ca să fie cuburi perfecte. Să se arate că și a, b, c sînt de asemenea cuburi perfecte.*

Maria Elena Panaitopol, Olimpiada județeană, 1978

Soluție. Dacă $ab = x^3$, $bc = y^3$, $ca = z^3$ $(x, y, z \in \mathbf{N})$, rezultă prin înmulțire $a^2b^2c^2 = (xyz)^3$, de unde $abc = xyz\sqrt{xyz}$, ceea ce arată că xyz este pătrat perfect. Notînd $xyz = t^2$ $(t \in \mathbf{N})$, obținem $abc = t^3$. Atunci $a = \left(\frac{t}{y}\right)^3$, $b = \left(\frac{t}{z}\right)^3$, $c = \left(\frac{t}{x}\right)^3$, care sînt cuburi perfecte (mai observăm că din faptul că ab divide abc, rezultă că x^3 divide t^3, deci x divide t și analog y și z divid pe t).

ON 21. *Dacă $x_1 = 9$ și $x_{n+1} = 9^{x_n}$ pentru orice întreg pozitiv, arătați că ultimele două cifre ale lui x_3 scris în baza 10 sînt aceleași cu ultimele două cifre ale lui x_4 scris în baza 10. Care sînt aceste cifre?*

A șaptea Olimpiadă de matematică Britanică, G. M. B. 1/1973

Soluție. Din dezvoltarea binomului lui Newton rezultă:

$$(a + b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + C_n^{n-1} ab^{n-1} + b^n.$$

Grupînd termenii rezultă

$$(a + b)^n = a^2[a^{n-2} + C_n^1 a^{n-3} b + \ldots + C_n^{n-2} b^{n-2}] + nab^{n-1} + b^n,$$

adică

$$(a + b)^n = \mathcal{M}a^2 + nab^{n-1} + b^n.$$

Observăm că toți x_n sînt impari. Atunci $x_n - 1$ este par deci $(-1)^{x_n - 1} = 1$, iar $(-1)^{x_n} = -1$, oricare ar fi $n \geqslant 1$.

Prin urmare avem:

$$x_2 = 9^{x_1} = (10 - 1)^{x_1} \text{ adică}$$

$$x_2 = \mathcal{M}100 + x_1 \cdot 10(-1)^{x_1 - 1} + (-1)^{x_1} = \mathcal{M}100 + 9 \cdot 10 - 1.$$

Deci $x_2 = \mathcal{M}100 + 89$, adică x_2 se termină în 89 în scrierea zecimală. Să presupunem că x_n se termină în scrierea zecimală în 89. Atunci conform relației de recurență avem

$$x_{n+1} = 9^{x_n} = (10 - 1)^{x_n},$$

sau

$$x_{n+1} = \mathcal{M}100 + x_n - 10(-1)^{x_n-1} + (-1)^{x_n} =$$
$$= \mathcal{M}100 + 10 \cdot (\mathcal{M}100 + 8 \cdot 10 + 9) - 1 = \mathcal{M}100 + 90 - 1 =$$
$$= \mathcal{M}100 + 89.$$

Am arătat prin inducție că x_n se termină în 89 pentru orice $n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant 2$. Rezultă deci în particular și pentru $n = 4$ că proprietatea e adevărată, adică x_4 se termină în 89.

ON 22. *Să se găsească o condiție necesară pentru ca numărul* $N = 2^n + 3^n$ *să fie un număr prim. Este această condiție și suficientă?*

Dan Radu, G. M. B. 9/1970

Fie $n = 2^k \cdot p$ unde $k \in \mathbf{N}$ și p este natural impar. Atunci

$$N = 2^n + 3^n = (2^{2^k})^p + (3^{2^k})^p.$$

Cum p este impar, dacă $p > 1$ rezultă că N se divide cu $2^{2^k} + 3^{2^k}$, deci nu mai este număr prim. Rezultă cu necesitate $p = 1$, adică $n = 2^k$. Aceasta este o condiție necesară ca N să fie prim, dar nu este suficientă după cum rezultă din următorul contraexemplu:

$$2^{2^3} + 3^{2^3} = 2^8 + 2^8 = 6\,817 = 17 \cdot 401.$$

ON 23. *Să se arate că produsul a trei numere naturale consecutive nu poate fi cubul unui număr natural.*

E. Constantinescu, G. M. 8/1974 Olimpiada de matematică, etapa județeană, 1974

Soluție. Presupunem că există k natural astfel ca $(n - 1)\, n(n + 1) = k^3$ adică $n^3 - n = k^3$ sau $n^3 - k^3 = n$ sau $(n - k)\,(n^2 + nk + k^2) = n$. Dar $n > k$ (pentru $n = k$ ar rezulta $n = 0$), adică $n - k \geqslant 1$. Deci $n^2 + nk + k^2 \geqslant nk > n$ (cazul $k = 1$ se va trata separat). Deci $(n - k)\,(n^2 + nk + k^2) > 1 \cdot n$ și prin urmare $n^3 - k^3 > n$. Pentru $k = 1$, în orice caz $n^2 > n$ și deci $(n - k)\,(n^2 + nk + k^2) > 1 \cdot n$. Deci egalitatea este imposibilă.

ON 24. *Să se arate că ecuația* $x^3 + y^3 + z^3 = a$ *unde* $a \in \{9k \pm 4 \mid k \in \mathbf{Z}\}$, *nu admite soluții în numere întregi.*

G. Szöllősy, G. M. B. 1971

Soluție. Orice număr întreg poate fi scris sub una din formele $3k$, $3k + 1$ sau $3k - 1$ unde $k \in \mathbf{Z}$. Fie $x = 3a + \varepsilon_1$, $y = 3b + \varepsilon_2$, $z = 3c + \varepsilon_3$ unde $a, b, c \in \mathbf{Z}$ iar $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ pot lua valorile $0, \pm 1$. Pentru aceste valori avem $E = x^3 + y^3 + z^3 = (3a + \varepsilon_1)^3 + (3b + \varepsilon_2)^3 + (3c + \varepsilon_3)^3 \equiv \varepsilon_1^3 + \varepsilon_2^3 + \varepsilon_3^3 \pmod 9$. Dar $\varepsilon_1^3 + \varepsilon_2^3 + \varepsilon_3^3$ poate lua doar valori din mulțimea $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$. Rezultă deci că ecuația dată nu are soluții.

ON 25. *Un tetraedru are toate înălțimile congruente și una din ele cade în ortocentrul feței opuse. Să se arate că tetraedrul este regulat.*

N. Popescu, Olimpiada pe țară 1975 cl. a X—a

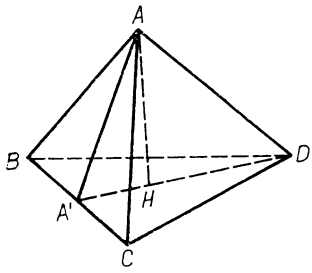


Fig. ON 25

Soluție. Fie H ortocentrul feței $[BCD]$, unde cade înălțimea din A a tetraedrului $[ABCD]$ (fig. ON 25). Din faptul că toate înălțimile piramidei sînt congruente, rezultă că toate fețele au aceeași arie, adică $\sigma[ABC] = \sigma[BCD] = \sigma[ACD] = \sigma[ABD]$. Din faptul că $\sigma[ABC] = \sigma[BCD]$, rezultă că înălțimea din A a feței $[ABC]$ este congruentă cu înălțimea din D a feței $[DBC]$ și din teorema celor trei perpendiculare rezultă că ele se întîlnesc în același punct A' pe muchia $|BC|$. Triunghiurile $AA'C$ și $DA'C$ sînt congruente, de unde rezultă că $|AB| \equiv |BD|$. Ducînd înălțimea BB' în triunghiul BCD, se demonstrează analog că $|AC| \equiv |BC|$ și $|AD| \equiv |BD|$. Ducînd și înălțimea CC' în triunghiul BCD, rezultă ca mai sus că $|AB| \equiv |BC|$ și $|AD| \equiv |CD|$. Deci, în final $|AB| \equiv |BC| \equiv |CD| \equiv |DB| \equiv |AC| \equiv |AD|$, adică tetraedrul este regulat.

ON 26. *Fie triunghiul oarecare ABC cu $m(\widehat{A}) > m(\widehat{B}) > m(\widehat{C})$. Să se arate că dacă* $\sin A + \sin B + \sin C = 1$, *atunci* $m(\widehat{B}) + m(\widehat{C}) < 30°$.

L. Mănescu, Olimpiada județeană 1977 cl. X

Soluție. Pentru simplitate notăm $m(\widehat{A}) = A$, $m(\widehat{B}) = B$, $m(\widehat{C}) = C$. Avem $\sin(B + C) = \sin B \cos C + \sin C \cos B < \sin B + \sin C = 1 - \sin A = 1 - \sin(B + C)$, de unde $\sin(B + C) < \frac{1}{2}$. Rezultă $B + C < 30°$ sau $B + C > 150°$; ultima posibilitate este însă exclusă (ar rezulta $A < 30°$ și $B > 75°$, adică $A < B$, fals). Prin urmare $B + C < 30°$.

ON 27. *Pe laturile triunghiului ascuțitunghic ABC, spre exterior se construiesc dreptunghiurile congruente ABB_1B_2, ACC_1C_2 ($|AC_2| \equiv |AB|$ și $|AB_2| \equiv |AC|$). Fie P punctul de intersecție al dreptelor BB_2, CC_2 și S punctul de intersecție al dreptelor BC_2, B_2C. Să se demonstreze că:*

a) $m(\widehat{BSC}) = 90°$ *și punctele B_1, S, C_1 sînt coliniare;*

b) *Semidreapta $[PA$ este bisectoarea unghiului $\widehat{BPC}$ și patrulaterul $BPCA$ are două unghiuri opuse complementare.*

Iacob Hadîrcă, Olimpiada județeană, 1978, cl. IX

Soluție. a) Pentru simplitate vom nota cu A, B, C măsurile (în grade) ale unghiurilor $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ ale triunghiului ABC. Din patrulaterul convex $ABCC_2$ deducem $C_2 \in \operatorname{Int} \widehat{ABC}$ și atunci $|BC_2 \subset \operatorname{Int} \widehat{ABC}$ (fig. ON 27); analog $|CB_2 \subset \operatorname{Int} \widehat{ABC}$. Din triunghiurile isoscele AB_2C și ABC_2 în care

$\widehat{B_2AC} \equiv \widehat{BAC_2}$, deducem că $\widehat{AB_2C} \equiv$ $\equiv \widehat{ACB_2} \equiv \widehat{ABC_2} \equiv \widehat{AC_2B}$ și fie α măsura acestor unghiuri. Folosind axioma de adunare a unghiurilor, deducem că $m(\widehat{SBC}) = B - \alpha$, $m(\widehat{SCB}) = C - \alpha$ și atunci din triunghiul SBC, avem $m(\widehat{BSC}) =$ $= 180 - (B - \alpha + C - \alpha) = A +$ $+ 2\alpha$ (1). Dar din triunghiul AB_2C avem $A + 90 + 2\alpha = 180$, adică $A + 2\alpha = 90$ (2). Din (1) și (2) rezultă că $m(\widehat{BSC}) = 90$. Atunci punctul S este pe cercul de diametru $|BB_2|$, care este cercul circumscris dreptunghiului ABB_1B_2 și

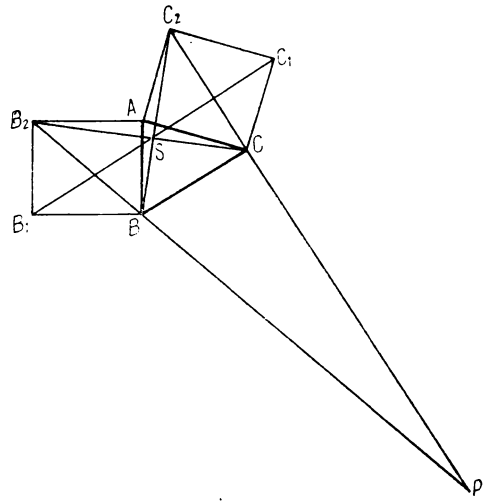


Fig. ON 27

deci, patrulaterul B_1BSB_2 este inscriptibil. De aici rezultă $\widehat{BSB_1} \equiv \widehat{BB_2B_1}$; analog $\widehat{C_1SC_2} \equiv \widehat{C_1CC_2}$ și cum $\widehat{BB_2B_1} \equiv \widehat{C_1CC_2}$, deducem $\widehat{BSB_1} \equiv \widehat{C_1SC_2}$. Conform teoremei reciproce a unghiurilor opuse la vîrf, rezultă că punctele B_1, S, C_1 sînt coliniare.

b) Din patrulaterul convex $ABPC$ deducem $A \in \text{Int}\,\widehat{BPC}$. În triunghiurile congruente AB_2B și ACC_2 înălțimile din A sînt congruente; aceasta înseamnă că A este egal depărtat de dreptele PB și PC și fiind punct interior unghiului $\widehat{BPC}$, va aparține bisectoarei acestui unghi. Altfel spus, semidreapta $[PA$ este bisectoarea unghiului $\widehat{BPC}$.

Unghiurile $\widehat{B_2BA}$ și $\widehat{ACC_2}$ sînt complementare (deoarece $\widehat{ACC_2} \equiv \widehat{BB_2A}$) și atunci suplementele lor $\widehat{ABP}$ și $\widehat{ACP}$ sînt unghiuri ale căror măsuri însumează 270°. Din patrulaterul convex $ABCP$ rezultă atunci:

$$m(\widehat{BAC}) + m(\widehat{BPC}) = 90°.$$

ON 28. *Se dau vectorii* **a**, **b**, **c** *precum și vectorii* **u**, **v**, **w** *definiți astfel:* $\mathbf{u} = \mathbf{a}(\mathbf{bc}) - \mathbf{b}(\mathbf{ca})$, $\mathbf{v} = \mathbf{b}(\mathbf{ac}) - \mathbf{c}(\mathbf{ab})$, $\mathbf{w} = \mathbf{c}(\mathbf{ba}) - \mathbf{a}(\mathbf{bc})$.
Să se arate că dacă **a**, **b**, **c** *formează un triunghi, atunci vectorii* **u**, **w**, **v** *formează un triunghi asemenea cu primul.*

M. Chiriță și *V. Matrosenco*, Olimpiada pe țară, 1976, cl. IX

Soluție. Ținînd cont de comutativitatea produsului scalar, putem scrie

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{a}(\mathbf{bc}) - \mathbf{b}(\mathbf{ca}) + \mathbf{b}(\mathbf{ac}) - \mathbf{c}(\mathbf{ab}) + \mathbf{c}(\mathbf{ba}) - \mathbf{a}(\mathbf{bc}) = 0,$$

deci vectorii **u**, **v**, **w** pot forma un triunghi. Avem mai departe:
$\mathbf{uc} = (\mathbf{ac})(\mathbf{bc}) - (\mathbf{cb})(\mathbf{ac}) = 0$, deci $\mathbf{u} \perp \mathbf{c}$ și analog deducem $\mathbf{v} \perp \mathbf{a}$ și $\mathbf{w} \perp \mathbf{b}$. Deoarece triunghiul format din vectorii **u**, **v**, **w** are laturile respectiv perpendiculare pe laturile triunghiului format de vectorii **a**, **b**, **c**, rezultă că cele două triunghiuri sînt asemenea.

ON 29. *Fie z_1, z_2, z_3 numere complexe, nereale, distincte două cîte două și avînd același modul. Să se arate că dacă $z_1 + z_2z_3$, $z_2 + z_3z_1$, $z_3 + z_1z_2$ sînt reale, atunci $z_1z_2z_3 = 1$.*

L. Panaitopol, Olimpiada județeană, 1979, cl. a X–a

Soluție. Fie $z_1 = r(\cos t_1 + i \sin t_1)$, $z_2 = r(\cos t_2 + i \sin t_2)$, $z_3 = r(\cos t_3 + i \sin t_3)$, unde $r > 0$, iar $t_1, t_2, t_3 \in (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$. Scriind că $z_1 + z_2z_3$ este real, obținem $\sin t_1 + r \sin(t_2 + t_3) = 0$. Analog obținem $\sin t_2 + r \sin(t_3 + t_1) = 0$ și $\sin t_3 + r \sin(t_1 + t_2) = 0$.
Notînd $t_1 + t_2 + t_3 = t$, egalitatea $\sin t_1 + r \sin(t_2 + t_3) = 0$ devine: $\sin t_1 + r \sin(t - t_1) = 0$ sau $\sin t_1 + r \sin t \cos t_1 - r \sin t_1 \cos t = 0$ sau încă, împărțind prin $r \sin t_1 \neq 0$:

$$\operatorname{ctg} t_1 \sin t = \cos t - 1/r. \tag{1}$$

Analog, obținem egalitățile:

$$\operatorname{ctg} t_2 \sin t = \cos t - 1/r. \tag{2}$$

$$\operatorname{ctg} t_3 \sin t = \cos t - 1/r. \tag{3}$$

Dacă am presupune $\sin t \neq 0$, din (1), (2), (3) ar rezulta $\operatorname{ctg} t_1 = \operatorname{ctg} t_2 = \operatorname{ctg} t_3$ și deci cel puțin două din numerele t_1, t_2, t_3 sînt egale, adică cel puțin două din numerele z_1, z_2, z_3 sînt egale, contradicție.

Rezultă $\sin t = 0$ și atunci $\cos t = \pm 1$. Nu putem avea $\cos t = -1$, căci $r > 0$ și atunci (1), (2), (3) ar fi egalități imposibile. Așadar $\cos t = 1$, deci din relațiile amintite deducem $r = 1$. Atunci: $z_1z_2z_3 = r^3(\cos t + i \sin t) = 1$.

ON 30. *Fie un patrulater convex $ABCD$; notăm cu M mijlocul laturii $|BC|$ și cu N mijlocul laturii $|CD|$. Dreptele AM și BN se intersectează în P. Dacă $\frac{\|PM\|}{\|AM\|} = \frac{1}{5}$ și $\frac{\|PB\|}{\|BN\|} = \frac{2}{5}$, să se precizeze natura patrulaterului $ABCD$.*

L. Panaitopol, Olimpiada județeană, 1975, cl. a IX–a

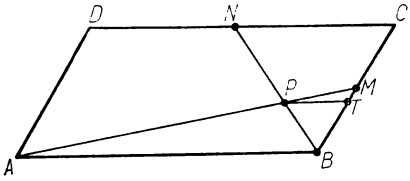


Fig. ON 30

Soluție. Ducem prin P paralela la AB care taie pe BC în T (fig. ON 30). Avem $\Delta MAB \sim \Delta MPT$ și de aici rezultă

$$\frac{\|MP\|}{\|AM\|} = \frac{\|MT\|}{\|BM\|} = \frac{\|PT\|}{\|AB\|} = \frac{1}{5}. \tag{1}$$

Din faptul că $\frac{\|MT\|}{\|BM\|} = \frac{1}{5}$, rezultă $\frac{\|BT\|}{\|BC\|} = \frac{2}{5}$.

Triunghiurile NBC și PBM sînt asemenea deoarece, au un unghi comun și $\frac{\|PB\|}{\|BN\|} = \frac{\|BT\|}{\|BC\|} = \frac{2}{5}$, de unde deducem că

$$PT \| NC \text{ și } \|PT\| = \frac{2}{5} \|NC\|. \tag{2}$$

Din (1) și (2) rezultă că $PT \| AB$, $PT \| DC$ și deci $AB \| DC$. Din faptul că $\|PT\| = \frac{1}{5} AB\|$ și $\|PT\| = \frac{1}{5} \|DC\|$, deducem $\|AB\| = \|DC\|$.

Așadar patrulaterul $ABCD$ are două laturi opuse congruente și paralele, deci este un paralelogram.

ON 31. *Să se arate că inegalitatea*

$$\frac{1}{2}(a^8 + b^8 + c^8) < b^4c^4 + c^4a^4 + a^4b^4$$

exprimă condiția necesară și suficientă ca toate unghiurile unui triunghi să aibă măsurile mai mici decît 90°.

Șerban Gheorghiu, G. M. vol. XLVI, 1940

Soluție. Inegalitatea din enunț devine

$$(a^2 + b^2 + c^2)(-a^2 + b^2 + c^2)(a^2 - b^2 + c^2)(a^2 + b^2 - c^2) > 0$$

sau $(-a^2 + b^2 + c^2)(a^2 - b^2 + c^2)(a^2 + b^2 - c^2) > 0$ deoarece $a^2 + b^2 + c^2$ este mereu pozitiv.

Condiția este necesară. Dacă triunghiul are toate unghiurile de măsuri mai mici de 90°, din teorema cosinusului rezultă că fiecare din factorii produsului este pozitiv și deci și produsul este pozitiv.

Condiția este suficientă. Produsul fiind pozitiv, urmează fie că toți factorii săi sînt pozitivi și deci conform teoremei cosinusului unghiurile triunghiului sînt ascuțite, fie că doi din factori sînt negativi, ceea ce vom vedea că este imposibil. Într-adevăr, este evident că nu putem avea simultan de exemplu inegalitățile
$-a^2 + b^2 + c^2 < 0$ și $a^2 + b^2 - c^2 < 0$, căci ar rezulta $2b^2 < 0$, ceea ce este absurd. Deci produsul este pozitiv numai cînd factorii săi sînt pozitivi.

ON 32. *Fie două triunghiuri ascuțitunghice ABC și $A'B'C'$ astfel că* $\frac{a}{a'} \geqslant \frac{b}{b'} \geqslant \frac{c}{c'}$ *(cu literele mici s-au notat lungimile laturilor) și* $\hat{C} \equiv \hat{C}'$. *Să se arate că triunghiurile sînt asemenea.*

L. Panaitopol, Olimpiada județeană, 1975, cl. IX

Soluție. Notăm cu A, B, C, respectiv A', B', C' măsurile unghiurilor celor două triunghiuri, iar cu R și R' razele cercurilor circumscrise. Din teorema sinusurilor obținem, transcriind inegalitatea din enunț:

$$\frac{2R \sin A}{2R' \sin A'} \geqslant \frac{2R \sin B}{2R' \sin B'} \geqslant \frac{2R \sin C}{2R' \sin C'},$$

$$\text{adică} \frac{\sin A}{\sin A'} \geqslant \frac{\sin B}{\sin B'} \geqslant \frac{\sin C}{\sin C'} = 1. \text{ Rezultă}$$

$\sin A \geqslant \sin A'$ și $\sin B \geqslant \sin B'$ și deoarece $A, A', B, B' \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ deducem

$$A \geqslant A', \quad B \geqslant B'. \tag{1}$$

Adunînd inegalitățile (1) cu egalitatea $C = C'$ obținem

$$A + B + C \geqslant A' + B' + C', \text{ adică } \pi \geqslant \pi.$$

Pentru că ultima inegalitate este de fapt o egalitate, deducem că nici una din inegalitățile (1) nu poate fi strictă, adică $A = A'$, $B = B'$. Prin urmare cele două triunghiuri sînt asemenea.

ON 33. *Fie f o funcție definită pe* $[0, 1]$, *cu valori reale, crescătoare. Se presupune că pentru orice* x_1, x_2, x_3 *cu* $0 < x_1 < x_2 < x_3 < 1$ avem

$$\frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} \geqslant \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

a) *Să se arate că în orice punct* $0 < x_0 < 1$, *funcția f este continuă*;

b) *Se consideră funcția f exprimată prin*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} \text{ pentru } 0 \leqslant x < 1 \\ 1 \text{ pentru } x = 1. \end{cases}$$

Să se arate că f are toate proprietățile cerute și nu este continuă în punctul 1

Dan Voiculescu, Olimpiada județeană 1971, cl. XI

Soluție. a) Luînd $x < x_0 < x_3$ avem conform ipotezei

$$\frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} \leqslant \frac{f(x_3) - f(x_0)}{x_3 - x_0},$$

sau deoarece $x_0 - x > 0$, putem scrie

$$0 \leqslant f(x_0) - f(x) \leqslant (x_0 - x) \cdot \frac{f(x_3) - f(x_0)}{x_3 - x_0}.$$

Făcînd $x \to x_0$ obţinem $0 \leqslant \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} [f(x_0) - f(x)] \leqslant 0$,

adică

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = f(x_0). \tag{1}$$

Fie acum $x_0 < x < x_3 < x_4$; din ipoteză avem

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant \frac{f(x_3) - f(x)}{x_3 - x} \leqslant \frac{f(x) - f(x_3)}{x_4 - x_3}$$

şi cum $x - x_0 > 0$, putem scrie

$$0 \leqslant f(x) - f(x_0) \leqslant (x - x_0) \frac{f(x_4) - f(x_3)}{x_4 - x_3}.$$

Făcînd $x \to 0$ obţinem $0 \leqslant \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} [f(x) - f(x_0)] \leqslant 0$, adică

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = f(x_0). \tag{2}$$

Din relaţiile (1) şi (2) rezultă că f este continuă în punctul $x_0 \in (0, 1)$.

b) Se arată uşor că funcţia considerată verifică condiţia din ipoteză.

Dar în timp ce $f(1) = 1$, avem $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = \frac{1}{2}$, astfel că f nu este continuă în 1.

ON 34. *Să se arate că un şir de numere naturale, care nu are limita* ∞, *conţine cel puţin un subşir constant.*

L. Panaitopol, Olimpiada locală, Bucureşti, 1974

Soluţie. Fie un şir $\{a_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ care nu are limita ∞. Folosind definiţia cu vecinătăţi a limitei, rezultă că există un interval (x, ∞) cu $x > 0$, în afara căruia se găsesc o infinitate de termeni ai şirului. Termenii şirului fiind numere naturale, înseamnă că în punctele 0, 1, 2, ..., $[x]$ sînt plasaţi o infinitate de termeni ai şirului. Cum aceste puncte sînt în număr finit, rezultă că cel puţin într-unul din ele se găsesc plasaţi o infinitate de termeni ai şirului. Aşadar şirul conţine un subşir constant.

ON 35. *Fie* $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *o funcţie continuă satisfăcînd relaţia:*

$$f(x) = \lambda(1 + x^2)\left[1 + \int_0^x \frac{f(t)}{1 + t^2}\, dt\right], \ (\forall)\ x \in \mathbf{R},$$

λ *fiind un număr real dat.*

a) *Să se arate că f este derivabilă în orice punct $x \in \mathbf{R}$.*
b) *Să se arate că există o singură funcție $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, satisfăcînd condițiile de mai sus.*

I. V. Maftei, **Olimpiada pe țară, 1971, cl. XII**

Soluție. a) Deoarece f este continuă pe $\mathbf{R}$, rezultă că și funcția $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(t) = \dfrac{f(t)}{1 + t^2}$ este continuă pe $\mathbf{R}$ și deci admite o primitivă G. Relația din enunț se scrie $f(x) = \lambda(1 + x^2)[1 + G(x) - G(0)]$. Cum G este derivabilă pe $\mathbf{R}$, rezultă că f va fi derivabilă pe $\mathbf{R}$.

b) Relația din enunț se mai scrie

$$\frac{f(x)}{1 + x^2} = \lambda[1 + G(x) - G(0)] \text{ și derivînd obținem}$$

$$\frac{f'(x)(1 + x^2) - f(x) \cdot 2x}{(1 + x^2)^2} = \lambda \cdot \frac{f(x)}{1 + x^2},$$

de unde

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \lambda + \frac{2x}{1 + x^2}.$$

Integrînd obținem:

$$\ln |f(x)| = \lambda x + \ln (1 + x^2) + C_1, \text{ de unde } f(x) = C(1 + x^2) e^{\lambda x}.$$

Relația dată se verifică numai pentru $C = \lambda$, astfel că singura funcție ce verifică condițiile din enunț este $f(x) = \lambda(1 + x^2)e^{\lambda x}$.

ON 36. *Un rezervor este umplut la o sursă cu debit variabil între orele 8 și 12. Același rezervor este golit prin scurgere a doua zi tot între orele 8 și 12. Să se arate că există o oră t în ambele zile, la care apa este la același nivel.*

C. Ottescu, **Olimpiada județeană, 1975, cl. XI**

Soluție. Fie H volumul rezervorului și să considerăm funcțiile

$f, g: [8, 12] \to [0, H]$ definite astfel:

$f(t)$ = volumul de apă din rezervor la ora t în prima zi.

$g(t)$ = volumul de apă din rezervor la ora t în a doua zi.

Observăm că $f(8) = 0$, $f(12) = H$, $g(8) = H$, $g(12) = 0$ și că funcțiile f și g sînt continue pe intervalul $[8, 12]$.
Să considerăm funcția h: $[8, 12] \to \mathbf{R}$, $h(t) = f(t) - g(t)$, care va fi de asemenea continuă. Avem:

$h(8) = f(8) - g(8) = 0 - H = -H < 0$,

$h(12) = f(12) - g(12) = H - 0 = H > 0$.

Rezultă că există $t \in (8, 12)$ astfel încît $h(t) = 0$, adică $f(t) = g(t)$, ceea ce trebuia arătat.

ON 37. *Fie C^0 grupul aditiv al funcțiilor reale continue pe* $\mathbf{R}$, *iar C^1 grupul aditiv al funcțiilor derivabile și cu derivată continuă pe* $\mathbf{R}$. *Oricărei funcții $\varphi \in C^0$ i se asociază o altă funcție $T(\varphi)$ definită pe* $\mathbf{R}$ *prin relația*

$$T(\varphi)(x) = \int_0^x t\varphi(t)\,dt.$$

a) *Să se demonstreze că asocierea $\varphi \mapsto T(\varphi)$ definește o funcție de la C^0 la C^1, iar această funcție este un morfism de grupuri;*

b) *Să se arate că morfismul T este injectiv;*

c) *Fie K acea submulțime a lui C^1, formată din toate funcțiile α având următoarele proprietăți:*

(1) $\alpha(0) = \alpha'(0) = 0$.

(2) *funcția α este derivabilă de două ori în punctul* 0.

Să se arate că $C^1 \neq K$;

d) *Pentru orice $\alpha \in K$ se consideră funcția*

$$\varphi_\alpha(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha'(x)}{x} & \text{pentru } x \neq 0. \\ \alpha''(0) & \text{pentru } x = 0. \end{cases}$$

Să se arate că $\varphi_\alpha \in C^0$ și să se determine $T(\varphi_\alpha)$;

e) *Folosind rezultatul de la punctul precedent, să se demonstreze egalitatea de mulțimi $T(C^0) = K$.*

Dan Radu, Olimpiada pe țară, 1972, cl. XII

Soluție. a) Fiecărei funcții φ îi corespunde $T(\varphi)$. Cum φ este continuă rezultă că și funcția $\psi\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $\psi(t) = t\varphi(t)$ este continuă și deci admite o primitivă F. Atunci:

$T(\varphi)(x) = \int_0^x t\varphi(t)\,dt = F(x) - F(0)$. Cum $F \in C^1$, rezultă că $T(\varphi) \in C^1$.

Avem apoi:

$$T(\varphi_1 + \varphi_2)(x) = \int_0^x t[\varphi_1(t) + \varphi_2(t)]\,dt = \int_0^x t\varphi_1(t)\,dt + \int_0^x t\varphi_2(t)\,dt =$$

$$= T(\varphi_1)(x) + T(\varphi_2)(x),\ (\forall)\ x \in \mathbf{R} \text{ și deci } T(\varphi_1 + \varphi_2) = T(\varphi_1) + T(\varphi_2),$$

ceea ce arată că T este morfism de grupuri.

b) Fie $\varphi_1,\ \varphi_2 \in C^0$, astfel ca $T(\varphi_1) = T(\varphi_2)$. Această înseamnă că

$$T(\varphi_1)(x) = T(\varphi_2)(x),\ (\forall)\ x \in \mathbf{R} \text{ adică} \int_0^x t\varphi_1(t)\,dt = \int_0^x t\varphi_2(t)\,dt$$

sau $\int_0^x t[\varphi_1(t) - \varphi_2(t)]\,dt = 0,\ (\forall)\ x \in \mathbf{R}$. Deducem, derivînd:

$x[\varphi_1(x) - \varphi_2(x)] = 0,\ (\forall)\ x \in \mathbf{R}$, de unde
$\varphi_1(x) - \varphi_2(x) = 0,\ (\forall)\ x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$. Cum φ_1 și φ_2 sînt continue, dacă facem $x \to 0$, rezultă $\varphi_1(0) - \varphi_2(0) = 0$.
Așadar am obținut $\varphi_1(x) = \varphi_2(x),\ (\forall)\ x \in \mathbf{R}$, deci $\varphi_1 = \varphi_2$.
Înseamnă că T este un morfism injectiv.

c) Dacă luăm $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = \operatorname{arc\,tg} x$, avem $f \in C^1$, dar $f'(0) = 1$, deci $f \notin K$. Așadar $C^1 \neq K$.

d) Cum $\alpha \in C^1$, rezultă că α' este continuă, deci funcția φ_α este continuă pe $\mathbf{R} \setminus \{0\}$. Studiem continuitatea funcției φ_α în punctul 0.
Avem:

$$\lim_{x\to 0} \varphi_\alpha(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\alpha'(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\alpha'(x) - \alpha'(0)}{x - 0} = \alpha''(0),$$ deci φ_α este continuă

și în 0. Așadar φ_α este continuă pe $\mathbf{R}$, adică $\varphi_\alpha \in C^0$. Avem, pentru $x > 0$:

$$T(\varphi_\alpha)\,(x) = \int_0^x t\varphi_\alpha(t)\,dt = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \int_\varepsilon^x t\varphi_\alpha(t)\,dt = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \int_\varepsilon^x \alpha'(t)\,dt = = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} [\alpha(x) -$$
$$-\alpha(\varepsilon)] = \alpha(x).$$ De asemenea, pentru $x < 0$ găsim $T(\varphi_\alpha)\,(x) = \alpha(x)$ și în sfîrșit pentru $x = 0$ avem $T(\varphi_\alpha)\,(0) = 0 = \alpha(0)$. Așadar $T(\varphi_\alpha) = \alpha$ și această egalitate are loc pentru orice funcție $\alpha \in K$. Deducem incluziunea $K \subset T(C^0)$.

e) Se arată ușor că pentru orice funcție $\varphi \in C^0$ avem $T(\varphi) \in K$. În adevăr, notînd $\alpha = T(\varphi)$ avem $\alpha(x) = T(\varphi)\,(x) = \int_0^x t\varphi(t)\,dt$.
Atunci $\alpha'(x) = x\varphi(x)$ și deci $\alpha(0) = 0,\ \alpha'(0) = 0$, adică α verifică (1)
În sfîrșit $\lim_{x\to 0} \frac{\alpha'(x) - \alpha'(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{x\varphi(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \varphi(x) = \varphi(0)$, deci $\alpha''(0)$ există, adică α verifică (2).
Așadar $\alpha = T(\varphi) \in K,\ (\forall)\ \varphi \in C^0$, ceea ce arată incluziunea $T(C^0) \subset K$. Ținînd seama și de punctul d) rezultă $T(C^0) = K$.

ON 38. a) *Pentru orice $n \in \mathbf{N}$, să se stabilească inegalitățile*

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x}\,dx \leqslant \frac{1}{2n+1}.$$

b) *Să se calculeze*

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x}\,dx.$$

c) ***Folosind*** *identitatea:*

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\ldots-x^{2n-1}+\frac{x^{2n}}{1+x},$$

să se arate că $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots-\frac{1}{2n}\right)=\ln 2$

Dan Radu, Olimpiada pe țară 1977, cl. XII.

Soluție. a) Cum $\frac{x^{2n}}{1+x}\geqslant 0$, $(\forall)$ $x\in[0,\ 1]$ rezultă $\int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x}\,dx\geqslant 0$.

Avem după aceea $\int_0^1 \frac{x^{2n}}{x+1}\,dx\leqslant\int_0^1 x^{2u}\,dx=\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\Big|_0^1=\frac{1}{2n+1}$.

b) Trecînd la limită în inegalitățile de la punctul a) obținem

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^{2u}}{1+x}\,dx=0.$$

c) Integrăm pe intervalul [0, 1] egalitatea funcțională dată și obținem:

$$\int_0^1\frac{1}{1+x}\,dx=\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots.-\frac{x^{2u}}{2n}\right)\Big|_0^1+\int_0^1\frac{x^{2u}}{1+x}\,dx$$

adică

$$\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots-\frac{1}{2n}+\int_0^1\frac{x^{2u}}{1+x}\,dx.$$

Trecînd la limită pentru $n\to\infty$ și ținînd seama că

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{x^{2n}}{1+x}\,dx=0,\ \text{obținem}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots-\frac{1}{2n}\right)=\ln 2.$$

ON 39. *Fie* $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *două funcții astfel încît* f *este continuă,* g *monotonă, iar* f *și* g *coincid pe* $\mathbf{Q}$. *Atunci ele coincid peste tot.*

Sorin Popa, Olimpiada județeană, 1978, cl. XI

Soluție. Rămîne să arătăm că funcțiile f și g iau valori egale în punctele iraționale. Fie $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ și să considerăm două șiruri de numere raționale (x_n) și (y_n) convergente la α și astfel încît:

$$x_n < \alpha < y_n, \ (\forall)\ n \in \mathbf{N}. \tag{1}$$

Să presupunem că g este crescătoare (analog s-ar trata cazul cînd g este descrescătoare). Aplicînd funcția g în inegalitatea (1) obținem

$$g(x_n) \leqslant g(\alpha) \leqslant g(y_n)$$

sau, deoarece f și g coincid pe numere raționale, putem scrie:

$$f(x_n) \leqslant g(\alpha) \leqslant f(y_n). \tag{2}$$

Funcția f fiind continuă avem $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(\alpha)$ și analog $\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n) = f(\alpha)$. Trecînd la limită în (2) vom obține deci:

$$f(\alpha) \leqslant g(\alpha) \leqslant f(\alpha)$$

adică $f(\alpha) = g(\alpha)$ și soluția este încheiată

ON 40. *Fie* $P_n(x) = a_n x^3 + b_n x^2 + c_n x + d_n$ cu $a_n, b_n, c_n, d_n \in \mathbf{R}$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}^*$. *Să se arate că dacă o funcție* $f\colon [0, 3] \to \mathbf{R}$ *are proprietatea că* $\lim\limits_{n\to\infty} P_n(x) = f(x)$, $(\forall)\ x \in [0, 3]$, *atunci* f *este funcție polinomială.*

Radu Gologan, Olimpiada județeană, 1979, cl. XI

Soluție. Făcînd $x = 0, 1, 2, 3$ obținem respectiv:

$$\lim_{n\to\infty} d_n = f(0), \tag{1}$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n + c_n + d_n) = f(1), \tag{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} (8a_n + 4b_n + 2c_n + d_n) = f(2), \tag{3}$$

$$\lim_{n\to\infty} (27a_n + 9b_n + 3c_n + d_n) = f(3). \tag{4}$$

Din (1) și (2) rezultă că există $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n + c_n)$. (5)

Scriind şirul din (3) sub forma

$$8a_n + 4b_n + 2c_n + d_n = 6a_n + 2b_n + 2(a_n + b_n + c_n) + d_n$$

deducem din (1) şi (5) că există şi $\lim\limits_{n\to\infty}(6a_n + 2b_n)$, adică de fapt există

$$\lim_{n\to\infty}(3a_n + b_n). \tag{6}$$

Scriind şirul din (4) sub forma: $27a_n + 9b_n + 3c_n + d_n = 9(3a_n + b_n) + 3c_n + d_n$, deducem din (1) şi (6) că există $\lim 3c_n$, adică există $\lim c_n$, (7). Din (1), (7), (2) deducem că există $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n)$, (8). Din (6) şi (8) deducem că există $\lim\limits_{n\to\infty}[(3a_n + b_n) - (a_n + b_n)] = \lim 3a_n$, deci există $\lim a_n$, (9). Din (1), (7), (9) şi (2) rezultă în sfîrşit că există $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$, (10).

Notînd atunci $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$, $c = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$, $d = \lim\limits_{n\to\infty} d_n$ avem pentru orice $x \in [0, 3]$:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} P_n(x) = \lim_{n\to\infty}(a_n x^3 + b_n x^2 + c_n x + d_n) = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

ceea ce înseamnă că f este o funcţie polinomială pe intervalul $[0, 3]$.

ON 41. *Fie* $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *o funcţie reală definită prin* $f(x) = 0$, *dacă* x *este iraţional şi* $f(p/q) = 1/q^3$, *dacă* $p, q \in \mathbf{Z}$, $q > 0$ *şi fracţia* p/q *este ireductibilă. Să se arate că* f *are derivată în fiecare punct iraţional* x_0 *de forma* $x_0 = \sqrt{k}$, $k \in \mathbf{N}$.

Radu Gologan, Olimpiada pe ţară, 1978, cl. XI

Soluţie. Fie $x_0 = \sqrt{k}$, $k \in \mathbf{N}$, $x_0 \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$.

I) Fie un şir $x_n' \to x_0$ cu $x_n' \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, $x_n' \neq x_0$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}^*$. Avem:

$$\frac{f(x_n') - f(x_0)}{x_n' - x_0} = \frac{0 - 0}{x_n' - x_0} = 0 \text{ deci şi } \lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n') - f(x_0)}{x_n' - x_0} = 0.$$

II) Fie un şir $x_n'' \to x_0$ cu $x_n'' \in \mathbf{Q}$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}^*$. Avem:

$$x_n'' = \frac{p_n}{q_n},\ q_n > 0 \text{ şi } (p_n, q_n) = 1.$$

Mai întîi rezultă că $q_n \to \infty$. Într-adevăr să presupunem prin absurd că $q_n \not\to \infty$. Aceasta înseamnă că $(\exists)\ \varepsilon_0 > 0$ astfel încît $(\forall)\ s \in \mathbf{N}$, $(\exists)\ n_s \geqslant s$ cu $q_{n_s} \leqslant \varepsilon_0$. Altfel spus, şirul (q_n) admite un subşir (q_{n_s}) mărginit. Cum q_{n_s} sînt numere naturale, rezultă că în subşirul (q_{n_s}) există numai un număr

finit de valori ale termenilor. Cum $\frac{p_n}{q_n} \to \sqrt{k}$, scriind definiția cu ε și luînd $\varepsilon = 1$, obținem că de la un anumit rang există inegalitatea $p_n < (1 + \sqrt{k})q_n$ și atunci $p_{n_s} < (1 + \sqrt{k})q_{n_s}$ (pentru n_s de la acel rang încolo). Rezultă că și subșirul (p_{n_s}) este mărginn și de aici deducem că termenii săi iau numai un număr finit de valori. Dar în aceste condiții și termenii subșirului $\left(\frac{p_{n_s}}{q_{n_s}}\right)$ iau doar un număr finit de valori. Dacă avem cel puțin două asemenea valori distincte, rezultă că $\left(\frac{p_{n_s}}{q_{n_s}}\right)$ nu este convergent, contradicție, iar dacă avem o singură valoare pentru termenii subșirului $\left(\frac{p_{n_s}}{q_{n_s}}\right)$, acesta este convergent către acea valoare care este rațională, deci iarăși contradicție (limita este $\sqrt{k}$, care este irațional).
Contradicția obținută arată că trebuie să avem $q_n \to \infty$. Avem

$$\frac{f(x_n'') - f(x_0)}{x_n'' - x_0} = \frac{\frac{1}{q_n^2}}{\frac{p_n}{q_n} - \sqrt{k}} = \frac{1}{q_n^2(p_n - q_n\sqrt{k})}. \tag{1}$$

Deoarece $\sqrt{k}$ este irațional, rezultă $p_n^2 - q_n^2 k \neq 0$ și atunci $|p_n^2 - q_n^2 k|$ este număr natural nenul, adică $|p_n^2 - q_n^2 k| \geqslant 1$, de unde

$$\frac{1}{|p_n - q_n\sqrt{k}|} \leqslant |p_n + q_n\sqrt{k}|, \ (\forall)\ n \in \mathbf{N}.$$

Mai ținem seama că șirul $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)$ fiind convergent este mărginit, deci $(\exists)\ M > 0$ cu $\left|\frac{p_n}{q_n}\right| \leqslant M$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}$. Trecînd în (1) la module avem:

$$\left|\frac{f(x_n'') - f(x_0)}{x_n'' - x_0}\right| = \frac{1}{q_n^2|p_n - q_n\sqrt{k}|} \leqslant \frac{|p_n + q_n\sqrt{k}|}{q_n^2} = \frac{\left|\frac{p_n}{q_n} + \sqrt{k}\right|}{q_n} \leqslant \frac{M + \sqrt{k}}{q_n}.$$

Cum $q_n \to \infty$, rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(x_n'') - f(x_0)}{x_n'' - x_0} = 0$.

III). Fie acum un șir oarecare $x_n \to x_0$, $x_n \neq 0$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}^*$. Dacă (x_n) are numai un număr finit de termeni raționali, sau numai un număr finit de termeni iraționali, atunci practic ajungem la unul din cazurile I) sau II)

(începînd de la un anumit rang). Să presupunem că (x_n) are o infinitate de termeni raționali și o infinitate de termeni iraționali; fie (x'_{n_s}) subșirul termenilor raționali și (x''_{n_t}) subșirul termenilor iraționali. Atunci:

$$\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}=\begin{cases}0 \text{ dacă } x_n=x'_{n_s}\\ \dfrac{f(x''_{n_t})-f(x_0)}{x''_{n_t}-x_0} \text{ dacă } x_n=x''_{n_t}, \text{ deci}\end{cases}$$

$$\left|\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}\right|\leqslant\left|\frac{f(x''_{n_t})-f(x_0)}{x''_{n_t}-x_0}\right| \text{ și aplicînd cazul II)}$$

rezultă $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}=0.$

Cu aceasta am arătat că $f'(\sqrt{k})$ există și este egală cu 0.

ON 42. *Se consideră funcția* $P\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ *de forma*

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0 \text{ unde } a_i\in\mathbf{R},\ i=\overline{0,\ n}.$$

Să se arate că există $c\in(0,\ 1)$ *astfel ca*

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{k+1}=P(c).$$

A. Coța, Olimpiada județeană, 1978

Soluție. Aplicăm teorema de medie funcției P pe intervalul $[0,\ 1]$, deci există $c\in(0,\ 1)$ astfel încît

$$\int_0^1 P(x)\,dx=P(c). \tag{1}$$

Dar $\int P(x)dx=\sum\limits_{k=0}^{n}a_k\dfrac{x^{k+1}}{k+1}+\mathcal{C}$, astfel că

$$\int_0^1 P(x)\,dx=\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{k+1}. \tag{2}$$

Relațiile (1) și (2) rezolvă problema.

ON 43. *Fie funcțiile* $f_n:[0,1]\to[0,\ 1]$, *unde* $f_1(x)=-x^2+2x$ *iar pentru* $(\forall)\ n\in\mathbf{N}$ *și* $n\geqslant 2$, $f_n(x)=f_1(f_{n-1}(x))$, $(\forall)\ x\in[0,\ 1]$. *Să se demonstreze că pentru orice valoare a lui* $x\in[0,\ 1]$, *șirul* $(f_n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ *este convergent și să se reprezinte grafic funcția* $f\colon[0,\ 1]\to[0,\ 1]$ *definită prin* $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$, $(\forall)\ x\in[0,\ 1]$.

Pal Dalyai, Olimpiada județeană, 1977

Soluție. Fie $x \in [0, 1]$ fixat. Deoarece $0 \leqslant f_n(x) \leqslant 1$, șirul $(f_n(x))_{n \in N}$ este mărginit. Avem apoi:

$$f_n(x) - f_{n-1}(x) = f_1(f_{n-1}(x)) - f_{n-1}(x) = -f_{n-1}^2(x) + 2f_{n-1}(x) - f_{n-1}(x) =$$

$$= f_{n-1}(x) - f_{n-1}^2(x) = f_{n-1}(x)[1 - f_{n-1}(x)] \geqslant 0 \text{ deci } f_{n-1}(x) \leq f_n(x),$$

adică șirul $(f_n(x))_{n \in \mathbf{N}}$ este crescător. Fiind monoton și mărginit, este convergent. În relația $f_n(x) = -f_{n-1}^2(x) + 2f_{n-1}(x)$ făcînd $n \to \infty$ și notînd $L = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$, obținem $L = -L^2 + 2L$, de unde $L = 0$ sau $L = 1$. Deoarece șirul este crescător, avem $L \geqslant f_n(x)$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}$. Dacă $x \in (0, 1]$, este clar că $f_1(x) > 0$, deci $L \geqslant f_1(x) > 0$, adică neapărat $L = 1$.
Dacă însă $x = 0$, prin inducție se arată ușor că $f_n(0) = 0$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}$, deci în acest caz $L = 0$. Așadar funcția f căutată (sau cum am notat-o mai sus cu L) va fi $f: [0, 1] \to [0, 1]$,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } x = 0 \\ 1 & \text{dacă } x \in (0, 1]. \end{cases}$$

Graficul său se trasează imediat.

ON 44. *Să se arate că o funcție* $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *pentru care* $f(x) \in \mathbf{Q} \Leftrightarrow f(x + 1) \notin \mathbf{Q}$, are cel puțin un punct de discontinuitate.

L. Panaitopol și *H. Pop*, Olimpiada pe țară, 1979

Soluție. Să presupunem prin absurd că f este continuă. Definim funcția $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(x) = f(x + 1) - f(x)$, care va fi atunci o funcție continuă. Dar observăm că $g(x) \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$.
Dar $g((-\infty, \infty)) =$ interval și atunci trebuie ca acest interval să fie redus la un punct (irațional). Așadar $(\exists)\ \alpha \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$ astfel încît

$$g(x) = \alpha,\ (\forall)\ x \in \mathbf{R} \text{ sau } f(x + 1) - f(x) = \alpha,\ (\forall)\ x \in \mathbf{R}. \tag{1}$$

Să alegem $x_0 \in \mathbf{R}$ astfel ca $f(x_0) \in \mathbf{Q}$.
Din ipoteză rezultă $f(x_0 + 1) \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$ și apoi $f(x_0 + 2) \in \mathbf{Q}$. Din (1) avem

$$f(x_0 + 1) - f(x_0) = \alpha,\ f(x_0 + 2) - f(x_0 + 1) = \alpha$$

de unde, prin adunare: $f(x_0 + 2) - f(x_0) = 2\alpha$, care este o contradicție, deoarece membrul stîng este rațional, iar cel drept este irațional.

Capitolul VII

PROBLEME PREGĂTITOARE PENTRU OLIMPIADE INTERNAȚIONALE (O.I.M)

Introducere

Inițierea olimpiadelor internaționale revine Societății de Științe Matematice din R.S. România, prima dintre aceste competiții, avînd loc în țara noastră în 1959. La început au participat numai țări socialiste, dar începînd din 1968 s-au alăturat și alte țări, astfel încît numărul țărilor participante, în ultimii ani, este mai mare de douăzeci. Ca urmare, competițiile devin din ce în ce mai grele, necesitînd o pregătire intensă și multilaterală, cu atît mai mult cu cît programul lor este diferit de cel al olimpiadelor noastre naționale. În particular, ca nivel de cunoștințe nu se trece peste cel al clasei a X-a, dar în schimb dificultățile prezentate de probleme pot fi adesea inedite și surprinzătoare. După cum se știe concurenții români au reușit în primii ani să asigure țării noastre locuri de frunte, apoi a urmat o epocă mai puțin satisfăcătoare, ca urmare a lărgirii numărului de țări participante, ceea ce a adus în programe și probleme de facturi noi. În ultimii ani însă, țara noastră a reușit performanțe excelente, ocupînd în 1978 primul loc la concursul desfășurat în România, apoi locul II la concursul de la Londra în 1979. În ultimii doi ani participîndu-se cu un număr mai redus de concurenți, clasificarea s-a făcut individual, ceea ce ne-a adus succese frumoase în anul 1983 la Paris. întreaga echipă obținînd premii I, II și III.

Capitolul pe care îl consacrăm pregătirii pentru olimpiade internaționale nu conține probleme, care au fost date la aceste concursuri, ci numai probleme apărute în G.M. de autori români, cu excepția uneia singure. Considerăm că prin culegerile de probleme date la astfel de olimpiade, unele traduse în

limba română, cititorul se poate documenta singur, iar culegerea noastră nu preia probleme cu soluții gata elaborate în nici unul dintre capitole.

Teoria numerelor ocupă cea mai mare parte, avînd în vedere varietatea metodelor și a temelor; ceea ce am căutat este stabilirea unor conexiuni cu probleme de algebră, analiză sau geometrie ca în (OIM 6), (OIM 11), (OIM 13) sau (OIM 140). Indicatorul lui Euler apare în (OIM 15), (OIM 17), (OIM 16) și poate apărea oricînd în probleme de olimpiade internaționale. Probleme de numere prime sînt, de exemplu, în (OIM 18) sau (OIM 24), iar de reprezentare de numere naturale în (OIM 19) și (OIM 10).

Algebra, oferă probleme clasice ca (OIM 7) și (OIM 8) semnate de *V. Vâlcovici*, precum și probleme de divizibilitate în inele de polinoame ca (OIM 4), de proprietăți ale matricelor ca (OIM 3) sau de reprezentări ale numerelor naturale ca sume de numere naturale mai mari sau egale cu n, cum apar în (OIM 1). Cele trei probleme de geometrie privesc proprietăți ale patrulaterului inscriptibil, respectiv ale cercului înscris într-un triunghi oarecare și ale perechilor de puncte conjugate armonic. Ele dau loc la comentarii care pun în lumină caracterul lor competițional.

Cititorul își va completa fondul de probleme adecvat urmărind unele probleme și din alte capitole cum este cel privitor la probleme care suscită alte probleme sau din partea a II-a a culegerii, consacrată problemelor selecționate din reviste din alte țări.

OIM 1. *Arătați că oricare ar fi* $n \in \mathbf{N}^*$, *nu există două funcții injective* $f, g : \{n, n+1, n+2, ...\} \to \mathbf{N}^*$ *astfel încît* $f(k) + g(k) = k$, *pentru orice* $k \geqslant n$.

Dan Tomescu, G. M. Metodică, 2/1980

Soluție. Să presupunem prin absurd că există $n \in \mathbf{N}^*$ și f, g: $\{n, n+1, n+2, ...\} \to \mathbf{N}^*$ injective cu proprietatea din enunț, adică $f(k) + g(k) = k$ pentru orice $k \geqslant n$. Atunci $f(k) < k$, $g(k) < k$, $(\forall)\ k \geqslant n$. Fie $k_0 > n$ și $k_1 = n + 2k_0$. Deoarece $n + k_0 = \frac{2n + 2k_0}{2} = \frac{n + k_1}{2}$, rezultă că $f(n+t) < n + t \leqslant \frac{n + k_1}{2}$ și $g(n+t) < n + t \leqslant \frac{n + k_1}{2}$ pentru orice $0 \leqslant t \leqslant k_0$. Considerăm mulțimile $F = f(\{n + k_0 + 1, ..., n + k_1\})$ și $G = g(\{n + k_0 + 1, ..., n + k_1\})$. Deoarece f și g sînt injective, rezultă:

$$\text{Card } F = \text{Card } G = k_1 - k_0 = n + k_0.$$

Din relația $f(k) + g(k) = k$ deducem că $f(k) \leqslant \left[\frac{k}{2}\right]$ sau $g(k) \leqslant \left[\frac{k}{2}\right]$, $(\forall)\ k \in \{n + k_0 + 1, ..., n + k_1\}$. Din aceste inegalități, rezultă că cel puțin una din mulțimile F și G are mai mult de jumătate, adică cel puțin $\left[\frac{n + k_0}{2}\right]$

elemente, mai mici sau egale cu $\left[\frac{n+k_1}{2}\right]$. Presupunem că F are această proprietate și fie F' submulțimea lui F formată din elementele mai mici sau egale cu $\left[\frac{n+k_1}{2}\right]$. Avem Card $F' \geqslant \left[\frac{n+k_0}{2}\right]$. Fie $F_0 = f(\{n, +1, ..., n+k_0\})$ și $F_1 = F' \cup F_0$. Putem scrie:

$$\text{Card}\, F_1 = \text{Card}\, F' + \text{Card}\, F_0 \geqslant k_0 + 1 + \left[\frac{n+k_0}{2}\right] > k_0 + \frac{n+k_0}{2}. \qquad (1)$$

Dar $F_1 \subset \left\{1, 2, ..., \left[\frac{n+k_1}{2}\right]\right\}$, deci

$$\text{Card}\, F_1 \leqslant \left[\frac{n+k_1}{2}\right]. \qquad (2)$$

Aceasta este o contradicție, deoarece din faptul că $k_0 > n$, obținem $\left[\frac{n+k_1}{2}\right] = k_0 + n < k_0 + \frac{n+k_0}{2}$, ceea ce face ca (1) și (2) să devină incompatibile.

OIM 2. *Să se demonstreze că, oricare ar fi* $n \in \mathbf{N}^*$, *avem relația* $\sum_{k=1}^{n} \left[\log_k \frac{n}{x}\right] = \left[\frac{n}{k}\right]$, *unde* $k \in \mathbf{N}^* \setminus \{1\}$ *și* $x \in \mathbf{N}^*$, $x \not\equiv 0 \pmod{k}$.

Andras Nemethy, G. M. 11/1980

Soluție. Fiecărui element $x \in \{1, 2, ..., n\}$, $x \not\equiv 0 \pmod{k}$ îi corespunde o submulțime $A_x \subset \{1, 2, ..., n\}$, definită astfel:

$$A_x = \{y \mid 1 \leqslant y \leqslant n \text{ și } (\exists)\ \alpha \geqslant 0 \text{ cu } y = k^\alpha \cdot x\}.$$

Din $k^\alpha \cdot x \leqslant n$ rezultă $\alpha \leqslant \log_k \frac{n}{x}$, adică $\alpha = 0, 1, 2, ..., \left[\log_k \frac{n}{x}\right]$, ceea ce înseamnă că mulțimea A_x are $\left[\log_k \frac{n}{x}\right] + 1$ elemente. Avem egalitatea

$$\bigcup_{\substack{x=1 \\ x \not\equiv 0 \pmod{k}}}^{n} A_x = \{1, 2, ..., n\}. \qquad (1)$$

În adevăr, prima incluziune este evidentă, iar pentru a stabili cealaltă incluziune este suficient să observăm că fiecare număr $y \in \{1, 2, ..., n\}$ se scrie în mod unic sub forma $y = k^\alpha \cdot x$ cu $\alpha \geqslant 0$ și $x \not\equiv 0 \pmod{k}$, ceea ce arată că $y \in A_x$.

Trecînd la cardinale în (1), avem

$$n = \sum_{\substack{x=1 \\ x \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\ k)}}^{n} \left(1 + \left[\log_k \frac{n}{x}\right]\right),$$

de unde

$$\sum_{\substack{x=1 \\ x \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\ k)}} \left[\log_k \frac{n}{x}\right] = n - \sum_{\substack{x=1 \\ x \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\ k)}} 1 = n - \left(n - \sum_{\substack{x=1 \\ x \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\ k)}}^{n} 1\right) = \left[\frac{n}{k}\right],$$

unde am ținut seama că multiplii lui k cuprinși între 1 și n sînt în număr de $\left[\frac{n}{k}\right]$.

OIM 3. *Fie A și B două matrici pătrate de același ordin k ($k \in \mathbf{N}^*$). Să se demonstreze că dacă*

$$det(A + nB) = det(nA + B)$$

pentru cel puțin $k + 1$ valori distincte ale numărului natural $n > 1$, atunci $det\ (A) = det\ (B)$.

D. Bușneag, G. M. 4/1982

Soluție. Să considerăm polinomul în nedeterminata X:

$$f(X) = \det (A + XB) - \det (XA + B).$$

Acest polinom are gradul cel mult k (matricile sînt de ordinul k și se ține seama de produsele care apar în definiția unui determinant). Avînd însă cel puțin $k + 1$ rădăcini distincte (și anume valorile lui n din ipoteză), deducem că f este polinomul nul. Atunci funcția polinomială asociată

$$f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = \det (A + xB) - \det (xA + B)$$

este funcția nulă, adică $f(x) = 0$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$. Făcînd $x = 0$ obținem $f(0) = 0$, adică $\det (A) = \det (B)$.

OIM 4. *Fie f, g polinoame nenule cu coeficienți întregi, astfel încît $f(n)$ se divide cu $g(n)$, $(\forall)$, $n \in \mathbf{N}$. Să se arate că f se divide cu g în inelul $\mathbf{Q}[X]$.*

Marcel Țena și *Șerban Mihăescu*, G. M. 6/1983

Soluție. În inelul $\mathbf{Q}[X]$ funcționează teorema împărțirii cu rest, deci există polinoamele q, $r \in \mathbf{Q}[X]$ astfel încît

$$f = gq + r \text{ și } \operatorname{grad} r < \operatorname{grad} g. \tag{1}$$

Atunci $f(n) = g(n)q(n) + r(n)$, $(\forall)n \in \mathbf{N}$; alegînd $n_0 \in \mathbf{N}$ mai mare decît toate rădăcinile reale ale lui g, vom avea $g(n) \neq 0$, $(\forall)\ n \geqslant n_0$ astfel că împărţind cu $g(n)$ în egalitatea precedentă, putem scrie:

$$\frac{f(n)}{g(n)} = g(n) + \frac{r(n)}{g(n)}, \qquad (\forall)\ n \geqslant n_0. \tag{2}$$

Fie $k \in \mathbf{N}$ cel mai mic multiplu comun al numitorilor coeficienţilor polinomului q, deci $q = \frac{1}{k} q_1$, unde $q_1 \in \mathbf{Z}[X]$ (şi facem observaţia că numărul k depinde doar de polinomul q şi nu de n). Notînd cu $a(n)$ restul împărţirii lui $q_1(n)$ prin k avem $0 \leqslant a(n) \leqslant k - 1$ şi $q_1(n) = \mathcal{M}k + a(n)$, astfel că înlocuind în (2) obţinem:

$$\frac{f(n)}{g(n)} = \frac{1}{k} q_1(n) + \frac{r(n)}{g(n)} = \frac{1}{k}[\mathcal{M}k + a(n)] + \frac{r(n)}{g(n)}, \qquad (\forall)\ n \geqslant n_0.$$

Cum din ipoteză, $\frac{f(n)}{g(n)} \in \mathbf{Z}$, din relaţia precedentă rezultă

$$\frac{a(n)}{k} + \frac{r(n)}{g(n)} \in \mathbf{Z}, \qquad (\forall)\ n \geqslant n_0. \tag{3}$$

Dar cum $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{r(n)}{g(n)} = 0$, există $n_1 \in \mathbf{N}$, astfel că

$$-\frac{1}{k} < \frac{r(n)}{g(n)} < \frac{1}{k}, \qquad (\forall)\ n \geqslant n_1.$$

Atunci

$$-1 \leqslant -\frac{1}{k} < \frac{r(n)}{g(n)} \leqslant \frac{a(n)}{k} + \frac{r(n)}{g(n)} < \frac{k-1}{k} + \frac{1}{k} = 1,$$

adică $-1 < \frac{a(n)}{k} + \frac{r(n)}{g(n)} < 1$, $(\forall)\ n \geqslant n_1$. Notînd $n_2 = \max(n_0, n_1)$, rezultă din (3) şi din inegalitatea precedentă:

$$\frac{a(n)}{k} + \frac{r(n)}{g(n)} = 0, \qquad (\forall)\ n \geqslant n_2$$

sau

$$\frac{r(n)}{g(n)} = -\frac{a(n)}{k}, \qquad (\forall)\ n \geqslant n_2 \tag{4}$$

Cum $-\frac{1}{k} < \frac{r(n)}{g(n)} < \frac{1}{k}$, ținînd cont de (4) avem

$$-\frac{1}{k} < -\frac{a(n)}{k} < \frac{1}{k}, \text{ adică } -1 < a(n) < 1, \text{ deci}$$

$$a(n) = 0, \ (\forall)\ n \geqslant n_2.$$

Din (4) rezultă atunci $r(n) = 0$, $(\forall)\ n \geqslant n_2$. Așadar polinomul r are o infinitate de rădăcini, ceea ce înseamnă că este polinomul nul. Din (1) rezultă atunci $f = gq$, relație ce există în inelul $\mathbf{Q}[X]$. Există efectiv situații în care polinomul q nu are coeficienți întregi, de exemplu:

$$f = X(X+1)(X+2),\ g = 2X \Rightarrow q = \frac{1}{2}X^2 + \frac{3}{2}X + 1.$$

OIM5. *Fie* $u, v \in \mathbf{Z}_p[Z]$, $u(Z) = Z^{p^t}$, $v(Z) = Z - w(Z^p)$ *cu* $w \in \mathbf{Z}_p[Z]$, *unde* p *este număr prim, iar* $t \in \mathbf{N}$. *Arătați că există un polinom* $g \in \mathbf{Z}_p[X, Y]$ *astfel încît* $g(u(Z), v(Z)) = Z$.

Doru Ștefănescu, G. M. Metodică, 2/1980

Soluție. Fie $w(Z) = \sum_{i=0}^{n} a_i Z^i$, cu $a_n \neq 0$, deci $v(Z) = Z - \sum_{i=0}^{n} a_i Z^{p^i}$. Fie de asemenea $g_j \in \mathbf{Z}_p[X, Y]$, definit prin $g_j(X, Y) = Y^{p^j} + \sum_{i=0}^{n} a_i^{p^j} X^j$, pentru orice $j = 0, 1, 2, \ldots$.

Ridicînd v la puterea p^j obținem $v^{p^j} = Z^{p^j} - \sum_{i=0}^{n} a_i^{p^j} (Z^{p^{j+1}})^i$, de unde

$$Z^{p^j} = g_j(Z^{p^{j-1}}, v) \text{ pentru } j = 0, 1, 2, \ldots .$$

Deoarece $u = Z^{p^t}$ rezultă că polinomul $g \in \mathbf{Z}_p[X, Y]$, definit prin $g(X, Y) = g_0(g_1(\ldots(g_{t-1}(X, Y), Y), \ldots,), Y)$ satisface relația

$$Z = g(u(Z), v(Z)).$$

(În calculele efectuate s-a ținut seama peste tot de formula $(\alpha + \beta)^p = \alpha^p + \beta^p$, $(\forall)\ \alpha, \beta \in \mathbf{Z}_p$).

OIM 6. *Fie* m, n *numere naturale impare și polinomul* $P_{n,m}(x) = (x-1)^n(x+1)^m = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n+m}x^{n+m}$. *Notăm cu* $c_{n,m}$ *numărul coeficienților* a_i, $i \in \{0, 1, 2, \ldots, n+m\}$ *nuli, ai polinomului* $P_{n,m}$.

a) *Să se arate că $c_{n,m}$ este număr natural impar;*

b) *Fie $m, n \geq 3$. Atunci condiția $n = m$ este suficientă pentru ca să avem inegalitatea $c_{n,m} \geq 3$. Este această condiție și necesară pentru inegalitatea respectivă?*

Marcel Țena, G. M. 12/1979

Soluție. a) Pentru orice $x \in \mathbf{R}^*$ avem

$$P\left(\frac{1}{x}\right)=\left(\frac{1}{x}-1\right)^n\left(\frac{1}{x}+1\right)^m=-\frac{P(x)}{x^{n+m}} \Leftrightarrow x^{n+m}P\left(\frac{1}{x}\right)=-P(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^{n+m}\sum_{i=0}^{n+m}a_i\frac{1}{x^i}=-\sum_{i=0}^{n+m}a_ix^i \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n+m}a_ix^{n+m-i}=-\sum_{i=0}^{n+m}a_ix^i,$$

de unde prin identificare obținem: $a_{n+m-j}=-a_j$, $(\forall)\, j \in \{0, 1, 2, ..., n+m\}$. Luînd $j=\frac{n+m}{2}$, obținem $a_{\frac{n+m}{2}}=-a_{\frac{n+m}{2}}$, de unde $a_{\frac{n+m}{2}}=0$.

Acum, dacă pentru un indice $j \in \left\{0, 1, 2, ..., \frac{n+m}{2}-1\right\}$ avem $a_j=0$, rezultă că pentru $k=n+m-j \in \left\{\frac{n+m}{2}+1, \frac{n+m}{2}+2, ..., n+m\right\}$ vom avea de asemenea $a_k=0$. Prin urmare fiecărui coeficient nul de indice $j \in \left\{0, 1, 2, ..., \frac{n+m}{2}-1\right\}$ îi corespunde un coeficient nul de indice $k \in \left\{\frac{n+m}{2}+1, \frac{n+m}{2}+2, ..., n+m\right\}$ și invers. Ținînd seama și de faptul că $a_{\frac{n+m}{2}}=0$, rezultă că avem un număr impar de coeficienți nuli, adică $c_{n,m}$ este impar.

b) Dacă $n=m$, atunci $P_{n,n}(x)=(x^2-1)^n$, care conține pe x numai la puteri pare. Deci coeficienții termenilor în x, x^3, x^5, ..., x^{2n-1} sînt nuli și aceștia sînt în număr de n. Avem deci $c_{n,m}=n \geq 3$ și prin urmare condiția $n=m$ este suficientă pentru a avea $c_{n,m} \geq 3$. Vom arăta că această condiție nu este necesară, mai precis arătăm că există $P_{n,m}$ cu $n \neq m$ astfel încît $c_{n,m} \geq 3$. Într-adevăr pentru $n=7$ și $m=15$ avem

$$P_{7,15}(x)=(x^2-1)^7(x+1)^8=(-1+C_7^1x^2-C_7^2x^4+...)(1+C_8^1x+$$

$$+C_8^2x^2+C_8^3x^3+...)=a_0+a_1x+...+a_{22}x^{22}$$

și dacă ținem seama de modul cum se fac înmulțirile, rezultă $a_3=0$ și conform celor de la punctul a) avem $a_{22-3}=a_{19}=0$ și $a_{22}=a_{11}=0$. Așadar $a_3=a_{11}=a_{10}=0$ și prin urmare $c_{7,15} \geq 3$.

OIM 7. *Să se demonstreze identitatea:*

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2i+1} \cdot \frac{(-1)^i}{i!(n-i)!} = 2^{2n} \frac{n!}{(2n+1)!}.$$

V. Vâlcovici, G. M. vol. XII

Soluție. Vom demonstra mai întîi identitatea

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i x}{(x+2i)i!\,(n-i)!} = \frac{2^n}{(x+2)(x+4)\ldots(x+2n)}, \tag{1}$$

valabilă pentru orice $x \in \mathbf{R} \setminus \{0, -2, -4, \ldots, -2n\}$.
Într-adevăr, să descompunem în fracții simple fracția

$$\frac{1}{(x+2)(x+4)\ldots(x+2n)}.$$

Avem

$$\frac{1}{(x+2)(x+4)\ldots(x+2n)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{x+2i}, \quad (\forall)\ x \in \mathbf{R} \setminus \{-2, -4, \ldots, -2n\}.$$

Înmulțind cu $x+2i$ și făcînd apoi $x \to -2i$ găsim

$$A_i = \frac{1}{(-2i+2)(-2i+4)\ldots(-2)\cdot 2\cdot 4\ldots(-2i+2n)} =$$

$$= \frac{1}{2^{n-1}(-1)^{i-1}(i-1)!\,(n-i)!} = \frac{(-1)^{i-1}}{2^{n-1}(i-1)!\,(n-i)!}.$$

Atunci

$$\frac{1}{(x+2)(x+4)\ldots(x+2n)} = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i-1}}{(x+2i)(i-1)!\,(n-i)!} =$$

$$= -\frac{1}{2^n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^i 2i}{(x+2i)i!(n-i)!} = -\frac{1}{2^n} \cdot \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i (x+2i-x)}{(x+2i)i!(n-i)!} =$$

$$= \frac{1}{2^n} \cdot \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i x}{(x+2i)i!\,(n-i)!} - \frac{1}{2^n} \cdot \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!\,(n-i)!} =$$

$$= \frac{1}{2^n} \cdot \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i x}{(x+2i)i!\,(n-i)!} - \frac{1}{2^n n!} \cdot \sum_{i=0}^{n} (-1)^i C_n^i =$$

$$= \frac{1}{2^n} \cdot \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i x}{(x+2i)i!\,(n-i)!} - \frac{1}{2^n n!} (1-1)^n =$$

$$= \frac{1}{2^n} \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i x}{(x+2i)i!\,(n-i)!},$$

de unde

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i x}{(x+2i)i!(n-i)!} = \frac{2^n}{(x+2)(x+4)\ldots(x+2n)},$$

adică (1).

Făcînd în (1) $x = 1$ obținem

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2i+1} \cdot \frac{(-1)^i}{i!(n-i)!} = \frac{2^n}{3.5\ldots(2n+1)} = \frac{2^n n!}{(2n+1)!},$$

adică egalitatea din enunțul problemei.

OIM 8. *Să se demonstreze identitatea*

$$\sum_{k=0}^{p-1} \sum_{i=k+1}^{p} [(-1)^{i+k}(C_n^{2i}C_n^{2k} + C_n^{2i+1}C_n^{2k+1})] = 2^{n-1} - \frac{1}{2} C_{2n}^{n},$$

unde n este un număr natural impar, iar $p = \left[\frac{n}{2}\right]$.

V. Vâlcovici, G. M. vol. XII

Soluție. Pentru n număr natural arbitrar, dacă ridicăm egalitatea $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4}\right) = 1 + i$ la puterea n, obținem

$$2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4}\right) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^k C_n^{2k} + i \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} (-1)^k C_n^{2k+1}.$$

În cazul în care n este impar, avem $\left[\frac{n}{2}\right] = \left[\frac{n-1}{2}\right] = p$, astfel că obținnm

$$2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4}\right) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k C_n^{2k} + i\sum_{k=0}^{p} (-1)^k C_n^{2k+1}.$$

Scriind egalitatea pătratelor modulelor celor două numere complexe ce intervin în cei doi membri, obținem

$$2^n = \left(\sum_{k=0}^{p} (-1)^k C_n^{2k}\right)^2 + \left(\sum_{k=0}^{p} (-1)^k C_n^{2k+1}\right)^2 =$$

$$= \sum_{k=0}^{p} (-1)^k C_n^{2k} \cdot \sum_{j=0}^{p} (-1)^j C_n^{2j} + \sum_{k=0}^{p} (-1)^k C_n^{2k+1} \cdot \sum_{j=0}^{p} (-1)^j C_n^{2j+1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{p} \sum_{j=0}^{p} (-1)^{k+j}(C_n^{2k}C_n^{2j} + C_n^{2k+1}C_n^{2j+1}). \qquad (1)$$

Scriind explicit suma dublă, aceasta va fi egală cu

$$(C_n^0C_n^0 + C_n^1C_n^1) - (C_n^0C_n^2 + C_n^1C_n^3) + (C_n^0C_n^4 + C_n^1C_n^5) - \ldots + (-1)^p(C_n^0C_n^{2p} +$$
$$+ C_n^1C_n^{2p+1}) - (C_n^2C_n^0 + C_n^3C_n^1) + (C_n^2C_n^2 + C_n^3C_n^3) - (C_n^2C_n^4 + C_n^3C_n^5) + \ldots +$$
$$+ (-1)^{p+1}(C_n^2C_n^{2p} + C_n^3C_n^{2p+1}) + (C_n^4C_n^0 + C_n^5C_n^1) - (C_n^4C_n^2 + C_n^5C_n^3) +$$
$$+ (C_n^4C_n^4 + C_n^5C_n^5) + \ldots + (-1)^{p+2}(C_n^4C_n^{2p} + C_n^5C_n^{2p+1}) +$$
$$\ldots\ldots\ldots

Împărțind prin $(-1)^n x^n$ și ținînd seama că $(-1)^{-k} = (-1)^k$, egalitatea precedentă se scrie

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k A_n^k A_{2n-k-1}^{n-k} = 0.$$

Înlocuind și $A_n^k = k!\, C_n^k$, obținem

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k k!\, (C_n^k)^2 A_{2n-k-1}^{n-k} = 0.$$

OIM 10. *Să se demonstreze că, fiind date două numere naturale oarecare N și r, există numerele întregi $b_1, b_2, \ldots, b_r$ unic determinate prin condițiile:*

a) $b_1 > b_2 > \ldots > b_r \geqslant 0$;

b) $N = C_{b_1}^r + C_{b_2}^{r-1} + \ldots + C_{b_r}^1$ *unde* $C_p^q = 0$ *dacă* $q > p$.

I. Tomescu, G. M. 1/1978

Soluție. Valorile $b_1, b_2, \ldots, b_r$ se obțin în modul următor: Fie b_1 cel mai mare întreg x, care verifică inegalitatea $N \geqslant C_x^r$. Cu b_2 vom nota cel mai mare întreg x astfel încît $N - C_{b_1}^r \geqslant C_x^{r-1}$ etc. Cu b_r vom nota diferența $N - (C_{b_1}^r + C_{b_2}^{r-1} + \ldots + C_{b_{r-1}}^2) = C_{b_r}^1 = b_r$. Să arătăm că $b_1 > b_2$, restul inegalităților $b_2 > b_3 > \ldots > b_r$ demonstrîndu-se în același mod. Faptul că $b_r \geqslant 0$ rezultă din definiția lui b_{r-1}.

Obținem

$$C_{b_1+1}^r > N \text{ și de asemenea } N - C_{b_1}^r \geqslant C_{b_2}^{r-1},$$

deci putem scrie

$$C_{b_1+1}^r - C_{b_1}^r > C_{b_2}^{r-1}, \text{ adică } C_{b_1}^{r-1} > C_{b_2}^{r-1}.$$

Această inegalitate implică $b_1 > b_2$, ținînd seama de definiția combinărilor. Să arătăm acum unicitatea unei asemenea scrieri.

Să presupunem prin reducere la absurd că mai există o scriere distinctă de cea dată în enunț a lui N ca sumă de combinări:

$$C_{b_1}^r + C_{b_2}^{r-1} + \ldots + C_{b_r}^1 = C_{\beta_1}^r + C_{\beta_2}^{r-1} + \ldots + C_{\beta_r}^1 \qquad (1)$$

unde $(b_1, b_2, \ldots, b_r) \neq (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r)$.

Putem presupune de exemplu că $b_1 > \beta_1$, deoarece dacă $b_1 = \beta_1$ termenii corespunzători pot fi reduși și se repetă același procedeu pentru b_2 și β_2. Deoarece $\beta_1 > \beta_2 > \ldots \beta_r \geqslant 0$ rezultă că $\beta_1 - i \geqslant \beta_{i+1}$ pentru $i = 1, 2, \ldots, r-1$ și deci:

$$C_{\beta_1}^r + C_{\beta_2}^{r-1} + \ldots + C_{\beta_r}^1 \leqslant C_{\beta_1}^r + C_{\beta_1-1}^{r-1} + \ldots + C_{\beta_1-(r-1)}^1.$$

Ținînd seama de (1) această ultimă inegalitate implică:

$$C_{b_1}^r \leqslant C_{\beta_1}^r + C_{\beta_1}^{r-1} + \ldots + C_{\beta_1}^1. \qquad (2)$$

Deoarece $b_1 \geqslant \beta_1 + 1$, obținem $C_{b_1}^r \geqslant C_{\beta_1+1}^r$ și deci inegalitatea (2) implică

$$C_{\beta_1+1}^r \leqslant C_{\beta_1}^r + C_{\beta_1}^{r-1} + \ldots + C_{\beta_1}^1. \qquad (3)$$

Însă aplicînd relația de recurență a numerelor binomiale, deducem:

$$C_{\beta_1+1}^r = C_{\beta_1}^r + C_{\beta_1}^{r-1} = C_{\beta_1}^r + C_{\beta_1}^{r-1} + C_{\beta_1}^{r-2} = \ldots =$$
$$= C_{\beta_1}^r + C_{\beta_1}^{r-1} + \ldots + C_{\beta_1}^1 + C_{\beta_1}^0,$$

ceea ce contrazice inegalitatea (3). Deci valorile b_1, b_2, ..., b_r sînt unic determinate și proprietatea este demonstrată.

OIM 11. *Fie p un număr prim. Să se arate că numărul termenilor din șirul numerelor binomiale C_n^0, C_n^1, ..., C_n^n, care sînt multipli de p este egal cu*

$$n + 1 - (n_1 + 1)(n_2 + 1) \ldots (n_k + 1),$$

unde n_1, n_2, ..., n_k sînt cifrele scrierii lui n în baza p. Să se deducă proprietatea că pentru $n = 2^k - 1$ toți termenii șirului dat sînt numere impare.

I. Tomescu, G. M. 4/1983

Soluție. Folosim proprietatea exprimată de problema 2 de la barajul III din 31 mai 1982 (Gazeta Matematică nr. 9—10/1982, p. 395—396) și anume dacă notăm $f(n) = \dfrac{n(n-1)\ldots(n-a+1)}{a!} \pmod p$ și $a = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \ldots$, $n = n_0 + n_1 p + n_2 p^2 + \ldots$ sînt scrierile în baza p ale lui a și $n (0 \leqslant a_i, n_i \leqslant p-1)$, atunci $f(n) \neq 0$, dacă și numai dacă $n_i \geqslant a_i$ pentru $i = 0, 1, 2, \ldots$. Rezultă că numărul C_n^a nu este multiplu de p, dacă și numai dacă $n_i \geqslant a_i$. Deducem că numărul termenilor, care nu sînt multipli de p, este tocmai cardinalul mulțimii

$$\{a \mid a = a_0 + a_1 p + \ldots + a_k p^k;\ a_0 \leqslant n_0,\ a_1 \leqslant n_1, \ldots, a_k \leqslant n_k\}$$

adică $(n_0 + 1)(n_1 + 1) \ldots (n_k + 1)$, deoarece a_0 poate lua $n_0 + 1$ valori (și anume 0, 1, ..., n_0) a_1 poate lua $n_1 + 1$ valori (și anume 0, 1, ..., n_1), ..., iar a_k poate lua $n_k + 1$ valori (și anume 0, 1, ..., n_k). Ținînd seama că în enunț cifrele scrierii în baza p s-au notat cu n_1, n_2, ..., n_k, rezultă că există $\prod_{i=1}^{k} (n_i + 1)$ numere, care nu sînt multipli de p, deci numărul multiplilor de p este tocmai $n + 1 - \prod_{i=1}^{k} (n_i + 1)$.

Dacă n este de forma $n = 2^k - 1 = 2^{k-1} + 2^{k-2} + \ldots + 2 + 1$, rezultă că

$n + 1 - \prod_{i=1}^{k} (n_i + 1) = 2_k - 2_k = 0$, deoarece $n_i = 1$ pentru orice $1 \leqslant i \leqslant k$; astfel în acest caz toți termenii șirului numerelor binomiale sînt nedivizibili cu 2, adică sînt impari.

OIM 12. *Să se arate că numărul de scrieri ale întregului n sub forma*

$$n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k,$$

unde $n_1, n_2, \ldots, n_k$ *sînt numere întregi mai mari sau egale cu 2, două scrieri deosebindu-se și prin ordinea termenilor, este egal cu*

$$C_{n-1}^{k-1} - C_k^1 C_{n-2}^{k-2} + C_k^2 C_{n-3}^{k-3} - \ldots + (-1)^{k-1} k.$$

Ce devine această expresie pentru $n = 2k$?

I. Tomescu, G. M., 7/1981

Soluție. Să considerăm sumele parțiale $s_1 = n_1$, $s_2 = n_1 + n_2$, ..., $s_{k-1} = n_1 + \ldots + n_{k-1}$. Aceste sume parțiale permit reconstituirea scrierii lui n în mod unic, deoarece $n_1 = s_1$; $n_2 = s_2 - s_1$; ...; $n_l = s_l - s_{l-1}$; ...; $n_k = n - s_{k-1}$. Se observă că există o bijecție între mulțimea scrierilor lui n de forma $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$, unde $n_1, \ldots, n_k \geqslant 1$ și mulțimea „cuvintelor" strict crescătoare de forma

$$1 \leqslant s_1 < s_2 < \ldots < s_{k-1} \leqslant n - 1.$$

Deci numărul de scrieri, în care $n_i \geqslant 1$, este egal cu C_{n-1}^{k-1}.
Să notăm cu A_i mulțimea scrierilor lui n de forma indicată, pentru care $n_k = 1$. Rezultă, aplicînd principiul includerii și al excluderii, că numărul căutat este egal cu:

$$C_{n-1}^{k-1} - \operatorname{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) = C_{n-1}^{k-1} - \sum_{i=1}^{k} \operatorname{Card} A_i + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant k} \operatorname{Card}(A_i \cap A_j) - \ldots$$

Dar $\sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leqslant k} \operatorname{Card}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_p})$ conține C_p^k ermeni, deoarece indicii $i_1, \ldots, i_p$ pot fi aleși în C_k^p moduri. Dacă în suma $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ există exact p termeni egali cu 1, suma celor $k - p$ termeni rămași (care sînt mai mari sau egali cu 2) este egală cu $n - p$; deci $\operatorname{Card}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_p}) = C_{n-p-1}^{k-p-1}$ pentru orice $1 \leqslant p \leqslant k$, numărul de elemente din această intersecție nedepinzînd de alegerea celor p indici $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leqslant k$.
Rezultă că numărul căutat este egal cu:

$$C_{n-1}^{k-1} - C_k^1 C_{n-2}^{k-2} + C_k^2 C_{n-3}^{k-3} - \ldots + (-1)^{k-1} C_k^{k-1} C_{n-k}^{k-k} =$$

$$= C_{n-1}^{k-1} - C_k^1 C_{n-2}^{k-2} + C_k^2 C_{n-3}^{k-3} - \ldots + (-1)^{k-1} k.$$

Pentru $n = 2k$ se obține o singură scriere a lui n ca sumă de k termeni, care sînt egali cu 2, deci deducem identitatea:

$$C_{2k-1}^{k-1} - C_k^1 C_{2k-2}^{k-2} + C_k^2 C_{2k-3}^{k-3} - \ldots + (-1)^{k-1} C_k^{k-1} = 1.$$

OIM 13. *Se consideră mulțimea A a șirurilor $s = (s_1, s_2, \hat{\imath}., s_k)$ formate din k numere întregi astfel încît $0 \leqslant s_i \leqslant n$ pentru $i = 1, 2, \ldots, k$ și se notează $m(s) = \min \{s_1, s_2, \ldots, s_k\}$ respectiv $M(s) = \max \{s_1, s_2, \ldots, s_k\}$. Să se arate că:*

$$\sum_{s \in A} [m(s) + M(s)] = n(n+1)^k.$$

Ion Tomescu, G. M. 8/1981

Soluție. Observăm că șirul $s = (s_1, s_2, \ldots, s_k)$ se identifică cu funcția $s: \{1, 2, \ldots, k\} \to \{0, 1, \ldots, n\}$ definită prin $s(1) = s_1$, $s(2) = s_2, \ldots, s(k) = s_k$. Atunci mulțimea A este mulțimea tuturor funcțiilor $s: \{1, 2, \ldots, k\} \to \{0, 1, \ldots, n\}$ și deci $\operatorname{Card} A = (n+1)^k$. Mai observăm că fiecărui șir $s = (s_1, s_2, \ldots, s_k) \in A$ îi putem asocia șirul $s' = (n - s_1, n - s_2, \ldots, n - s_k) \in A$ și această asociere este o bijecție de la A la A. Avem în mod evident $M(s') = n - m(s)$ și atunci putem scrie:

$$\sum_{s \in A} [m(s) + M(s)] = \sum_{s \in A} m(s) + \sum_{s \in A} m(s) = \sum_{s \in A} m(s) + \sum_{s' \in A} M(s') =$$

$$= \sum_{s \in A} m(s) + \sum_{s \in A} [n - m(s)] = \sum_{s \in A} n = n \operatorname{Card} A = n(n+1)^k.$$

OIM 14. *Să se arate că*

$$\pi(n! + 2n) + \pi(n) \leqslant \pi(n! + n) + \pi(2n)$$

unde $\pi(x)$ reprezintă numărul numerelor prime cel mult egale cu x.

L. Panaitopol, G. M.-A. 12/1970

Soluție. Fie $A = \{n, n+1, n+2, \ldots, 2n\}$, $B = \{n!+n, n! + n+1, n!+n+2, \ldots, n! + 2n\}$ și să considerăm bijecția $f: A \to B$, $f(x) = x + n!$.
Fie x un număr compus din mulțimea A, deci x admite un divizor propriu k. Evident, $k \leqslant n$. Atunci $f(x) = x + n!$ se va divide cu k, deoarece fiecare termen este multiplu de k și astfel $f(x)$ este număr compus. Așadar prin bijecția f toate numerele compuse din mulțimea A sînt „transportate" în numere compuse din mulțimea B, ceea ce arată că B are mai multe numere compuse decît A. Rezultă că B are mai puține numere prime decît A. Dar numărul numerelor prime din B este $\pi(n! + 2n) - \pi(n! + n)$, iar al celor din A este $\pi(2n) - \pi(n)$. Rezultă

$$\pi(n! + 2n) - \pi(n! + n) \leqslant \pi(2n) - \pi(n),$$

adică inegalitatea din enunț.

OIM 15. *Fie* $m \in \mathbf{N}^*$. *Să se calculeze suma*

$$\sum_{d \mid m} \frac{m}{d} \varphi(d),$$

unde sumarea se face după toți divizorii naturali ai lui m *(inclusiv* 1 *și* m*), iar* φ *este indicatorul lui Euler (cu convenția* $\varphi(1) = 1$*).*

M. Filip, G. M. vol. XI

Soluție. Fie $m = p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \ldots, p_k^{\alpha_k}$ numărul dat și fie S suma cerută. Să vedem ce modificare suferă S, dacă se înmulțește m cu o putere a unui număr prim ce nu intră în descompunerea canonică a lui m, de exemplu p^α. Să notăm $m' = mp^\alpha$ și $S' = \sum_{d' \mid m'} \frac{m'}{d'} \varphi(d')$.

Divizorii lui m' sînt de două categorii: cei ce nu conțin factorul prim p, aceștia fiind de fapt toți divizorii lui m, respectiv cei ce conțin puteri ale factorului p, aceștia obținîndu-se din divizorii lui m înmulțiți pe rînd cu p, cu $p^2, \ldots,$ cu p^α.
Rezultă egalitatea

$$S' = \sum_{d' \mid m'} \frac{m'}{d'} \cdot \varphi(d') = \sum_{d \mid m} \frac{m'}{d} \cdot \varphi(d) + \sum_{d \mid m} \frac{m'}{pd} \cdot \varphi(pd) +$$

$$+ \sum_{d \mid m} \frac{m'}{p^2 d} \cdot \varphi(p^2 d) + \ldots + \sum_{d \mid m} \frac{m'}{p^\alpha d} \cdot \varphi(p^\alpha d).$$

Însă p fiind număr prim ce nu intră în descompunerea lui m, va fi relativ prim cu toți divizorii lui m și atunci, funcția φ fiind multiplicativă, vom avea

$$S' = \sum_{d \mid m} \frac{m' \varphi(d)}{d} + \sum_{d \mid m} \frac{m' \varphi(p)\, \varphi(d)}{pd} + \sum_{d \mid m} \frac{m' \varphi(p^2)\, \varphi(d)}{p^2 d} + \cdots +$$

$$+ \sum_{d \mid m} \frac{m' \varphi(p^\alpha)\, \varphi(d)}{p^\alpha d} = \sum_{d \mid m} \frac{m' \varphi(d)}{d} \cdot \left[1 + \frac{\varphi(p)}{p} + \frac{\varphi(p^2)}{p^2} + \cdots + \frac{\varphi(p^\alpha)}{p^\alpha}\right].$$

Dar p fiind prim avem $\varphi(p^i) = p^{i-1}(p-1)$ pentru $1 \leqslant i \leqslant \alpha$, astfel că $\frac{\varphi(p^i)}{p^i} = \frac{p-1}{p}$.
Continuînd, obținem

$$S' = \sum_{d \mid m} \frac{m' \varphi(d)}{1} \cdot \left[1 + \frac{\alpha(p-1)}{p}\right] = \sum_{d \mid m} \frac{mp^\alpha \varphi(d)}{d} \cdot \left[1 + \frac{\alpha(p-1)}{p}\right] =$$

$$= p^{\alpha-1}[p + \alpha(p-1)]S = p^{\alpha-1}[(\alpha+1)(p-1)+1]S = p^\alpha \left[(\alpha+1)\left(1 - \frac{1}{p}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{p}\right] \cdot S.$$

Pentru $m_0 = 1$ avem $S_0 = \sum_{d|1} \varphi(d) = 1$ și dacă înmulțim succesiv pe $m_0 = 1$ cu $p_1^{\alpha_1}$, $p_2^{\alpha_2}$, ..., $p_k^{\alpha_k}$, obținem în baza celor de mai înainte:

$$S = \sum_{d|m} \frac{m\varphi(d)}{d} = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k} \cdot \left[(\alpha_1 + 1)\left(1 - \frac{1}{p_1}\right) + \frac{1}{p_1}\right] \times$$

$$\times \left[(\alpha_2 + 1)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right) + \frac{1}{p_2}\right] \cdot \dots \cdot \left[(\alpha_k + 1)\left(1 - \frac{1}{p_k}\right) + \frac{1}{p_k}\right] =$$

$$= m \prod_{i=1}^{k} \left[(\alpha_i + 1)\left(1 - \frac{1}{p_i}\right) + \frac{1}{p_i}\right] = m \prod_{i=1}^{k} \left[1 + \alpha_i\left(1 - \frac{1}{p_i}\right)\right].$$

OIM 16. *Să se arate că pentru orice* $n \in \mathbf{N}$, $n \neq 2$, $n \neq 6$, *are loc inegalitatea:*

$$\varphi(n) \geqslant \sqrt{n}$$

unde $\varphi(n)$ *este funcția lui Euler (pentru orice* $n \in \mathbf{N}$, $\varphi(n)$ ***reprezintă numărul*** *numerelor naturale mai mici decît* n *și prime cu* n*).*

Dan Radu, G. M.-A. 9/1970

Soluție. Reamintim că dacă p este număr prim, atunci $\varphi(p^\alpha) = p^{\alpha-1}(p-1)$ pentru orice $\alpha \in \mathbf{N}^*$. Demonstrăm acum următoarele inegalități:

(1) $\varphi(2^\alpha) \geqslant 2^{\frac{\alpha}{2}}$, pentru $\alpha \geqslant 2$.

(2) $\varphi(p^\alpha) \geqslant p^{\frac{\alpha}{2}}$, pentru p prim $\geqslant 3$ și $\alpha \in \mathbf{N}^*$.

(3) $\varphi(p^\alpha) \geqslant \sqrt{2} \cdot p^{\frac{\alpha}{2}}$, pentru p prim $\geqslant 5$ și $\alpha \in \mathbf{N}^*$.

În adevăr, (1) se scrie succesiv:

$$2^{\alpha-1}(2-1) \geqslant 2^{\frac{\alpha}{2}} \Leftrightarrow \alpha - 1 \geqslant \frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow \alpha \geqslant 2.$$

Inegalitatea (2) se scrie $p^{\alpha-1}(p-1) \geqslant p^{\frac{\alpha}{2}}$; dacă $\alpha = 1$ aceasta devine $p - 1 \geqslant \sqrt{p} \Leftrightarrow p \geqslant \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, evident; dacă $\alpha \geqslant 2$ inegalitatea este echivalentă cu $p^{\frac{\alpha}{2}-1} \cdot (p-1) \geqslant 1$, care este evidentă.

Inegalitatea (3) se scrie $p^{\alpha-1}(p-1) \geqslant \sqrt{2} p^{\frac{\alpha}{2}}$; dacă $\alpha = 1$ ea devine $p - 1 \geqslant \sqrt{2p} \Leftrightarrow p \geqslant 2 + \sqrt{3}$, evidentă; dacă $\alpha \geqslant 2$ avem $p^{\frac{\alpha}{2}-1} \cdot (p-1) \geqslant \sqrt{2}$, care este de asemenea evidentă pentru $p \geqslant 5$. Fie acum $n \in \mathbf{N}^*$, $n \geqslant 2$.

Dacă $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, unde $p_1, p_2, \dots, p_k$ sînt numere prime mai mari sau egale cu 3, vom avea conform cu (2):

$$\varphi(n) = \varphi(p_1^{\alpha_1})\, \varphi(p_2^{\alpha_2}) \dots \varphi(p_k^{\alpha_k}) \geqslant p_1^{\frac{\alpha_1}{2}} p_2^{\frac{\alpha_2}{2}} \dots, p_k^{\frac{\alpha_k}{2}} = \sqrt{n}.$$

Dacă $n = 2^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ cu $\alpha_1 \geqslant 2$ și $p_2, p_3, \dots, p_k$ numere prime mai mari sau egale cu 3, vom avea conform cu (1) și (2):

$$\varphi(n) = \varphi(2^{\alpha_1})\, \varphi(p_2^{\alpha_2}) \dots \varphi(p_k^{\alpha_k}) \geqslant 2^{\frac{\alpha_1}{2}} p_2^{\frac{\alpha_2}{2}} \dots p_k^{\frac{\alpha_k}{2}} = \sqrt{n}.$$

Dacă $n = 2p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} \dots p_k^{\alpha_k}$ cu $p_2, p_3, \dots, p_k$ numere prime $\geqslant 3$ și k mai mare sau egal cu 3, atunci avem cel puțin un $p_i \geqslant 5$. Folosind (2) și (3) avem:

$$\varphi(n) = \varphi(p_i^{\alpha_i}) \prod_{j \neq i} \varphi(p_j^{\alpha_j}) \geqslant \sqrt{2} \cdot p_i^{\frac{\alpha_i}{2}} \cdot \prod_{j \neq i} p_j^{\frac{\alpha_j}{2}} = \sqrt{n}.$$

În sfîrșit, fie $n = 2 \cdot 3^{\alpha}$; dacă $\alpha \geqslant 2$ avem

$$\varphi(n) = \varphi(2)\, \varphi(3^{\alpha}) = 3^{\alpha-1}(3 - 1) = 2 \cdot 3^{\alpha-1} \geqslant \sqrt{2} \cdot 3^{\frac{\alpha}{2}} = \sqrt{n};$$

dacă $\alpha = 1$, adică $n = 6$ inegalitatea din enunț nu mai are loc.
De asemenea pentru $\alpha = 0$ avem $n = 2$, și de asemenea inegalitatea este falsă.

OIM 17. *Fie $n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant 2$. Să se arate că n se divide cu $n - \varphi(n)$ dacă și numai dacă n este o putere a unui număr prim.* [*Prin $\varphi(n)$ am notat indicatorul lui Euler*].

Marcel Țena, G. M. 11/1982

Soluție. Să presupunem că n se divide cu $n - \varphi(n)$ deci $(\exists)\, t \in \mathbf{N}$ cu $n = t(n - \varphi(n))$ sau

$$(t - 1)n = t\varphi(n). \tag{1}$$

Fie $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, unde $p_1 < p_2 < \dots < p_k$ sînt numere prime. Vom arăta că avem $k = 1$. Să presupunem prin absurd că avem $k \geqslant 2$.
Cum $\varphi(n) = p_1^{\alpha_1 - 1} p_2^{\alpha_2 - 1} \dots p_k^{\alpha_k - 1}(p_1 - 1)(p_2 - 1) \dots (p_k - 1)$ relația (1) devine după simplificări

$$(t - 1)p_1 p_2 \dots p_k = t(p_1 - 1)(p_2 - 1) \dots (p_k - 1). \tag{2}$$

Din această egalitate rezultă că numărul prim p_k divide cel puțin unul din numerele $t, p_1 - 1, p_2 - 1, \dots, p_k - 1$ și cum nu poate divide nici unul din numerele $p_1 - 1, p_2 - 1, \dots, p_k - 1$ rezultă că p_k divide t. Așadar

$$(\exists)\ u \in \mathbf{N} \text{ cu } t = up_k. \tag{3}$$

Relația (2) se mai scrie

$$\frac{t}{t-1}=\frac{p_1}{p_1-1}\cdot\frac{p_2}{p_2-1}\cdot\ldots\cdot\frac{p_k}{p_k-1}$$

de unde

$$1+\frac{1}{t-1}=\left(1+\frac{1}{p_1-1}\right)\left(1+\frac{1}{p_2-1}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{p_k-1}\right)>\text{ (cum } k>1)$$

$$>\left(1+\frac{1}{p_k-1}\right)^k\geqslant 1+\frac{k}{p_k-1}.$$

Rezultă $\frac{1}{t-1}>\frac{k}{p_k-1}$ sau $p_k-1>tk-k$ sau încă $tk<p_k+k-1$ și ținînd seama și de (3): $kup_k<p_k+k-1$ adică $p_k<\frac{k-1}{utk-1}\leqslant 1$, ceea ce este o contradicție.

Așadar $k=1$ și atunci $n=p_1^{\alpha_1}$. Reciproc, dacă $n=p^\alpha$ (cu p prim) avem $n-\varphi(n)=p^\alpha-(p^\alpha-p^{\alpha-1})=p^{\alpha-1}$, deci n se divide cu $n-\varphi(n)$.

OIM 18. *Fie S_n suma primelor n numere prime mai mari ca 2. Să se determine n astfel încît*

$$S_n=\frac{6n^2+7+(-1)^n}{4}.$$

Florin Vulpescu Jalea, G. M., 4/1983

Soluție. Considerăm șirul $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ definit astfel: $a_1=3$, $a_2=6\cdot 1-1$ $a_3=6\cdot 1+1$, $a_4=6\cdot 2-1$, $a_5=6\cdot 2+1$, ... (șirul tuturor numerelor naturale de forma $6k\pm 1$). Se constată ușor că $a_i=6\left[\frac{i}{2}\right]-(-1)^i$, pentru orice $i\geqslant 2$. Vom demonstra egalitatea:

$$\sum_{i=2}^{n}a_i=\frac{6n^2+7+(-1)^n}{n},\quad(\forall)\,n\geqslant 1. \tag{1}$$

Într-adevăr dacă $n=2k+1$, $k\in\mathbf{N}$, se obține

$$\sum_{i=1}^{}a_i=\sum_{i=1}^{2k+1}a_i=3+[(6\cdot 1-1)+(6\cdot 1+1)]+[(6\cdot 2-1)+(6\cdot 2+1)]+$$

$$+\ldots+[(6k-1)+(6k+1)]=3+12(1+2+\ldots+k)=$$

$$=3+6k(k+1)=3+6\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n+1}{2}=\frac{6n^2+6}{4}=\frac{6n^2+7+(-1)^n}{4},$$

iar pentru $n = 2k$, $k \in \mathbf{N}^*$ se obține

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{k2} a_i = 3 + [(6 \cdot 1 - 1) + (6 \cdot 1 + 1)] + [(6 \cdot 2 - 1) + (6 \cdot 2 + 1)] +$$

$$+ \ldots + [(6(k-1) - 1) + (6(k-1) + 1)] + (6k - 1) = 3 + 12 \cdot [1 +$$

$$+ 2 + \ldots + (k-1)] + (6k - 1) = 6k + 2 + 6k(k-1) = 6k^2 + 2 =$$

$$= 6 \cdot \left(\frac{n}{2}\right)^2 + 2 = \frac{6n^2 + 8}{4} = \frac{6n^2 + 7 + (-1)^n}{4}.$$

Fie $p_1 = 3$, $p_2 = 5$, $p_3 = 7$, $p_4 = 11, \ldots$ șirul numerelor prime mai mari ca 2. Deoarece oricare asemenea număr prim este de forma $6k \pm 1$, deducem inegalitatea $p_i \geqslant a_i$, $(\forall)$ $i \in \mathbf{N}^*$. Rezultă

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} p_i \geqslant \sum_{i=1}^{n} a_i \overset{(1)}{=} \frac{6n^2 + 7 + (-1)^n}{4}, \quad (\forall)\ n \in \mathbf{N}^*. \tag{2}$$

Observăm însă ușor că $p_1 = a_1 = 3, p_2 = a_2 = 5, p_3 = a_3 = 7, p_4 = a_4 = 11$, $p_5 = a_5 = 13, p_6 = a_6 = 17, p_7 = a_7 = 19$, $p_8 = a_8 = 23$, $p_9 = 29 > a_9 = 25$. Rezultă că în inegalitatea (2) avem egalitate pentru $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, iar pentru $n \geqslant 9$ avem inegalitate strictă. Așadar valorile căutate pentru n sînt primele 8 numere naturale nenule.

OIM 19. *Să se demonstreze că pentru orice număr natural $n \geqslant 2$, există un număr natural m, care se poate scrie, simultan, ca sumă de 2, 3, .., n pătrate perfecte nenule, de numere întregi.*

Marius Cavachi, G. M., 4/1980

Soluție. Vom demonstra mai întîi că orice număr natural $p \geqslant 7$ se poate reprezenta sub forma $a^2 + b^2 - c^2$ cu $a, b, c \in \mathbf{N}^*$. În adevăr, dacă p este par, putem să-l scriem sub forma $p = 2k + 2$ și luăm $a = 1$, $b = k + 1$, $c = k$; dacă p este impar, putem să-l scriem sub forma $p = 2k + 5$ și luăm $a = 2$, $b = k + 1$, $c = k$ (peste tot, $k \geqslant 1$).

Pentru rezolvarea propriu-zisă a problemei, vom proceda prin inducție după n. Pentru $n = 2$ este evident, luînd $m = 1^2 + 1^2$.

Să presupunem că pentru n există m cu proprietatea din enunț și să arătăm că pentru $n + 1$ găsim un alt număr m' cu aceeași proprietate. Să presupunem de asemenea că $m \geqslant 7$. [Aceasta, deoarece observăm ușor că $m \geqslant n$, iar dacă am presupune $m \leqslant 6$, atunci și $n \leqslant 6$ și aceste cazuri pot fi verificate direct].

Conform ipotezei de inducție, putem scrie

$$m = a_1^2 + a_2^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = \ldots = l_1^2 + l_2^2 + \ldots + l_n^2.$$

Dar conform cu cele demonstrate la început, putem scrie $m = a^2 + b^2 - c^2$. Luînd atunci $m' = m + c^2$, vom avea $m' = a^2 + b^2 = a_1^2 + a_2^2 + c^2 =$

$= b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + c^2 = \ldots = l_1^2 + l_2^2 + \ldots + l_n^2 + c^2$ și problema este rezolvată.

OIM 20. *Să se demonstreze că există o infinitate de numere naturale a astfel că pentru orice număr natural n, numărul* $Z = n^4 + a$, *nu este număr prim.*

G. M. B 4 1970,, OIM 1969.

Soluție. Prin descompunerea lui Z în factori avem:

$$Z = n^4 + a = n^4 + 2n^2\sqrt{a} + a - 2n^2\sqrt{a} = (n^2 + \sqrt{a})^2 - (n\sqrt{2\sqrt{a}})^2 =$$

$$= (n^2 + \sqrt{a} + n\sqrt{2\sqrt{a}})(n^2 + \sqrt{a} - n\sqrt{2\sqrt{a}}).$$

Fie $\sqrt{2\sqrt{a}} = k \in \mathbf{N}$. Rezultă $2\sqrt{a} = k^2$ sau $4a = k^4$. Deci $a = \frac{k^4}{4}$.

Pentru $k = 2m$ $(m \in \mathbf{N})$ se obține

$$Z = (n^2 + 2m^2 + 2mn)(n^2 + 2m^2 - 2mn).$$

Dacă $m > 1$ și deci $k > 2$, vom avea

$$n^2 + 2m^2 + 2mn \geqslant 2m^2 \geqslant 8$$

și

$$n^2 + 2m^2 - 2mn \geqslant (n - m)^2 + m^2 \geqslant m^2 \geqslant 4$$

adică cei doi factori sînt mai mari decît 1, deci Z nu este număr prim.
Deci $a \in \{8^2, 18^2, 32^2, \ldots, (2m^2)^2, \ldots\}$, adică există o infinitate de astfel de numere.

OIM 21. *Să se găsească cel mai mic număr divizibil cu* 19, *avînd toate cifrele egale.*

Elorin Nicolăiță, G. M. 1/1982

Soluție. Fie $A = \underbrace{\overline{aa \ldots a}}_{n \text{ cifre}}$ cel mai mic număr cu cifre egale, divizibil cu 19.

Deoarece $A = a.\underbrace{\overline{11 \ldots 1}}_{n \text{ cifre}}$, rezultă că numărul $B = \underbrace{\overline{11 \ldots 1}}_{n \text{ cifre}}$ este divizibil cu 19 și cum $B \leqslant A$, va trebui să avem chiar egalitate: $A = B$ (adică $a = 1$).
Așadar $A = \underbrace{\overline{11 \ldots 1}}_{n \text{ cifre}}$ rămînînd să-l determinăm pe n minim cu proprietatea că A se divide cu 19. Putem scrie

$$A = 1 + 10 + \ldots + 10^{n-1} = \frac{1}{9}(10^n - 1)$$

de unde rezultă că $10^n - 1$ se divide cu 19.

Considerăm corpul $(\mathbf{Z}_{19}, +, \cdot)$ al claselor de resturi modulo 19 și grupul multiplicativ $(\mathbf{Z}_{19} \setminus \{\hat{0}\}, \cdot)$, care are 18 elemente. În acest grup vom avea $\hat{10}^n = \hat{1}$ și cum n este minim, înseamnă că n reprezintă ordinul elementului $\hat{10}$ în grupul menționat.
Din teorema lui Lagrange rezultă că ordinul unui element divide ordinul grupului, deci n divide 18, adică $n \in \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$.
Avem:

$\hat{10}^1 = \hat{10}$; $\hat{10}^2 = \hat{5}$; $\hat{10}^3 = \hat{12}$; $\hat{10}^6 = (\hat{10}^3)^2 = \hat{11}$; $\hat{10}^9 = \hat{10}^6 \cdot \hat{10}^3 = \hat{18}$ și

$\hat{10}^{18} = \hat{1}$, ceea ce arată că $n = 18$. Rezultă că numărul căutat este $A = \overbrace{11 \ldots 1}^{18 \text{ cifre}}$.

OIM 22. *Fie $m \geq 1$ un număr natural. Să se arate că produsul a m numere naturale distincte în progresie aritmetică este divizibil cu $m!$ dacă rația progresiei este un număr prim cu $m!$.*

* * * G. M. 10—11/1983, Baraj

Soluție. Vom demonstra proprietatea prin inducție după m. Pentru $m = 1$ proprietatea este evidentă. Pentru $m = 2$, deducem din ipoteză că rația este număr impar și atunci cele două numere în progresie aritmetică sînt de parități diferite, astfel că produsul lor se divide cu $2!$. Să presupunem proprietatea adevărată pentru $m - 1$ și să o demonstrăm și pentru m. Fie r rația progresiei și $a, a + r, \ldots, a + (m-1)r$ cele m numere în progresie aritmetică. Arătăm mai întîi că

$$a(a + r) \ldots [a + (m - 1) r] \equiv (a + r)(a + 2r) \ldots (a + mr) \pmod{m!}. \quad (1)$$

Într-adevăr, dacă facem diferența, avem

$$a(a + r) \ldots [a + (m - 1) r] - (a + r)(a + 2r) \ldots (a + mr) =$$

$$= (a + r)(a + 2r) \ldots [a + (m - 1) r](-mr). \quad (2)$$

Deoarece r și $m!$ sînt relativ prime, iar $(m - 1)!$ este divizor al lui $m!$, rezultă că r și $(m - 1)!$ sînt de asemenea relativ prime. Pe baza ipotezei de inducție rezultă atunci că produsul $(a + r)(a + 2r) \ldots [a + (m - 1)r]$ se divide cu $(m - 1)!$. Astfel, membrul drept din (2) se va divide cu $m!$ și prin urmare (1) este demonstrată. Aplicînd congruența (1) succesiv de un anumit număr de ori, obținem congruența:

$$a(a + r) \ldots [a + (m - 1) r] \equiv (a + kr)[a +$$

$$+ (k + 1) r] \ldots [a + (k + m - 1) r], (\forall) k \in \mathbf{Z}. \quad (3)$$

Deoarece r și $m!$ sînt relativ prime, există $u, v \in \mathbf{Z}$ astfel încît $ur + vm! = 1$ deci $aur + avm! = a$ sau $a + (-au)\, r = avm!$. Luînd $k = -au$, obținem așadar $a + kr \equiv 0 \pmod{m!}$. Înlocuind atunci în (3) acest k găsit, va rezulta

$$a(a + r)\,(a + 2r) \ldots [a + (m - 1)\, r] \equiv 0 \pmod{m!},$$

ceea ce arată că proprietatea este valabilă și pentru m.

OIM 23. Găsiți ultimele 5 cifre ale numărului 5^{1981}.

G. M. 7/1981

Soluția I. Cea mai mică putere a lui 5 care depășește pe 10^5 (are mai mult de 5 cifre) este $5^8 = 390\,625 = \mathcal{M}10^5 + 90\,625$. Atunci ridicînd la puterea k, obținem $5^{8k} = \mathcal{M}10^5 + 90\,625^k$.
Se constată prin calcul că ultimele 5 cifre ale numărului $90\,625^2$ sînt 90 625 și de aici, prin inducție după k, putem ușor arăta că ultimele 5 cifre ale numărului $90\,625^k$ sînt tot 90 625, pentru orice $k \in \mathbf{N}^*$. Așadar:
$5^8 = \mathcal{M}10^5 + 90\,625$, $(\forall)\ k \in \mathbf{N}^*$.

Cum $1981 = 1976 + 5 = 8k + 5$, rezultă că putem scrie:

$$5^{1981} = 5^{8k} \cdot 5^5 = (\mathcal{M}10^5 + 90\,625) \cdot 3\,125 = \mathcal{M}10^5 + 283\,203\,125 =$$

$$= \mathcal{M}10^5 + 3\,125,$$

adică ultimele 5 cifre ale numărului 5^{1981} sînt 03 125.

Soluția II. Arătăm că $5^{1981} \equiv 5^5 \pmod{10^5}$. În adevăr, dacă notăm $A = 5^{1981} - 5^5$, avem

$$A = 5^5(5^{1976} - 1) = 5^5[(5^8)^{247} - 1] = \mathcal{M}[5^5 \cdot (5^8 - 1)] =$$

$$= \mathcal{M}[5^5(5 - 1)\,(5 + 1)\,(5^2 + 1)\,(5^4 + 1)] = \mathcal{M}5^5 \cdot 2^5 = \mathcal{M}10^5$$

și afirmația este dovedită. Rezultă

$$5^{1981} = \mathcal{M}10^5 + 5^5 = \mathcal{M}10^5 + 3\,125,$$

ceea ce înseamnă că ultimele 5 cifre ale numărului 5^{1981} sînt 03125.

OIM 24. *Determinați toate numerele prime p pentru care numărul $2^p + p^2$ este de asemenea prim.*

S. Maizus, G. M. 10/1981 (după Kvant)

Soluție. Notăm $N(p) = 2^p + p^2$; orice număr prim $p \geqslant 5$ este de forma $p = \mathcal{M}3 \pm 1$, deci $p^2 = \mathcal{M}3 + 1$.
Atunci $N(p) = 2^p + \mathcal{M}3 + 1$, însă p este impar și atunci $2^p + 1 = \mathcal{M}(2 + 1) = \mathcal{M}3$.

Rezultă aşadar $N(p) = \mathcal{M}3$ şi cum pentru $p \geqslant 5$ avem $N(p) > 3$, înseamnă că pentru orice număr prim $p \geqslant 5$ numărul $N(p)$ nu poate fi număr prim. Rămîne să încercăm numerele prime mai mici decît 5, adică $p = 2$ şi $p = 3$. Avem $N(2) = 8$, care nu este prim şi $N(3) = 17$, care este număr prim Aşadar soluţia problemei este unică şi anume $p = 3$.

OIM 25. *Pe cele şase feţe ale unui cub se scriu numerele de la 1 la 6 astfel încît să nu existe feţe diferite avînd înscrise pe ele acelaşi număr. Să se demonstreze că nu este posibil ca suma numerelor de pe cele trei feţe care se întîlnesc într-un vîrf să fie aceeaşi pentru orice vîrf al cubului.*

Dan Laseu, G. M. 11/1981

Soluţia I. Fie cubul $[A_1A_2A_3A_4B_1B_2B_3B_4]$ în care $[A_1A_2A_3A_4]$, $[B_1B_2B_3B_4]$ sînt feţe opuse, iar $|A_iB_i|$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ sînt muchii. Să notăm cu a, b, c, d respectiv numerele înscrise pe feţele $[A_1A_2A_3A_4]$, $[A_1A_2B_2B_1]$, $[A_2A_3B_3B_2]$, $[A_1A_4B_4B_1]$. Suma numerelor înscrise pe feţele ce au comun punctul A_1 este $a + b + d$, iar suma numerelor înscrise pe feţele ce au comun punctul A_2 este $a + b + c$. Dacă am presupune că suma respectivă este aceeaşi pentru toate vîrfurile, ar rezulta în particular $a + b + d = a + b + c$, adică $c = d$, contradicţie.

Soluţia II. Să presupunem că suma respectivă este aceeaşi pentru fiecare din cele 8 vîrfuri şi fie n valoarea acesteia (în fiecare vîrf). Fiecare număr din mulţimea $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ apare ca termen în patru sume, corespunzătoare celor 4 vîrfuri ale feţei care poartă numărul respectiv. Făcînd atunci suma tuturor sumelor din cele 8 vîrfuri, vom avea

$8n = 4(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6)$, de unde $n = 21/2$, adică n nu este natural, ceea ce este o contradicţie.

OIM 26. *Să se arate că ortocentrele triunghiurilor formate de cîte două laturi şi o diagonală ale unui patrulater inscriptibil, sînt vîrfurile unui alt patrulater congruent cu acesta.*

A. V. Mihai, G. M. 9/1981

Soluţie. Să observăm mai întîi că dacă $ABCD$ este un patrulater convex şi G_1, G_2, G_3, G_4 centrele de greutate ale triunghiurilor ABD, ABC, CDB, CDA, atunci patrulaterele $G_1G_2G_3G_4$ şi $ABCD$ sînt asemenea. În adevăr, dacă M este mijlocul laturii $|AB|$, avem

$$\frac{\|MG_1\|}{\|MD\|} = \frac{\|MG_2\|}{\|MC\|} = \frac{1}{3}, \text{ de unde rezultă } G_1G_2 \| CD \text{ şi } \frac{\|G_1G_2\|}{\|CD\|} = \frac{1}{3}.$$

Analog pentru celelalte, ceea ce arată că patrulaterele $G_1G_2G_3G_4$ şi $ABCD$ au laturile respectiv paralele şi proporţionale, deci sînt asemenea, raportul de asemănare fiind $\frac{1}{3}$.

În cazul nostru, patrulaterul $ABCD$ fiind inscriptibil rezultă că dreptele Euler ale triunghiurilor ABD, ABC, CDB, CDA sînt concurente în O, centrul cercului circumscris patrulaterului $ABCD$ (pentru că O aparține fiecărei drepte). Notînd cu H_1, H_2, H_3, H_4 respectiv ortocentrele triunghiurilor de mai sus, se știe că H_i, G_i, O sînt coliniare și situate în această ordine (aparțin dreptei Euler a triunghiului respectiv) și avem:

$$\frac{\|OG_i\|}{\|OH_i\|} = \frac{1}{3}, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Rezultă ușor $G_1G_2 \| H_1H_2$ și $\frac{\|G_1G_2\|}{\|H_1H_2\|} = \frac{1}{3}$ și analoagele, ceea ce arată că patrulaterele $G_1G_2G_3G_4$ și $H_1H_2H_3H_4$ sînt asemenea, cu raportul de asemănare 1/3. Din cele de mai sus rezultă că patrulaterele $ABCD$ și $H_1H_2H_3H_4$ sînt asemenea, cu raportul de asemănare 1, adică sînt congruente.

Observație. Notînd cu Ω_1, Ω_2, Ω_3, Ω_4 centrele cercurilor Euler ale triunghiurilor ABD, ABC, CDB, CDA, ținînd cont că H_i, Ω_i, O sînt coliniare și situate în această ordine și că $\frac{\|O\Omega_i\|}{\|OH_i\|} = \frac{1}{2}$, $i = 1, 2, 3, 4$, rezultă că patrulaterul $\Omega_1\Omega_2\Omega_3\Omega_4$ este asemenea cu $ABCD$.

OIM 27. *Fie* (Γ) *un cerc concentric cu cercul înscris în triunghiul oarecare* ABC, *iar* l_a, l_b, l_c *distanțele unui punct* M *din interiorul triunghiului* ABC *situat pe* (Γ) *(în ipoteza că există asemenea puncte) la punctele de contact ale cercului înscris cu laturile* $|BC|$, $|CA|$, $|AB|$. *Dacă* a, b, c *sînt lungimile laturilor* $|BC|$, $|CA|$, $|AB|$ *ale triunghiului, să se arate că valoarea expresiei* $E = al_a^2 + bl_b^2 + cl_c^2$ *este constantă, oricare ar fi poziția lui* M *din interiorul triunghiului și situat pe* (Γ).

Toma Albu, G. M. 9/1963

Soluție. Fie un cerc de centru O și de rază r, tangent unei drepte (D) în punctul P (fig. OIM 27), iar M un punct din plan cu $\|OM\| = R$ și $\|MP\| = l$ (numerele r, R, l sînt date). Fie M' proiecția ortogonală a lui M pe (D) și $\|MM'\| = d$. Notăm $m(\widehat{M'MP}) = m(\widehat{MPO}) = \alpha$. Avem evident $d = l\cos\alpha$ și $R^2 = l^2 + r^2 - 2lr\cos\alpha$, de unde deducem

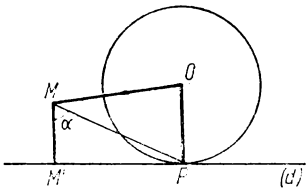


Fig. OIM 27

$$d = \frac{l^2 + r^2 - R^2}{2r}.$$

Revenind la problemă, să considerăm distanțele d_a, d_b, d_c ale lui M la BC, CA, AB. Conform considerațiilor anterioare avem:

$$d_a = \frac{l_a^2 + r^2 - R^2}{2r} \quad (1), \quad d_b = \frac{l_b^2 + r^2 - R^2}{2r} \quad (2), \quad d_c = \frac{l_c^2 + r^2 - R^2}{2r} \quad (3)$$

unde r este raza cercului înscris în triunghiul ABC, iar R este raza lui (Γ). Înmulțind relațiile (1), (2), (3) respectiv cu $\frac{a}{2}$, $\frac{b}{2}$, $\frac{c}{2}$, apoi adunînd relațiile astfel obținute și ținînd seama că M este situat în interiorul triunghiului ABC, avem

$$S = \frac{1}{4r}[E + (a + b + c)(r^2 - R^2)],$$

unde S este aria triunghiului.
Dar $S = pr$, deci $4pr^2 = E + 2p(r^2 - R^2)$, de unde $E = 2p(r^2 + R^2) = \text{const.}$

Observații. 1. Problema se poate pune și invers. Să se găsească locul punctelor M din plan pentru care $al_a^2 + bl_b^2 + cl_c^2 = k = \text{constant}$.
Dacă notăm cu R distanța de la M la centrul cercului înscris în triunghiul ABC, urmînd procedeul de mai înainte se găsește:

$$al_a^2 + bl_b^2 + cl_c^2 = k = 2p(r^2 + R^2), \text{ de unde } R = \sqrt{\frac{k}{2p} - r^2} = \text{constant}.$$

Dacă $R \leqslant r$ adică $k \leqslant 4pr^2$, locul cerut este întreg cercul concentric cu cercul înscris și cu raza $\sqrt{\frac{k}{2p} - r^2}$. În cazul în care acest cerc intersectează laturile triunghiului ABC, locul lui M este constituit din arcele acestui cerc incluse în interiorul triunghiului.
Dacă cercul de mai înainte conține în interiorul său punctele A, B, C locul cerut este mulțimea vidă. Evident trebuie să avem $\frac{k}{2p} \geqslant r^2$ sau $k \geqslant 2pr^2$.
Dacă $k = 2pr^2$, locul cerut este centrul cercului înscris în triunghiul ABC.

2. Dacă se consideră și punctele de pe cercul (Γ) situate în exteriorul triunghiului avem de exemplu, pentru punctele de pe (Γ) care se află în interiorul unghiului $\widehat{BAC}$, relația

$$-al_a^2 + bl_b^2 + cl_c^2 = 2p(r^2 + R^2),$$

iar pentru punctele de pe (Γ) situate în interiorul unghiului opus la vîrf cu unghiul $\widehat{BAC}$ avem

$$al_a^2 - bl_b^2 - cl_c^2 = 2p(r^2 + R^2).$$

OIM 28. *Fie (A, A') și (B, B') două perechi de puncte conjugate armonic în raport cu două puncte date I și J, iar α și β mijloacele segmentelor $|AA'|$ și $|BB'|$. Să se demonstreze că: condiția necesară și suficientă pentru ca punc-*

tele A și A' să fie conjugate armonic în raport cu B și B' este ca α și β să fie conjugate armonic în raport cu I și J.

G. Țițeica. G. M.

Soluție. Fixăm un sistem de coordonate pe dreaptă și fie a, a', b, b', i, j respectiv abscisele punctelor A, A', B, B', I, J iar x și y abscisele punctelor α și β. Reamintim că punctele de abscise u, v sînt conjugate armonic în raport cu punctele de abscise t, s, dacă și numai dacă are loc loc egalitatea

$$(u + v)(t + s) = 2(uv + ts).$$

Deoarece A și A' sînt conjugate armonic în raport cu I și J, avem

$$(a + a')(i + j) = 2(aa' + ij). \tag{1}$$

iar din faptul că B și B' sînt conjugate armonic în raport cu I și J, avem

$$(b + b')(i + j) = 2(bb' + ij). \tag{2}$$

Deoarece α și β sînt mijloacele segmentelor $|AA'|$ și $|BB'|$, putem scrie

$$x = \frac{a + a'}{2}, \quad y = \frac{b + b'}{2}. \tag{3}$$

Condiția necesară și suficientă ca A și A' să fie conjugate armonic în raport cu B și B' este

$$(a + a')(b + b') = 2(aa' + bb'). \tag{4}$$

Dar din (3) avem $a + a' = 2x$, $b + b' = 2y$, iar din (1) și (2) avem

$$2aa' = (a + a')(i + j) - 2ij = 2x(i + j) - 2ij,$$

$$2bb' = (b + b')(i + j) - 2ij = 2y(i + j) - 2ij.$$

Atunci, egalitatea (4) este echivalentă cu

$$2x \cdot 2y = 2x(i + j) - 2ij + 2y(i + j) - 2ij,$$

sau cu

$$(i + j)(x + y) = 2(xy + ij). \tag{5}$$

Dar condiția (5) este necesară și suficientă ca punctele α și β să fie conjugate armonic în raport cu I și J.

Cum (4) și (5) sînt echivalente, problema este rezolvată.

Capitolul VIII

PROBLEME DEOSEBITE CARE SUSCITĂ ALTE PROBLEME (PD)

Introducere

Acest capitol nu poate trasa graniţe continue între disciplinele pe care le înfăţişează prin probleme, întrucît acestea sînt alese cu scopul deliberat de a suscita alte probleme, care pot fi extensiuni, generalizări sau transferuri de idei, metode sau tehnici, tot atît de bine ca aplicaţii în alte domenii.

Este un capitol care urmăreşte stimularea creativităţii cititorului în căutare de idei, sugestii sau soluţii pentru probleme care îl frămîntă sau pe care ar dori să le cerceteze pe căi noi. Cu toate acestea o împărţire pe discipline ni s-a părut utilă, chiar pentru a sublinia interdisciplinaritatea unora dintre problemele prezentate în acest capitol.

Astfel, în teoria numerelor problema (PD 21) cere probabilitatea ca un termen al unui şir de combinări să fie divizibil cu un număr prim dat. Problema (PD 22) este semnată de *Gh. Ţiţeica* şi a suscitat şi în anii trecuţi o generalizare. Semnalăm, de asemenea problemele (PD 23) şi (PD 24) semnate respectiv de *Al. Pantazi* şi *A. G. Ioachimescu*, care arată că predilecţiile personalităţilor din trecut se manifestau în G. M. prin probleme sau articole şi din alte domenii decît cele pe care le ilustrau.

Tot prin caracterul lor interdisciplinar se remarcă şi problemele (PD 25) (PD 26), care folosesc metode şi aduc rezultate analitice în teoria numerelor. Metoda fracţiilor continue este aplicată în (PD 28) şi dă îndemnuri şi pentru alte utilizări.

Algebra aduce în acest capitol atît idei clasice nepieritoare, cît şi concepte moderne de largă eficacitate. *A. G. Ioachimescu* semnează problemele (PD 2) şi (PD 3) privitoare la polinoame în care apar rădăcini primitive ale unităţii

și teoria lui Galois în soluția dată de *Tr. Lalescu* celei de a doua, printr-o notă care continuă idei ce mai pot fi fructificate și astăzi.

Probleme de grupuri găsim în (PD 18.) și (PD 19), aplicații combinatoriale ale descompunerii permutărilor în cicluri, în (PD 20), iar (PD 17) folosește polinoame ciclotomice și grupul multiplicativ al rădăcinilor de ordinul n ale unității pentru a stabili proprietăți din teoria numerelor, în care intervine indicatorul lui Euler, trimițînd pe cititor și la alte lucrări pentru a-l atrage să adîncească toate aceste domenii.

Bogăția de idei cuprinsă în acest capitol ne îndeamnă să citățm fiecare problemă, ceea ce desigur ar fi perfect justificat. Vom face o trecere rapidă în revistă a categoriilor de probleme; de exemplu, (PD 4), (PD 5), (PD 10), (PD.1) tratează proprietăți ale rădăcinilor polinoamelor, (PD 12), (PD 9), proprietăți ale numerelor raționale sau iraționale (PD 8), (PD 14), (PD 15), proprietăți g[illegible]ale, (PD 16), (PD 11), (PD 4) proprietăți ale inelelor și corpurilor.

Trecînd la secția de analiză matematică vom constata un număr mai redus de probleme. Aceasta corespunde cu tematica manualelor de analiză în vigoare în ultimii ani, care insistă mai mult asupra proprietăților generale ale funcțiilor decît asupra algoritmilor calculului diferențial și integral.

Problemele (PD 31) și (PD 34) adîncesc astfel de proprietăți generale, prima proprietăți decurgînd din formula creșterilor finite, cea de a doua, proprietăți ale soluțiilor unei ecuații funcționale. Proprietăți ale limitelor de funcții sînt prezentate în (PD 32) și (PD 33), limite ale unor șiruri în (PD 35) și numai problema (PD 36), semnată de *M. Ghermănescu* se referă la integrala generală a unei ecuații diferențiale, în speță a unei ecuații Ricatti, iar (PD 12), la mulțimea soluțiilor necontinue a celebrei ecuații funcționale a lui Cauchy.

Cititorul își va putea completa fondul de probleme de analiză care suscită alte probleme prin spicuirea altor capitole consacrate unor țeluri competiționale, în particular ale părții a II-a, unde sînt selecționate probleme din reviste străine.

PD 1. *Dacă m este un număr natural și p un număr natural impar, să se arate că:*

$$1 + C_m^p + C_m^{2p} + C_m^{3p} + \ldots = \frac{2^m}{p}\left[1 + 2\cos^m\frac{\pi}{p}\cos\frac{m\pi}{p} + \right.$$

$$+ 2\cos^m\frac{2\pi}{p}\cos\frac{2m\pi}{p} + 2\cos^m\frac{3\pi}{p}\cdot\cos\frac{3m\pi}{p} + \ldots +$$

$$\left. + 2\cos^m\frac{\frac{(p-1)\pi}{2}}{p}\cos\frac{\frac{(p-1)m\pi}{2}}{p}\right].$$

Ce devine formula dacă p este par? Aplicație pentru $p = 3, 4, 5$.

N. Abramescu, G. M. vol. XII

Soluție. Suma din membrul stîng este suma coeficienților binomiali, luați din p în p, din dezvoltarea $(1 + x)^m$.

Dacă $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_mx^m$ iar $\alpha = \cos\frac{2\pi}{p} + i\sin\frac{2\pi}{p}$

(rădăcină primitivă de ordinul p a unității), rezultă ușor identitatea:

$$a_0 + a_px^p + a_{2p}x^{2p} + \ldots = \frac{1}{p}[f(x) + f(\alpha x) + \ldots + f(\alpha^{p-1}x)].$$

(Se efectuează suma din membrul drept și se ține seama că $1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^{p-1} = 0$). Luînd $f(x) = (1 + x)^m$, această identitate devine:

$C_m^0 + C_m^px^p + C_m^{2p}x^{2p} + \ldots = \frac{1}{p}\cdot[(1 + x)^m + (1 + \alpha x)^m + (1 + \alpha^2x)^m + \ldots$

$\ldots + (1 + \alpha^{p-1}x)^m]$. Făcînd $x = 1$ și notînd cu S_p suma din membrul stîng din enunțul problemei, vom obține

$$S_p = \frac{1}{p}[2^m + (1 + \alpha)^m + (1 + \alpha^2)^m + \ldots + (1 + \alpha^{p-1})^m]. \qquad (1)$$

Însă $\alpha^k = \cos\frac{2k\pi}{p} + i\sin\frac{2k\pi}{p}$, deci $(1 + \alpha^k)^m = \left(1 + \cos\frac{2k\pi}{p} + \right.$

$$\left. + i\sin\frac{2k\pi}{p}\right)^m = \left(2\cos^2\frac{k\pi}{p} + 2i\sin\frac{k\pi}{p}\cos\frac{k\pi}{p}\right)^m =$$

$$= 2^m\cos^m\frac{k\pi}{p}\left(\cos\frac{mk\pi}{p} + i\sin\frac{mk\pi}{p}\right).$$

Să observăm că $\alpha^{p-k} = \overline{\alpha^k}$ și atunci $(1 + \alpha^{p-k})^m = (1 + \overline{\alpha^k})^m = \overline{(1 + \alpha^k)^m} =$

$$= 2^m\cos^m\frac{k\pi}{p}\left(\cos\frac{mk\pi}{p} - i\sin\frac{mk\pi}{p}\right).$$

Conform cu cele de mai sus, ținînd seama de (1) putem scrie

$$S_p = \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1}(1 + \alpha^k)^m = \frac{1}{p}\left[\sum_{k=0}^{\frac{p-1}{2}}(1 + \alpha^k)^m + \sum_{k=0}^{\frac{p-1}{2}}(1 + \alpha^{p-k})^m\right] =$$

$$= \frac{1}{p}\left[2^m + \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}2^m\cos^m\frac{k\pi}{2}\left(\cos\frac{mk\pi}{p} + i\sin\frac{mk\pi}{p}\right) + \right.$$

$$+\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} 2^m \cos^m \frac{k\pi}{p}\left(\cos\frac{mk\pi}{p} - i\sin\frac{mk\pi}{p}\right)\Bigg]$$

$$= \frac{2^m}{p}\left[1 + 2\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \cos^m \frac{k\pi}{p}\cos\frac{mk\pi}{p}\right],$$ adică identitatea din enunț.

În cazul în care p este par, observînd că $\alpha^{\frac{p}{2}} = -1$, tot după (1) avem

$$S_p = \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1}(1+\alpha^k)^m = \frac{1}{p}\left[2^m + \sum_{k=1}^{\frac{p}{2}-1}(1+\alpha^k)^m + 0 + \sum_{k=\frac{p}{2}+1}^{p-1}(1+\alpha^k)^m\right] =$$

$$= \frac{1}{p}\left[2^m + \sum_{k=1}^{\frac{p}{2}-1}(1+\alpha^k)^m + \sum_{k=1}^{\frac{p}{2}-1}(1+\alpha^{p-k})^m\right] =$$

$$= \frac{1}{p}\left[2^m + \sum_{k=1}^{\frac{p}{2}-1} 2^m \cos^m \frac{k\pi}{p}\left(\cos\frac{mk\pi}{p} + i\sin\frac{mk\pi}{p}\right) +\right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{\frac{p}{2}-1} 2^m \cos^m \frac{k\pi}{p}\left(\cos\frac{mk\pi}{p} - i\sin\frac{mk\pi}{p}\right)\right] =$$

$$= \frac{2^m}{p}\left[1 + 2\sum_{k=1}^{\frac{p}{2}-1}\cos^m\frac{k\pi}{p}\cos\frac{mk\pi}{p}\right].$$

Pentru $p = 3$ obținem

$$S_3 = 1 + C_m^3 + C_m^6 + C_m^9 + \ldots = \frac{2^m}{3}\left(1 + 2\cos^m\frac{\pi}{3}\cos\frac{m\pi}{3}\right) =$$

$$= \frac{2^m}{3}\left(1 + 2\cdot\frac{1}{2^m}\cos\frac{m\pi}{3}\right) = \frac{1}{3}\left(2^m + 2\cos\frac{m\pi}{3}\right).$$

Pentru $p = 4$ obținem

$$S_4 = 1 + C_m^4 + C_m^8 + C_m^{12} + \ldots = \frac{2^m}{4}\left(1 + 2\cos^m\frac{\pi}{4}\cos\frac{m\pi}{4}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(2^m + 2\sqrt{2^m}\cos\frac{m\pi}{4}\right).$$

În sfîrșit, pentru $p = 5$ avem

$$S_5 = \frac{2^m}{5}\left(1 + 2\cos^m\frac{\pi}{5}\cos\frac{m\pi}{5} + 2\cos^m\frac{2\pi}{5}\cos\frac{2m\pi}{5}\right) =$$

$$= \frac{1}{5}\left[2^m + 2^{m+1}\cdot\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^m\cos\frac{m\pi}{5} + 2^{m+1}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^m\cos\frac{2m\pi}{5}\right] =$$

$$= \frac{1}{5}\left[2^m + \frac{(\sqrt{5}+1)^m}{2^{m-1}}\cos\frac{m\pi}{5} + \frac{(\sqrt{5}-1)^m}{2^{m-1}}\cos\frac{2m\pi}{5}\right].$$

PD 2. *Să se găsească polinoamele ireductibile f, cu coeficienți raționali, cu proprietatea că există $\alpha \in \mathbf{C}$ astfel că dacă f admite rădăcina α, atunci admite și rădăcina α^2.*

A. G. Ioachimescu, G. M. **vol. XI**

Soluție. Fie f un polinom cu coeficienți raționali, ireductibil, cu proprietatea mai generală că admițînd o rădăcină dată α, admite și rădăcina α^q (q fiind un număr întreg).

Polinomul $f \in \mathbf{Q}[X]$ fiind ireductibil și avînd rădăcina α, rezultă că $\alpha \notin \mathbf{Q}$. Polinomul $f(X^q) \in \mathbf{Q}[X]$ admite în corpul $\mathbf{Q}(\alpha)$ rădăcina α și atunci se știe că se divide cu polinomul minimal al lui α, adică cu $f(X)$. Cum α^q este rădăcină pentru $f(X)$ va rezulta că α^q este rădăcină și pentru $f(X^q)$, adică $f((\alpha^q)^q) = 0$ sau $f(\alpha^{q^2}) = 0$. Analog luînd polinomul $f(X^{q^2})$ găsim că $f(\alpha^{q^3}) = 0$; apoi $f(\alpha^{q^4}) = 0$, $f(\alpha^{q^5}) = 0$, ... Polinomul f neputînd avea o infinitate de rădăcini, deducem că în șirul α, α^q, α^{q^2}, α^{q^3}, α^{q^4}, ... elementele nu pot fi toate distincte.

Fie deci $\alpha^{q^k} = \alpha^{q^h}$ cu $k > h$, ceea ce se mai scrie $\alpha^{q^k - q^h} = 1$ (cazul $\alpha = 0$ este exclus, căci $\alpha \notin \mathbf{Q}$). Aceasta înseamnă că α este o rădăcină a unității, deci verifică un polinom de forma $X^m - 1$.

Notînd cu $\varnothing_n(X)$ polinomul ciclotomic de ordinul n, se știe că $X^m - 1 = \prod_{d|m} \varnothing_d(X)$ și de aici rezultă că α este rădăcină a unui polinom ciclotomic $\varnothing_n(X)$, cu $n \mid m$.

Dar $\varnothing_n(X) \in \mathbf{Q}[X]$ este un polinom ireductibil și cum $\varnothing_n(\alpha) = 0$, rezultă că $\varnothing_n(X)$ se divide cu $f(X)$; aceasta înseamnă că cele două polinoame sînt asociate în divizibilitate, adică $f(X) = a\varnothing_n(X)$, $a \in \mathbf{Q}^*$.

Se știe de asemenea că dacă α este rădăcină a polinomului $\varnothing_n(X)$ (deci este rădăcină primitivă de ordinul n a unității), atunci orice rădăcină a lui $\varnothing_n(X)$ este de forma α^t, unde t este un întreg relativ prim cu n.

Cum α^q trebuie să fie rădăcină pentru $f(X)$, deci pentru $\varnothing_n(X)$, deducem că n și q sînt relativ prime.

Așadar, am ajuns la condiția necesară că $f(X)$ este un polinom de forma $a\varnothing_n(X)$, unde $a \in \mathbf{Q}^*$ și n este un număr natural relativ prim cu q. Această condiție este și suficientă, deoarece dacă α este o rădăcină a lui $\varnothing_n(X)$, cum n și q sînt relativ prime, rezultă că și α^q este rădăcină a lui $\varnothing_n(X)$.

Deci polinoamele căutate sînt de tipul $a\varnothing_n(X)$, cu $a \in \mathbb{Q}^*$ și $(n, q) = 1$.
În cazul problemei noastre $q = 2$, deci polinoamele căutate sînt $a\varnothing_n(X)$, cu $a \in \mathbb{Q}^*$ și n natural impar.

PD 3. *Să se găsească forma generală a unui polinom cu coeficienți raționali, ireductibil, ale cărui rădăcini să se exprime ca funcții raționale de una sau mai multe rădăcini ale ecuației* $x^5 - 1 = 0$.

A. G. Ioachimescu, G. M. vol. XI

Soluție dată de Traian Lalescu în nota „O problemă de algebră" (GM. vol. XIV) unde, folosind teoria lui Galois extinde chestiunea pentru cazul ecuației $x^p - 1 = 0$ (p prim) și chiar mai general.
Cazul cînd rădăcina ecuației $x^5 - 1 = 0$ ar fi 1 este banal, deoarece atunci rădăcinile polinomului căutat vor fi raționale și acesta fiind ireductibil va trebui să fie de gradul I.
Vom căuta deci polinoamele $f \in \mathbb{Q}[X]$ ireductibile, ale căror rădăcini să se exprime ca funcții raționale de una sau mai multe rădăcini ale ecuației

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0. \tag{1}$$

Notînd cu α o rădăcină a acestei ecuații rezultă că α este rădăcină primitivă de ordinul 5 a unității, deci rădăcinile ecuației (1) vor fi α, α^2, α^3, α^4.
Fie y_1 o rădăcină a unui polinom căutat f. Din enunț rezultă că $y_1 \in \mathbb{Q}(\alpha)$.
Se știe că extinderea de corpuri $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\alpha)$ este de gradul 4, o bază a lui $\mathbb{Q}(\alpha)$ peste $\mathbb{Q}$ fiind $\{1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3\}$.
Atunci $(\exists)$ $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ unice, astfel încît

$$y_1 = a + b\alpha + c\alpha^2 + d\alpha^3 \tag{2}$$

Polinomul $f \in \mathbb{Q}[X]$ avînd rădăcina $y_1 \in \mathbb{Q}(\alpha)$ se va divide cu polinomul minimal $g \in \mathbb{Q}[X]$ al elementului y_1; cum f este ireductibil, va rezulta că f este asociat în divizibilitate cu g, adică $f = ug$, $u \in \mathbb{Q}^*$. Toată problema se reduce la a determina polinomul minimal g. Polinomul minimal g admite o dată cu rădăcina y_1 și rădăcinile conjugate ale acesteia, adică elementele $y_2, y_3, y_4 \in \mathbb{Q}(\alpha)$, ce se obțin din (2) înlocuind pe α respectiv cu α^2, α^3, α^4. Considerînd polinomul $h = (X - y_1)(X - y_2)(X - y_3)(X - y_4) \in \mathbb{Q}[X]$, rezultă că $g = h$, dacă h este ireductibil, respectiv g este un divizor al lui h, dacă h este reductibil.
Să ne oprim asupra ultimului caz. Cînd h este reductibil, se știe că el este o putere a unui polinom ireductibil, adică în cazul nostru $h = g^2$ (nu putem avea $h = g^4$, căci atunci g ar fi de gradul I și ar însemna că $y_1 \in \mathbb{Q}$, contradicție). Aceasta înseamnă că dintre rădăcinile y_1, y_2, y_3, y_4 numai două sînt distincte și au ordinul de multiplicitate 2.
Se constată că singurele egalități posibile sînt: $y_1 = y_4$ și $y_2 = y_3$, adică

$$a + b\alpha + c\alpha^2 + d\alpha^3 = a + b\alpha^4 + c\alpha^3 + d\alpha^2$$

$$a + b\alpha^2 + c\alpha^4 + d\alpha = a + b\alpha^3 + c\alpha + d\alpha^4$$

de unde, ţinînd seama de liniar independenţa elementelor $1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3$, rezultă $b = 0$ şi $c = d$.
Deducem $y_1 = a + c(\alpha^2 + \alpha^3)$, $y_2 = a + c(\alpha^4 + \alpha)$ şi $g = (X - y_1)(X - y_2) = X^2 - (2a - c)X + a^2 - ac - c^2$.
În concluzie, dacă în (2) avem $b \neq 0$ sau $c \neq d$, polinomul $h = (X - y_1) \cdot (X - y_2)(X - y_3)(X - y_4)$ este ireductibil şi atunci $g = h$, iar dacă în (2) avem $b = 0$ şi $c = d$, atunci h este reductibil şi vom avea $g = X^2 - (2a - c)X + a^2 - ac - c^2$.
În sfîrşit, polinomul căutat f este de forma $f = ug$, cu $u \in \mathbf{Q}^*$.

PD 4. *Fie p un număr prim de forma $4k + 3$. Să se arate că pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$, polinomul $(X^2 + 1)^n + p$ este ireductibil în inelul $\mathbf{Z}[X]$.*

Nicolae Popescu, G. M. 2/1984

Soluţie. Să presupunem prin absurd că există $n \in \mathbf{N}^*$ cu proprietatea că polinomul $(X^2 + 1)^n + p$ este reductibil în inelul $\mathbf{Z}[X]$. Aceasta înseamnă că există două polinoame g şi h, neinversabile în inelul $\mathbf{Z}[X]$ (adică distincte de polinoamele constante 1 şi -1), astfel încît:

$$(X^2 + 1)^n + p = gh. \tag{1}$$

Fie $\bar{g}$, $\bar{h}$ polinoamele din inelul $\mathbf{Z}_p[X]$ obţinute prin trecerea la clase de resturi modulo p a coeficienţilor polinoamelor g, respectiv h. Egalitatea (1) devine în inelul $\mathbf{Z}_p[X]$:

$$(X^2 + \hat{1})^n = \bar{g} \cdot \bar{h}. \tag{2}$$

Se ştie că dacă p este număr prim de forma $4k + 3$, numărul -1 nu este rest pătratic modulo p, adică nu există nici un element $\hat{x} \in \mathbf{Z}_p$ cu proprietatea $-\hat{1} = \hat{x}^2$.
Altfel spus, polinomul $X^2 + \hat{1} \in \mathbf{Z}_p[X]$ nu are rădăcini în corpul $\mathbf{Z}_p$ şi fiind de gradul doi, rezultă că acest polinom este ireductibil în inelul $\mathbf{Z}_p[X]$.
Atunci din (2), deducem că există $k \in \{0, 1, ..., n\}$ astfel încît

$$\bar{g} = (X^2 + \hat{1})^k, \ \bar{h} = (X^2 + \hat{1})^{n-k}.$$

Trecînd înapoi la polinoame din $\mathbf{Z}[X]$, deducem că există două polinoame $g_1, h_1 \in \mathbf{Z}[X]$, astfel încît

$$g = (X^2 + 1)^k + pg_1, \ h = (X^2 + 1)^{n-k} + ph_1. \tag{3}$$

Dar atunci

$$gh = (X^2 + 1)^n + p[(X^2 + 1)^k h_1 + (X^2 + 1)^{n-k} g_1] + p^2 g_1 h_1. \tag{4}$$

Comparînd egalităţile (1) şi (4) deducem că trebuie să avem

$$(X^2 + 1)^k \cdot h_1 + (X^2 + 1)^{n-k} \cdot g_1 = 1 \text{ şi } g_1 h_1 = 0.$$

Dacă $g_1 = 0$, din prima condiţie rezultă în mod necesar $k = 0$ şi atunci prima egalitate din (3) devine $g = 1$, deci g ar fi polinom inversabil în inelul $\mathbf{Z}[X]$,

contradicție. Dacă $h_1 = 0$, rezultă analog $k = n$ și atunci din (3) obținem $h = 1$, contradicție. Contradicția obținută arată că egalitatea (1) este imposibilă și cu aceasta problema este rezolvată.

PD 5. *Fie* $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x + \ldots + a_nx^n$ *un polinom cu coficienți reali ale cărui rădăcini formează grup față de înmulțire. Atunci coeficienții polinomului satisfac relația:*

$$a_k = (-1)^{n_0} a_{n-k},\ k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n$$

unde n_0 *este ordinul de multiplicitate al rădăcinii* $x = 1$.

Marcel Țena, G. M. 11/1972

Soluție. Vom numi polinom reciproc de speța I un polinom cu proprietatea $a_k = a_{n-k},\ k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n$, respectiv vom numi polinom reciproc de speța a II-a un polinom cu proprietatea $a_k = -a_{n-k},\ k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n$.

Lema 1. Produsul a două polinoame reciproce de speța I este un polinom reciproc de speța I.

Demonstrație. Fie $P(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ și $Q(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m$ două polinoame reciproce de speța I și fie $P(x)\,Q(x) = c_0 + c_1x + \ldots + c_{n+m}x^{n+m}$ produsul lor. Pentru orice $0 \leqslant k \leqslant n + m$ avem $c_k = \sum_{i+j=k} a_i \cdot b_j$, deci $c_{n+m-k} = \sum_{r+s=n+m-k} a_rb_s =$ (notăm $r = n - i,\ s = m - j$) $= \sum_{i+j=k} a_{n-i}b_{m-j} = \sum_{i+j=k} a_ib_j = c_k$, ceea ce arată că și polinomul produs este reciproc de speța I. În mod analog se demonstrează:

Lema 2. Produsul a două polinoame reciproce de speța a II-a este un polinom reciproc de speța I.

Lema 3. Produsul dintre un polinom reciproc de speța I și un polinom reciproc de speța a II-a este un polinom reciproc de speța a II-a.
Demonstrăm acum:

Lema 4. Orice subgrup al grupului $(\mathbf{C}^*,.)$ este un grup de rădăcini ale unității.

Demonstrație. Fie $(G,.)$ un subgrup cu n elemente al grupului $(\mathbf{C}^*,.)$ și fie $(U_n,.)$ grupul rădăcinilor unității de ordinul n.
Pentru orice $x \in G$ avem $x^n = 1$ (consecință a teoremei lui Lagrange), deci $x \in U_n$. Așadar $G \subset U_n$ și cum ambele grupuri au cîte n elemente, incluziunea este chiar egalitate.
Să trecem, pe baza acestei pregătiri, la soluționarea propriu-zisă a problemei. Conform lemei 4, rădăcinile polinomului vor fi rădăcini ale unității, prin urmare vor avea modulul egal cu 1. Polinomul fiind cu coeficienți reali, va admite cu fiecare rădăcină complexă nereală și conjugata acesteia, cu același

ordin de multiplicitate. Putem presupune atunci că rădăcinile distincte ale polinomului $P(x)$ sînt 1, -1, x_2, $\bar{x}_2$, ..., x_p, $\bar{x}_p$ cu ordinele de multiplicitate respectiv n_0, n_1, n_2, n_2, ..., n_p, $n_p (n_j \geqslant 0, j = 0, 1, ..., p)$. Polinomul se scrie

$$P(x) = a_n(x-1)^{n_0}(x+1)^{n_1}[(x-x_2)(x-\bar{x}_2)]^{n_1} \ldots [(x-x_p)(x-\bar{x}_p)]^{n_p}.$$

Dacă $x_j = \cos\alpha_j + i\sin\alpha_j$, atunci $\bar{x}_j = \cos\alpha_j - i\sin\alpha_j$ $(j = 2, 3, .., p)$, deci $(x-x_j)(x-\bar{x}_j) = x^2 - 2x\cos\alpha_j + 1$, care este un polinom reciproc de speța I.

Conform lemei I polinomul $[(x-x_j)(x-\bar{x}_j)]^{n_j}$ este reciproc de speța I și $\prod_{j=2}^{p}[(x-x_j)(x-\bar{x}_j)]^{n_j}$ este de asemenea polinom reciproc de speța I.

Polinomul $x+1$ este reciproc de speța I și atunci $(x+1)^{n_1}$ este reciproc de speța I: polinomul $x-1$ este reciproc de speța a II-a și atunci conform lemelor 2 și 3 rezultă că $(x-1)^{n_0}$ este reciproc de speța I cînd n_0 este par, respectiv reciproc de speța a II-a cînd n_0 este impar.

În concluzie, polinomul $P(x)$ este reciproc de speța I dacă n_0 este par, respectiv reciproc de speța a II-a dacă n_0 este impar.

Rezultă relația între coeficienți $a_k = (-1)^{n_0} \cdot a_{n-k}$, $k = 0, 1, 2, ..., n$.

Comentarii. Rezultatul este valabil cu aceeași demonstrație, în cazul mai general cînd singura cerință asupra rădăcinilor este să aibă modulul 1. De asemenea, în nota matematică „Asupra problemei 12 511" din GM nr. 6/1976 același autor, Marcel Țena, arată că în cazul unui polinom cu coeficienți reali $P(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$, ale cărui rădăcini au același modul $\rho > 0$, există relația $a_k = (-1)^{n_0} \cdot \rho^{n-2k} \cdot a_{n-k}$, $k = 0, 1, 2, ..., n$, unde $n_0 \geqslant 0$ este ordinul de multiplicitate al rădăcinii $x = \rho$.

În nota „Asupra unei clase de polinoame (GM. nr. 1/1983) autorul Florin Vulpescu-Jalea, folosind o altă metodă, extinde rezultatul la cazul polinoamelor cu coeficienți complecși arătînd că dacă rădăcinile polinomului $P(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$ cu coeficienți complecși au același modul $\rho > 0$, atunci coeficienții satisfac relația:

$$a_k = \frac{a_n}{\bar{a}_0} \cdot \rho^{2n-2k}\bar{a}_{n-k},\ k = 0, 1, 2, ..., n.$$

PD 6. *Fie polinomul* $\mathbf{R} \in R[X]$ *astfel încît pentru oricare* $n \in \mathbf{N}$ *ecuația* $P(x) = n$ *are cel puțin o rădăcină rațională. Să se demonstreze că* $P = aX + b$ *cu* a, b *raționali.*

Marius Dădărlat, G. M. 11/1985

Soluție. Prin ipoteză $(\forall)\ n \in \mathbf{N}$, $(\exists)\ x_n \in \mathbf{Q}$ astfel încît $P(x_n) = n$, ceea ce implică faptul că P are coeficienți raționali. Într-adevăr, notînd grad $P = k$, sistemul de ecuații

$$P(x_n) = n,\ n = 0, 1, 2, .., k$$

avînd drept necunoscute coeficienții polinomului, este un sistem Cramer a cărui soluție depinde de numere raționale, deci are componentele raționale. Arătăm acum că $(\exists)\ \varepsilon > 0$ astfel încît $(\forall)\ n, m \in \mathbf{N}$, $n \neq m$ rezultă

$$|x_n - x_m| \geqslant \varepsilon. \tag{1}$$

Fie $P(x) = \sum_{i=0}^{k} \frac{p_i}{q_i} x^{k-i}$ unde $p_i,\ q_i \in \mathbf{Z},\ (p_i,\ q_i) = 1$, pentru $i = 0,\ 1,\ \ldots,\ k$.

Dacă $x_n = \frac{p}{q}$, avem $P\left(\frac{p}{q}\right) = n \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{k} \frac{p_i}{q_i} \left(\frac{p}{q}\right)^{k-i} = n$ și înmulțind cu $[q_0,\ q_1,\ \ldots,\ q_k]$ (cel mai mic multiplu comun al numerelor nenule $q_0,\ q_1,\ \ldots,\ q_k$) obținem că p/q verifică ecuația cu coeficienți întregi:

$$\sum_{i=0}^{k} [q_0,\ q_1,\ \ldots,\ q_k] \frac{p_i}{q_i} x^{k-i} - n\,[q_0,\ q_1,\ \ldots,\ q_k] = 0.$$

Rezultă că q divide coeficientul termenului de grad maxim, adică q divide $\frac{p_0}{q_0}[q_0,\ q_1,\ \ldots,\ q_k] \overset{\text{not}}{=} \alpha \in \mathbf{Z}^*$. Rezultă $|q| < |\alpha|$.

În mod analog, dacă $x_m = \frac{p'}{q'}$, din faptul că $P(x_m) = m$, rezultă că q' divide α, deci $|q'| \leqslant |\alpha|$. Atunci, luînd $\varepsilon = \frac{1}{\alpha^2}$ avem (ținem cont că $n \neq m \Rightarrow x_n \neq x_m$ deci $pq' \neq p'q$):

$$|x_m - x_n| = \left|\frac{p}{q} - \frac{p'}{q'}\right| = \left|\frac{pq' - p'q}{qq'}\right| \geqslant \frac{1}{|qq'|} \geqslant \frac{1}{\alpha^2} = \varepsilon.$$

Vom încheia rezolvarea, arătînd că polinomul derivat P' are funcția polinomială mărginită pe $\mathbf{R}$, ceea ce va arăta că P' este un polinom constant și atunci P va fi de forma din enunț.

Să presupunem prin absurd că funcția P' este nemărginită; atunci $\lim_{x \to \infty} |P'(x)| = +\infty$, deci $(\exists)\ a > 0$ astfel încît

$$|x| \geqslant a \Rightarrow |P'(x)| > 2\alpha^2 + 1. \tag{2}$$

Deoarece $P(x_n) = n \to \infty$, rezultă $|x_n| \to \infty$ și fie atunci $n_0 \in \mathbf{N}$, astfel încît $|x_{n_0}| \geqslant a$, $|x_{n_0+1}| \geqslant a$, $|x_{n_0+2}| \geqslant a$.

Dintre numerele distincte x_{n_0}, x_{n_0+1}, x_{n_0+2} cel puțin două au același semn, fie de exemplu x_{n_0} și x_{n_0+2}.

Conform teoremei lui Lagrange, $(\exists)\ \xi \in (x_{n_0},\ x_{n_0+2})$ astfel încît

$$P'(\xi) = \frac{P(x_{n_0+2}) - P(x_{n_0})}{x_{n_0+2} - x_{n_0}} = \frac{(n_0 + 2) - n_0}{x_{n_0+2} - x_{n_0}} = \frac{2}{x_{n_0+2} - x_{n_0}}$$

și deci

$$|P'(\xi)| = \frac{2}{|x_{n_0+2} - x_{n_0}|} \overset{(1)}{\leqslant} 2/\varepsilon = 2\alpha^2. \tag{3}$$

Pe de altă parte, $|x_{n_0+2}| \geqslant a$, $|x_{n_0}| \geqslant a$ și cum x_{n_0+2} și x_{n_0} au același semn, rezultă că și $|\xi| \geqslant a$. Atunci, din (2):

$$|P'(\xi)| > 2\alpha^2 + 1. \tag{4}$$

Relațiile (3) și (4) dau contradicția căutată și cu aceasta problema este rezolvată.

Observație. Dacă am fi luat numerele x_{n_0} și x_{n_0+1} sau x_{n_0+1} și x_{n_0+2} ca având același semn, obținem

$$|P'(\xi)| = \frac{1}{|x_{n_0+1} - x_{n_0}|} \text{ sau } |P'(\xi)| = \frac{1}{|x_{n_0+2} - x_{n_0+1}|},$$

deci oricum $|P'(\xi)| \leqslant \frac{1}{\varepsilon} = \alpha^2 < 2\alpha^2$, adică de asemenea se regăsește relația (3).

PD 7. *Fie* $q \in \mathbf{Z}$, cu $|q| > 1$. *Să se arate că are loc relația:*

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{q^k}\right)^{\varphi(k)/k} = e^{-1/(q-1)},$$

unde φ *este indicatorul lui Euler.*

Dan Radu, G. M. A, 6/1973

Soluție. Deoarece $|q| > 1$ rezultă că seria $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{q^m}$ este absolut convegentă. Avem, ținînd seama de suma unei serii geometrice

$$\frac{1}{q-1} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{q^m} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{mq^m} \cdot m$$

și din formula lui Gauss $m = \sum_{k|m} \varphi(k)$, rezultă

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k|m} \frac{\varphi(k)}{mq^m} = \frac{1}{q-1}.$$

Aceasta se mai poate scrie și sub forma

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\varphi(k)}{dkq^{dk}} = \frac{1}{q-1} \text{ sau } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi(k)}{k} \cdot \sum_{d=1}^{\infty} \frac{-1}{d \cdot (q^k)^d} = -\frac{1}{q-1}.$$

Folosind dezvoltarea în serie de puteri a funcției $\ln(1-x)$ și anume $\ln(1-x) = \sum_{d=1}^{\infty} \frac{-x^d}{d}$, în care facem $x = \frac{1}{q^k}$, obținem că $\sum_{d=1}^{\infty} \frac{-1}{d(q^k)^d} = \ln\left(1 - \frac{1}{q^k}\right)$.

Atunci înlocuind în egalitatea obținută mai înainte, obținem

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi(k)}{k} \ln\left(1 - \frac{1}{q^k}\right) = -\frac{1}{q-1}$$

sau

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{q^k}\right)^{\frac{\varphi(k)}{k}} = -\frac{1}{q-1},$$

relație echivalentă cu cea din enunț.

PD 8. *Arătați că există un izomorfism de grupuri*

$$(\mathbf{Q}^*, .) \simeq (\mathbf{Z}_2, +) \times (\mathbf{Z}[X], +).$$

Toma Albu, G. M. Metodică, 1–2/1982

Soluție. Fie $p_0 = 2$, $p_1 = 3$, $p_2 = 5$, ..., p_n, ... șirul numerelor prime pozitive. Să observăm că orice număr rațional nenul se scrie în mod unic sub forma

$$(-1)^a \cdot p_0^{k_0} \cdot p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \ldots p_n^{k_n} \ldots \tag{1}$$

unde $a \in \{0, 1\}$, iar $k_i \in \mathbf{Z}$, $i = 0, 1, 2, \ldots$ și $k_i \neq 0$ doar pentru un număr finit de indici i.
Definim atunci funcția:

$$\varphi: (\mathbf{Q}^*, .) \to (\mathbf{Z}_2, +) \times (\mathbf{Z}[X], +),$$

$$\varphi[(-1)^a \cdot p_0^{k_0} \cdot p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots p_n^{k_n} \ldots] = (\hat{a}, k_0 + k_1 X + \ldots + k_n X^n + \ldots),$$

despre care se poate arăta foarte ușor că este morfism de grupuri.
Dacă $\varphi[(-1)^a \cdot p_0^{k_0} \cdot p_1^{k_1} \ldots p_n^{k_n} \ldots] = (\hat{0}, 0 + 0X + \ldots + 0X^n + \ldots)$ rezultă $a = 0$, $k_0 = k_1 = \ldots = k_n = \ldots = 0$ și deci $(-1)^a \cdot p_0^{k_0} \cdot p_1^{k_1} \ldots p_n^{k_n} \ldots = 1$. Această înseamnă că $\operatorname{Ker} \varphi = \{1\}$, deci φ este injectiv. În sfîrșit, dacă $(\hat{a}, k_0 + k_1 X + \ldots + k_n X^n + \ldots) \in (\mathbf{Z}_2, +) \times (\mathbf{Z}[X], +)$, considerăm elementul $(-1)^a \cdot p_0^{k_0} \cdot p_1^{k_1} \ldots p_n^{k_n} \ldots \in (\mathbf{Q}^*, .)$ și avem $\varphi[(-1)^a \cdot p_0^{k_0} \cdot p_1^{k_1} \ldots p_n^{k_n} \ldots] = (\hat{a}, k_0 + k_1 X + \ldots + k_n X^n + \ldots)$.

Aceasta înseamnă că φ este surjectiv. Rezultă că φ este morfism bijectiv și deci un izomorfism de grupuri.

PD 9. *Fie $n \in \mathbf{N}$. Să se arate că există $r \in \mathbf{N}^*$ și $a_1, a_2, \ldots, a_r, b_1, b_2, \ldots, b_r \in \mathbf{Q}$ astfel încît*

$$\sqrt[3]{n} = a_1 \sin b_1\pi + a_2 \sin b_2\pi + \ldots + a_r \sin b_r\,\pi.$$

Marcel Țena, G. M. 9/1979

Soluție. Presupunem mai întîi că n este liber de pătrate și considerăm corpul pătratic $\mathbf{Q}(\sqrt{-n}) = \mathbf{Q}(i\sqrt{n})$, care este o extindere abeliană finită a corpului $\mathbf{Q}$. Deoarece orice extindere abelină finită a corpului $\mathbf{Q}$ este subcorp

al unui corp ciclotomic (teorema Kronecker-Weber), rezultă că există $\xi = \cos\frac{2\pi}{k} + i \sin\frac{2\pi}{k}$, $k \in \mathbf{N}$, astfel încît $\mathbf{Q}(i\sqrt{n}) \subset \mathbf{Q}(\xi)$. În particular $i\sqrt{n} \in \mathbf{Q}(\xi)$, deci se poate scrie sub forma $i\sqrt{n} = \sum_{j=0}^{r} a_j \xi^j$, unde $r \in \mathbf{N}$ și $a_j \in \mathbf{Q}$. Aceasta este echivalent cu

$$i\sqrt{n} = \sum_{j=0}^{r} a_j \left(\cos\frac{2j\pi}{k} + i \sin\frac{2j\pi}{k}\right).$$

Egalînd părțile imaginare obținem

$$\sqrt{n} = \sum_{j=1}^{r} a_j \sin b_j\pi \text{ cu } a_j, b_j \in \mathbf{Q},\ j \in \{1, 2, \ldots, r\}.$$

Dacă n nu este liber de pătrate, putem scrie $n = p^2m$ cu m liber de pătrate, deci $\sqrt{n} = p\sqrt{m}$ și deoarece pentru $\sqrt{m}$ avem o scriere ca mai sus, rezultă imediat că și pentru n avem o astfel de scriere.

PD 10. *Dacă $f \in \mathbf{Q}[X]$ este un polinom ireductibil de gradul 3, avînd rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{C}$, demonstrați că numerele complexe $f'(x_1)$, $f'(x_2)$, $f'(x_3)$ sînt două cîte două distincte, f' fiind derivata polinomului f.*

Toma Albu, G. M. 1/1982

Soluție. Fie $f = a(X - x_1)(X - x_2)(X - x_3)$, $a \in \mathbf{Q}^*$.
Să presupunem prin absurd că două din numerele $f'(x_1)$, $f'(x_2)$, $f'(x_3)$ sînt egale, de exemplu, $f'(x_1) = f'(x_2)$.
Această egalitate este echivalentă cu:

$$a(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) = a(x_2 - x_1)(x_2 - x_3). \tag{1}$$

Polinomul f fiind ireductibil, este polinomul minimal al elementului $x_1 \in K = \mathbf{Q}(x_1, x_2, x_3)$; extinderea $\mathbf{Q} \subset K$ fiind de caracteristică zero este separabilă, deci x_1 este rădăcină simplă pentru polinomul său minimal f. Rezultă $x_1 \neq x_2$ și din (1) deducem $x_1 - x_3 = x_3 - x_2$ sau $x_1 + x_2 = 2x_3$. Dar folosind relațiile lui Viète, suma $x_1 + x_2 + x_3$ este un număr rațional. Deci $3x_3 \in \mathbf{Q}$, adică $x_3 \in \mathbf{Q}$, contradicție (un polinom ireductibil în $\mathbf{Q}[X]$ nu poate avea rădăcini în corpul $\mathbf{Q}$).

PD 11. *Arătați că în inelul tuturor matricelor pătrate de un ordin arbitrar, formate cu elemente din inelul $\mathbf{Z}_n$, există relația:*

$$m = k \cdot \varphi(n)$$

unde m este numărul matricelor inversabile, k este numărul matricelor cu determinantul egal cu $\hat{1}$, iar $\varphi(n)$ este indicatorul lui Euler.

Marcel Țena, G. M. Metodică, 4/1981

Soluția I. Se știe că o clasă $\hat{i} \in \mathbf{Z}_n$ este inversabilă în inelul $\mathbf{Z}_n$ dacă și numai dacă numerele i și n sînt relativ prime.

Fie $U = \{\hat{i}_1 = \hat{1}, \hat{i}_2, \ldots, \hat{i}_{\varphi(n)}\}$ mulțimea elementelor inversabile din inelul $\mathbf{Z}_n$, $\mathcal{J}$ mulțimea matricilor inversabile din inelul de matrice considerat, iar $\mathcal{A}$ mulțimea matricilor care au determinantul egal cu $\hat{1}$. Se observă ușor că $A \in \mathcal{J} \Leftrightarrow \det A \in U$, adică o matrice este inversabilă, dacă și numai dacă determinantul său este inversabil. Atunci putem scrie

$$\mathcal{J} = \{A \mid \det A = \hat{i}_1\} \cup \{A \mid \det A = \hat{i}_2\} \cup \ldots \cup \{A \mid \det A = \hat{i}_{\varphi(n)}\},$$

iar în această reuniune de mulțimi disjuncte prima mulțime este $\mathcal{A}$.
Dacă $\hat{i} \in \{\hat{i}_2, \hat{i}_3, \ldots, \hat{i}_{\varphi(n)}\}$, vom arăta că mulțimea $\{A \mid \det A = \hat{i}\}$ are același cardinal ca și mulțimea $\mathcal{A}$.

În adevăr, fie funcția $f: \mathcal{A} \to \{A \mid \det A = \hat{i}\}$ definită prin $f(A) = B$, unde B este matricea ce se obține din matricea A înmulțindu-i prima linie cu $\hat{i}$; de asemenea, fie funcția g: $\{A \mid \det A = \hat{i}\} \to \mathcal{A}$ definită prin $g(A) = B$, unde B este de data aceasta matricea ce se obține din A înmulțindu-i prima linie cu $\hat{i}^{-1}$. Cele două funcții sînt funcții inverse, deci bijective și atunci Card $\{A \mid \det A = \hat{i}\}$ = Card $\mathcal{A}$. Notînd cu k cardinalul comun al tuturor mulțimilor care apar în membrul drept al egalității (1), obținem prin trecere la cardinale $m = k \cdot \varphi(n)$.

Soluția II. Cu notațiile de la soluția precedentă, considerînd morfismul de grupuri multiplicative

$$\theta: (\mathcal{J}, .) \to (U, .), \ \theta(A) = \det A,$$

se constată ușor că avem $\operatorname{Ker} \theta = \mathcal{A}$.

În plus, observăm că θ este un morfism surjectiv. Conform teoremei fundamentale de izomorfism, rezultă atunci $\mathcal{J}/\mathcal{A} \simeq U$

și trecînd la cardinale obținem $\frac{m}{k} = \varphi(n)$, adică relația cerută.

PD 12. *Fie* $\mathbf{R}$ *mulțimea numerelor reale și* $\mathcal{F}$ *mulțimea tuturor funcțiilor discontinue* f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *care satisfac condiția*

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

oricare ar fi $x, y \in \mathbf{R}$.

Să se demonstreze că $\mathcal{F}$ *este o mulțime echipotentă cu mulțimea* $\mathcal{P}(\mathbf{R})$ *a tuturor părților* $\mathbf{R}$.

Toma Albu, G. M. A, 8/1971

Soluție. Fie $\mathcal{C}$ mulțimea tuturor funcțiilor continue $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ care satisfac condiția $f(x + y) = f(x) + f(y)$, oricare ar fi $x, y \in \mathbf{R}$. Se știe că $\mathcal{C} = \{f_a \mid f_a: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f_a(x) = ax\}$, deci mulțimea $\mathcal{C}$ este echipotentă cu $\mathbf{R}$.

Dacă G este un grup abelian aditiv, vom nota cu Hom (G, G) mulțimea endomorfismelor sale (care se poate organiza ca grup abelian aditiv). Observăm că mulțimile $\mathscr{C}$ și $\mathscr{F}$ dau o partiție a mulțimii Hom $(\mathbf{R}, \mathbf{R})$. Considerînd $\mathbf{R}$ ca spațiu vectorial peste corpul $\mathbf{Q}$ al numerelor raționale și alegînd o bază a acestui spațiu vectorial, deducem că există un izomorfism de $\mathbf{Q}$ — spații vectoriale și deci de grupuri abeliene $\varphi: \mathbf{R} \to \sum_{i \in I} Q_i$, unde I este o mulțime echipotentă cu $\mathbf{R}$ iar $Q_i = \mathbf{Q}$, $(\forall)\, i \in I$. Fie J o mulțime echipotentă cu mulțimea $\mathbf{R}$ a numerelor reale și $Q_j = \mathbf{Q}$, $(\forall) j \in J$. Cum $\prod_{j \in J} Q_j$ este un spațiu vectorial peste $\mathbf{Q}$ de dimensiune $\mathfrak{C}$, rezultă că există un izomorfism de $\mathbf{Q}$ — spații vectoriale și deci de grupuri abeliene, $\psi: \mathbf{R} \to \prod_{i \in I} Q_i$. Atunci avem izomorfismele de grupuri abeliene

$$\text{Hom}\,(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \simeq \text{Hom}\left(\sum_{i \in I} Q_i, \prod_{j \in J} Q_i\right) \simeq \prod_{(i,j) \in I \times J} \text{Hom}\,(Q_i, Q_j) \simeq \mathbf{Q}^{I \times I},$$

deoarece se știe că Hom $(\mathbf{Q}, \mathbf{Q}) \simeq \mathbf{Q}$.
Rezultă că Hom $(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ are cardinalul $\aleph_0^{\mathfrak{C}} = 2^{\mathfrak{C}}$, de unde rezultă imediat că $\mathscr{F}$ are cardinalul $2^{\mathfrak{C}}$, ca și mulțimea $\mathscr{P}(\mathbf{R})$.

PD 13. *Pentru fiecare $n \in \mathbf{N}^*$ notăm cu ζ_n o rădăcină primitivă a unității de ordinul n. Arătați că:*

K este un corp de numere algebrice abelian $\Leftrightarrow K = \mathbf{Q}(\alpha)$ cu $\alpha \in \mathbf{Q}\,(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n, \ldots)$

Marcel Țena, G. M. Metodică, 1–2/1982

Soluție ($\Rightarrow$). Fie K un corp de numere algebrice abelian, adică o extindere finită și abeliană a lui $\mathbf{Q}$.
Fiind extindere finită și separabilă, admite un element primitiv, adică $K = \mathbf{Q}(\alpha)$. Conform teoremei Kronecker-Weber, care afirmă că orice extindere abeliană finită a lui $\mathbf{Q}$ este subcorp al unui corp ciclotomic, deducem că există ζ_n astfel încît

$K \subset \mathbf{Q}(\zeta_n)$. Așadar $\alpha \in K \subset \mathbf{Q}(\zeta_n) \subset \mathbf{Q}(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \xi_n, \ldots)$, adică

$$\alpha \in \mathbf{Q}(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n, \ldots).$$

($\Leftarrow$). Fie acum $K = \mathbf{Q}(\alpha)$ cu $\alpha \in \mathbf{Q}(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n, \ldots)$.

Deoarece ζ_i sînt algebrice peste $\mathbf{Q}$, rezultă că α se scrie ca o combinație liniară finită de produse de puteri naturale ale diferitelor elemente $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n, \ldots$ cu coeficienți raționali. Să presupunem că în expresia lui α apar $\zeta_{i_1}, \ldots, \zeta_{i_t}$. Luînd atunci $n = \text{c.m.m.m.c}\,(i_1, \ldots, i_t)$, rezultă că $\alpha \in \mathbf{Q}(\zeta_n)$ și deci $K = \mathbf{Q}(\alpha) \subset \mathbf{Q}(\zeta_n)$. Rezultă că $\mathbf{Q} \subset K$ este o extindere finită și galoisiană, deoarece grupul Galois $G(\mathbf{Q}(\zeta_n) \mid K)$ este un subgrup normal în grupul abelian

$G(\mathbb{Q}(\zeta_n) \mid \mathbb{Q})$. Dar atunci din teorema fundamentală a teoriei lui Galois avem $G(K \mid \mathbb{Q}) \simeq G(\mathbb{Q}(\zeta_n) \mid \mathbb{Q})/G(\mathbb{Q}(\zeta_n) \mid K)$, care fiind un grup cît al unui grup abelian, este tot abelian. Aşadar, $K = \mathbb{Q}(\alpha)$ este extindere finită şi abeliană a lui $\mathbb{Q}$, adică un corp de numere algebrice abelian.

PD 14. *Fiind date grupurile ciclice finite A şi B, să se calculeze numărul morfismelor de grup definite pe grupul A cu valori în grupul B.*

Alexandru Dimca, G.M. A, 12/1972

Soluţie. Fie $f: A \to B$ un morfism fixat de grupuri şi să notăm cu m, n, d respectiv ordinele grupurilor A, B, $f(A)$.

Deoarece $f(A)$ este subgrup al grupului G, conform teoremei lui Lagrange rezultă că $d \mid n$.

Conform teoremei fundamentale de izomorfism avem

$$A/\mathrm{Ker}\, f \simeq f(A)$$

şi atunci rezultă (trecînd la cardinal în această relaţie) că $d \mid m$. Prin urmare $d \mid (m, n)$, unde (m, n) este cel mai mare divizor comun al numerelor m şi n. Deoarece imaginea unui grup ciclic este un grup ciclic, rezultă că $f(A)$ este un grup ciclic de ordinul d şi atunci se ştie că are $\varphi(d)$ generatori, unde φ este indicatorul lui Euler.

Grupul B fiind ciclic, are un singur subgrup de ordinul d şi anume pe $f(A)$. Să vedem care sînt toate morfismele $g: A \to B$ pentru $g(A) = f(A)$, adică avînd proprietatea că au ca imagine un subgrup cu d elemente al grupului B.

Dacă $A = \{e, a, a^2, \ldots, a^{m-1}\}$, observăm că $g(a)$ este un generator al lui $g(A)$.

Cum $g(A) = f(A)$ care are $\varphi(d)$ generatori, deducem că există $\varphi(d)$ asemenea morfisme distincte, ce se obţin ducînd pe a în cîte un generator al lui $f(A)$. Cum d poate fi un divizor arbitrar pentru (m, n), deducem că numărul morfismelor căutate este egal cu

$$\sum_{d \mid (m, n)} \varphi(d) = (m, n)$$

(am folosit cunoscuta formulă a lui Gauss conform căreia

$$\sum_{d \mid k} \varphi(k) = k).$$

Observaţie. Un caz particular interesant este acela cînd A este izomorf cu un subgrup al lui B şi atunci, deoarece $m \mid n$, va rezulta că numărul morfismelor de la A la B este egal cu ordinul grupului A.

PD 15. *Să se arate că mulţimea elementelor de ordin impar dintr-un grup ciclic finit formează un subgrup de ordin egal cu cel mai mare divizor impar al ordinului grupului.*

Marcel Ţena, G. M. Metodică, 1/1981

Soluție. Fie G un grup ciclic de ordin $2^k \cdot p$ ($k \geqslant 0$, p impar) și fie ζ un generator al său. Deci $G = \{1, \zeta, \zeta^2, ..., \zeta^{2^k \cdot p - 1}\}$. Fie H subgrupul lui G generat de elementul ζ^{2^k}; evident H este un subgrup de ordinul p, deoarece elementul ξ^{2^k} are ordinul p în grupul G. Așadar

$$H = \{1, \zeta^{2^k}, (\zeta^{2^k})^2, ..., (\zeta^{2^k})^{p-1}\}.$$

Vom arăta că H coincide cu mulțimea elementelor de ordin impar din grupul G și atunci problema va fi rezolvată. Fie $x \in H$, deci $x = \xi^{2^k \cdot a}$, cu $0 \leqslant a \leqslant p - 1$.

Notînd cu u ordinul elementului x în grupul G vom avea $x^u = 1$, adică $\xi^{au \cdot 2^k} = 1$, deci există $s \in \mathbf{N}$ astfel încît

$$au \cdot 2^k = 2^k \cdot p \cdot s. \tag{1}$$

Fie $d = (p, a)$, deci $a = da'$ și $p = dp'$ cu $(a', p') = 1$. Relația (1) devine $da'u2^k = d^k dp's$ sau $a'u = p's$ și cum u este minim, rezultă $u = p'$ (și $s = a'$). 'Dar p este un divizor al lui p, deci este impar, ceea ce arată că x este un element de ordin impar al grupului G.

Reciproc, fie $x \in G$ un element avînd ordinul impar u. Deoarece ordinul unui element divide ordinul grupului avem $u \mid 2^k \cdot p$ și deci $u \mid p$, adică $(\exists)\ q \in \mathbf{N}$ cu $p = qu$. În grupul G elementul x se scrie $x = \zeta^a$ cu $0 \leqslant a \leqslant 2^k \cdot p - 1$ și din $x^u = 1$ avem $\zeta^{au} = 1$, deci fie t cu proprietatea $au = 2^k pt$ sau $au = 2^k qut$, de unde $a = 2^k qt$. Dar atunci $x = \zeta^a = (\zeta^{2^k})^{qt} \in H$ ceea ce trebuia demonstrat.

PD 16. *Fie K un corp finit și $a, b \in K$. Dacă elementul $-(4a^3 + 27nb^2)$ nu este pătrat perfect în corpul K, să se demonstreze că polinomul $X^3 + aX + b$ admite cel puțin o rădăcină în K.*

Toma Albu, G. M. A, 11/1972

Soluție. Fie p caracteristica corpului K (p = număr prim). Nu putem avea $p = 2$, căci într-un corp de caracteristică 2 avem $x^2 = x$ pentru orice x din acel corp (teorema lui Fermat), deci toate elementele corpului sînt pătrate perfecte. Așadar, $p \geqslant 3$. Să notăm $f = X^3 + aX + b$. Deoarece f este de gradul 3 se știe că f este ireductibil în $K[X]$ dacă și numai dacă f nu admite nici o rădăcină în corpul K. Pentru a soluționa problema să presupunem prin absurd că f nu are rădăcini în K, deci este ireductibil în $K[X]$. Atunci se știe că inelul factor $E = K[X]/(f)$ este un corp în care f are trei rădăcini și anume $x_1 = \hat{X}$, $x_2 = \hat{X}^q$, $x_3 = \hat{X}^{q^2}$, unde q este cardinalul corpului K, iar $\hat{X}$ este clasa lui X modulo idealul (f)*). Extinderea $K \subset E$ este galoisiană avînd grupul lui Galois $G(E/K)$ ciclic de ordinul 3, generat de automorfismul lui Frobenius $\varphi: E \to E$, $\varphi(x) = x^q$, $(\forall)\ x \in E$. Să considerăm elementul $\delta = (x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_1 - x_3)$ din corpul E. Deoarece $\varphi(x_1) = x_2$, $\varphi(x_2) = x_3$ și $\varphi(x_3) = x_1$ putem scrie $\varphi(\delta) =$

*) V. „Algebra" de Ion D. Ion și N. Radu, E. D. P. București 1981.

$= [\varphi(x_1) - \varphi(x_2)]\,[\varphi(x_2) - \varphi(x_3)]\,[\varphi(x_1) - \varphi(x_3)] = (x_2 - x_3)\,(x_3 - x_1)\,(x_2 - x_1) = \delta$, adică δ este invariat de automorfismul φ. Atunci δ este invariat și de automorfismul $\varphi^2 = \varphi \circ \varphi$ și cum $G(E/K) = \{1_E, \varphi, \varphi^2\}$, înseamnă că δ este invariat de toate automorfismele grupului Galois. Extinderea fiind galoisiană, rezultă că discriminantul polinomului f este $\Delta = \delta^2 = -(4a^3 + 27b^2) \in K$. Reținînd egalitatea $-(4a^3 + 27b^2) = \delta^2$ și faptul că $\delta \in K$, am obținut că elementul $-(4a^3 + 27b^2)$ este un pătrat perfect în corpul K, contradicție cu ipoteza. Aceasta încheie soluția problemei.

Comentarii. 1) Reciproca afirmației din enunț este falsă în general. Luînd de exemplu $K = \mathbf{Z}_5$ și polinomul $f = X^3 + X \in \mathbf{Z}_5[X]$, acesta are rădăcina $\hat{0}$ în corpul $\mathbf{Z}_5$, iar $-(4a^3 + 27b^2) = -\hat{4} = \hat{1}$ este pătrat perfect în $\mathbf{Z}_5$.

2) Afirmația din enunț nu mai rămîne adevărată, dacă în locul unui corp finit se consideră un corp infinit. Așa de exemplu, polinomul $X^3 + X + 1 \in \mathbf{Q}[X]$ nu are rădăcini în corpul $\mathbf{Q}$, deși $-(4a^3 + 27b^2) = -31$ nu este pătrat perfect în $\mathbf{Q}$.

PD 17. *Fie $n > 1$ un număr natural și notăm cu $a_1, a_2, \ldots, a_{\varphi(n)}$ cele $\varphi(n)$ numere naturale relativ prime cu n și mai mici ca n (unde $\varphi(n)$ este funcția lui Euler), iar mai departe notăm*

$$\xi = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}.$$

a) *Să se arate că* $\xi^{a_1 + a_2 + \ldots + a_{\varphi(n)}} = (-1)^{\varphi(n)}$.

b) *Să se deducă de aici că pentru $n > 2$ numărul $a_1 + a_2 + \ldots + a_{\varphi(n)}$ este multiplu de n. (Se poate utiliza rezultatul din nota „Asupra problemei 12511" din G.M. 6/1976).*

Marcel Țena, G.M. 5/1981

Soluție. a) Să considerăm polinomul ciclotomic

$$\Phi_n(X) = (X - \xi^{a_1})(X - \xi^{a_2}) \ldots (X - \xi^{a_{\varphi(n)}}) = b_0 + b_1 X + \ldots + b_{\varphi(n)} X^{\varphi(n)},$$

care are termenul liber $b_0 = (-1)^{\varphi(n)} \cdot \xi^{a_1 + a_2 + \ldots + a_{\varphi(n)}}$.

Rădăcinile $\xi^{a_1}, \xi^{a_2}, \ldots, \xi^{a_{\varphi(n)}}$ ale acestui polinom au toate modulul 1, iar coeficienții acestui polinom sînt reali (chiar mai mult, sînt întregi). În nota indicată, același autor arată că dacă $f = \sum_{i=0}^{m} b_i X^i$ este un polinom cu coeficienți reali, avînd toate rădăcinile de modul $\rho > 0$, atunci între coeficienți există relația

$$b_i = (-1)^{m_0} \rho^{m-2i} \cdot b_{m-i} \text{ (pentru } i = 0, 1, 2, \ldots, m),$$

unde prin m_0 am notat ordinul de multiplicitate al rădăcinii $x = \rho$ (un rezultat asemănător, dar în cazul mai general cînd f are coeficienți complecși,

este dat în nota „Asupra unei clase de polinoame" de Florin Vulpescu-Jalea din G.M. 1/1982).

În cazul polinomului $\varnothing_n(X)$, avem $\rho = 1$ și $m_0 = 0$, deci $b_i = b_{\varphi(n)-i}$, $i = 0, 1, 2, ..., \varphi(n)$; în particular $b_0 = b_{\varphi(n)} = 1$, adică $(-1)^{\varphi(n)} \cdot \xi^{a_1+a_2+...+a_{\varphi(n)}} = 1$, de unde rezultă relația din enunț.

b) Dacă $n > 2$, atunci $\varphi(n)$ este număr par și relația devine $\xi^{a_1+a_2+...+a_{\varphi(n)}} = 1$.

Cum ξ este un generator al grupului multiplicativ al rădăcinilor de ordinul n ale unității, va rezulta $a_1 + a_2 + ... + a_{\varphi(n)} = \mathcal{M}n$.

PD 18. *Fie P grupul transformărilor afine ale dreptei, adică $P = \{f_{a,b} \mid f_{a,b}: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f_{a,b}(x) = ax + b, a \in \mathbf{R}^*, b \in \mathbf{R}\}$ și T subgrupul translațiilor dreptei, adică $T = \{f_{1,b} \mid b \in \mathbf{R}\}$. Să se arate că T este subgrup normal al lui P și să se determine grupul factor P/T.*

Marcel Țena G. M.-A, 5/1973

Soluție. Să considerăm și subgrupul omotetiilor dreptei, adică $\mathcal{O} = \{f_{a,0} \mid a \in \mathbf{R}^*\}$. Funcția $\varphi: P \to \mathcal{O}$, $\varphi(f_{a,b}) = f_{a,0}$ este un morfism surjectiv de grupuri; nucleul acestui morfism este $\operatorname{Ker} \varphi = T$, deci T este subgrup normal. Conform teoremei fundamentale de izomorfism de la grupuri, vom avea

$$P/\operatorname{Ker} \varphi \simeq \operatorname{Im} \varphi, \quad \text{adică} \quad P/T \simeq \mathcal{O}.$$

PD 19. *Să se demonstreze că grupul aditiv $(\mathbf{R}, +)$ al numerelor reale este izomorf cu grupul aditiv $(\mathbf{C}, +)$ al numerelor complexe.*

Toma Albu, G. M.-A, 1/1972

Soluție. Considerăm $\mathbf{R}$ și $\mathbf{C}$ ca spații vectoriale peste corpul $\mathbf{Q}$. Mulțimile $\mathbf{R}$ și $\mathbf{C}$ fiind de puterea continuului, rezultă că dimensiunile acestor spații vectoriale sînt egale cu $\mathfrak{c}$ (puterea continuului). Dar dacă $\dim_{\mathbf{Q}} \mathbf{R} = \dim_{\mathbf{Q}} \mathbf{C}$, rezultă că există un izomorfism de spații vectoriale $f: \mathbf{R} \to \mathbf{C}$. În particular, acest izomorfism de spații vectoriale este un izomorfism al grupurilor abeliene $(\mathbf{R}, +)$ și $(\mathbf{C}, +)$.

PD 20. *Să se demonstreze că*

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{\lambda_1+2\lambda_2+...+k\lambda_k=n \\ \lambda_i \geq 0}} \frac{(-1)^{n-(\lambda_1+\lambda_2+...+\lambda_k)}}{\lambda_1!\,\lambda_2!\,...\,\lambda_k!\cdot 1^{\lambda_1}\cdot 2^{\lambda_2}\cdot ...\cdot k^{\lambda_k}} = 0.$$

Ioan Tomescu, G.M.-A, 12/1970

Soluție. Conform unei teoreme a lui Cauchy orice permutare de ordinul n se descompune în mod unic în produs de cicluri disjuncte (v. „Teoria calitativă a ecuațiilor algebrice" de C. Năstăsescu și C. Niță, Editura Tehnică București 1979, pag. 48). Numărul permutărilor de ordinul n, care au în această descom-

punere λ_1 cicluri de lungime 1, λ_2 cicluri de lungime 2, ..., λ_k cicluri de lungime (deci $\lambda_1 + 2\lambda_2 + \ldots + k\lambda_k = n$) este dat de formula lui Cauchy:

$$\frac{n!}{\lambda_1!\,\lambda_2!\ldots\lambda_k!\cdot 1^{\lambda_1}\cdot 2^{\lambda_2}\cdot\ldots\cdot k^{\lambda_k}}$$

(v. „Probleme de combinatorică și teoria grafurilor" de Ioan Tomescu, Editura Didactică și Pedagogică București 1981, pag. 50). Deoarece un ciclu de lungime p este un produs de $p-1$ transpoziții, paritatea unei permutări care are în descompunere λ_1 cicluri de lungime 1, λ_2 cicluri de lungime 2, ..., λ cicluri de lungime k, va fi aceeași cu paritatea sumei: $\lambda_2 + 2\lambda_3 + 3\lambda_4 + \ldots + (k-1)\lambda_k$, care este aceeași cu paritatea sumei $\lambda_2 + \lambda_4 + \lambda_6 + \ldots$ Cum $\lambda_1 + 2\lambda_2 + \ldots + k\lambda_k = n$, rezultă

$$n - (\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_k) = \lambda_2 + 2\lambda_3 + 3\lambda_4 + \ldots + (k-1)\lambda_k,$$

deci și $n - (\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_k)$ va avea aceeași paritate cu $\lambda_2 + \lambda_4 + \lambda_6 + \ldots$ Dar am văzut că în cazul cînd $\lambda_2 + \lambda_4 + \lambda_6 + \ldots$ este par, se obțin permutările pare, iar în cazul cînd $\lambda_2 + \lambda_4 + \lambda_6 + \ldots$ este impar se obțin permutările impare. Cum numărul permutărilor pare, ca și al permutărilor impare, este egal cu $\frac{n!}{2}$, deducem că

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+k\lambda_k=n \\ \lambda_i\geq 0,\ \lambda_2+\lambda_4+\lambda_6\ldots \text{par}}} \frac{(-1)^{n-(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_k)}\,n!}{\lambda_1!\,\lambda_2!\ldots\lambda_k!\cdot 1^{\lambda_1}\cdot 2^{\lambda_2}\ldots k^{\lambda_k}} = \frac{n!}{2};$$

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+k\lambda_k=n \\ \lambda_i\geq 0,\ \lambda_2+\lambda_4+\lambda_6+\ldots \text{impar}}} \frac{(-1)^{n-(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_k)}\,n!}{\lambda_1!\,\lambda_2!\ldots\lambda_k!\cdot 1^{\lambda_1}\cdot 2^{\lambda_2}\ldots k^{\lambda_k}} = -\frac{n!}{2}.$$

Adunînd aceste egalități și împărțind prin $n!$ se obține egalitatea din enunț.

PD 21. *Se consideră șirul C_0^0, C_1^0, C_1^1, C_2^0, C_2^1 C_2^2, ..., C_n^0, C_n^1, ..., C_n^k, ..., C_n^n, ... și un număr prim p. Să se calculeze probabilitatea ca un termen al șirului să fie divizibil cu p.*

Dragoș Popescu, G. M.-A, 6/1972

Soluție. În demonstrație vom utiliza următoarea:
Lemă: Fie a și b două numere naturale ($a \geq b$), iar p un număr prim. Dacă $a = \sum_{i=0}^{k} a_i p^i$ și $b = \sum_{i=0}^{k} b_i p^i$ sînt reprezentările numerelor a și b în baza p, atunci condiția necesară și suficientă pentru ca să aibă loc relația $C_a^b \not\equiv 0 \pmod p$ este ca $a_i \geq b_i$ pentru orice $i \in \{0, 1, \ldots, k\}$.

Demonstrația lemei. Să notăm $a - b = c$ și fie $c = \sum_{i=0}^{k} c_i p^i$ reprezentarea numărului c în baza p. Dacă vom nota cu $\gamma(m)$ exponentul la care figurează

numărul prim p în descompunerea canonică a numărului natural m, vom avea

$$\gamma(a!) = \sum_{j=1}^{k}\left[\frac{a}{p^j}\right] = \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=j}^{k} a_i p^{i-j} = \sum_{j=1}^{k} a_j \frac{p^j - 1}{p-1} =$$

$$= \frac{1}{p-1}\left(\sum_{i=0}^{k} a_i p^i - \sum_{i=0}^{k} a_i\right) = \frac{1}{p-1}\left(a - \sum_{i=0}^{k} a_i\right).$$

Analog

$$\gamma(b!) = \frac{1}{p-1}\left(b - \sum_{i=0}^{k} b_i\right); \quad \gamma(c!) = \frac{1}{p-1}\left(c - \sum_{i=0}^{k} c_i\right).$$

Vom avea atunci

$$\gamma(C_a^b) = \gamma\left(\frac{a!}{b!\,c!}\right) = \gamma(a!) - \gamma(b!) - \gamma(c!) =$$

$$= \frac{1}{p-1}\left[a - b - c + \sum_{i=0}^{k}(b_i + c_i - a_i)\right] = \frac{1}{p-1}\sum_{i=0}^{k}(b_i + c_i - a_i).$$

Condiția necesară și suficientă pentru a avea $C_a^b \not\equiv 0 \pmod p$ este $\gamma(C_a^b) = 0$, adică ținînd seama de cele de mai înainte:

$$\sum_{i=0}^{k}[a_i - (b_i + c_i)] = 0. \tag{1}$$

Vom arăta acum că necesar și suficient pentru a avea loc (1) este ca $a_i \geqslant b_i$, $i \in \{0, 1, \ldots, k\}$.

Să arătăm mai întîi suficiența condiției. Într-adevăr dacă $a_i \geqslant b_i$ pentru orice $i \in \{0, 1, \ldots, k\}$, atunci $c_i = a_i - b_i$ și prin sumare obținem

$$\sum_{i=0}^{k}[a_i - (b_i + c_i)] = 0.$$

Să arătăm acum necesitatea condiției. Să notăm $t_i = a_i - (b_i + c_i)$ pentru $i \in \{0, 1, \ldots, k\}$ și să considerăm polinomul $f(x) = \sum_{i=0}^{k} t_i x^i$.

Avem

$$f(1) = \sum_{i=0}^{k} t_i = \sum_{k=0}^{k}[a_i - (b_i + c_i)] = 0$$

și

$$f(p) = \sum_{i=0}^{k} a_i p^i - \sum_{i=0}^{k} b_i p^i - \sum_{i=0}^{k} c_i p^i = c - c = 0.$$

Rezultă că f este de forma

$$f(x) = (x-1)(x-p)(q_0 + q_1 x + \ldots + q_{k-2}x^{k-2}),$$

unde numerele $q_0, q_1, \ldots, q_{k-2}$ sînt întregi.

Notînd $q_0 = s_0$, $q_1 - q_0 = s_1$, $q_2 - q_1 = s_2$, ..., $q_{k-2} - q_{k-3} = s_{k-2}$ rezultă $q_0 = s_0$, $q_1 = s_0 + s_1$, $q_2 = s_0 + s_1 + s_2$, ..., $q_{k-2} = s_0 + s_1 + s_2 + \ldots + s_{k-2}$. Atunci f se scrie:

$$f(x) = [x^2 - (p+1)x + p][s_0 + (s_0 + s_1)x + (s_0 + s_1 + s_2)x^2 +$$

$$+ \ldots + (s_0 + s_1 + s_2 + \ldots + s_{k-2})x^{k-2}], \text{ cu } s_i \in \mathbf{Z},\ i \in \{0, 1, \ldots, k-2\}.$$

Identificînd coeficienții obținem

$$t_0 = ps_0;\ t_i = ps_i - s_{i-1}\ (1 \leqslant i \leqslant k-1);\ t_k = s_0 + s_1 + \ldots + s_{k-2}.$$

Întrucît $0 \leqslant a_i, b_i, c_i \leqslant p-1$, rezultă că pentru orice $i \in \{0, 1, \ldots, k\}$ au loc inegalitățile $-2(p-1) \leqslant t_i \leqslant p-1$.

Ținînd seama de expresiile de mai sus ale numerelor t_i și de aceste inegalități, analizînd recursiv obținem ușor $t_i = 0$ pentru orice $i \in \{0, 1, \ldots, k\}$. Dar aceasta înseamnă că $a_i = b_i + c_i$ și cum $a_i, b_i, c_i \geqslant 0$ rezultă $a_i \geqslant b_i$ ceea se sfîrșește demonstrația lemei.

Revenind acum la soluția propriu-zisă a problemei, să notăm cu $\delta(a)$ respectiv $\varepsilon(a)$ numărul termenilor nedivizibili prin p din șirul $C_a^0, C_a^1, C_a^2, \ldots, C_a^a$, respectiv numărul termenilor nedivizibili prin p din șirul

$$C_0^0,\ C_1^0,\ C_1^1,\ C_2^0,\ C_2^1,\ C_2^2,\ \ldots,\ C_a^0,\ C_a^1,\ C_a^2,\ \ldots,\ C_a^a.$$

Conform lemei vom avea

$C_a^b = C_{a_0 + a_1 p + \ldots + a_k p^k}^{b_0 + b_1 p + \ldots + b_k p^k}$ este nedivizibil cu p dacă și numai dacă $b_0 \in \{0, 1, \ldots, a_0\}$, $b_1 \in \{0, 1, \ldots, a_1\}, \ldots, b_k \in \{0, 1, \ldots, a_k\}$.

Prin urmare există $\prod_{i=0}^{k} (a_i + 1)$ valori ale lui b pentru care numărul C_a^b nu este divizibil cu p, adică altfel spus

$$\delta(a) = \prod_{i=0}^{k} (a_i + 1). \tag{2}$$

După aceea putem scrie

$\varepsilon(a) = \sum_{0 \leqslant j \leqslant a} \delta(j)$; ținem seama că în scrierile în baza p a numerelor j cuprinse între 0 și a, vom folosi în total toate „cifrele" de la 0 la a_0, respectiv de la 0 la a_1, ..., de la 0 la a_k și ținînd seama și de (2) avem:

$$\varepsilon(a) = \sum_{0 \leqslant j \leqslant a} \delta(j) = \sum_{\substack{1 \leqslant x_i \leqslant a_i + 1 \\ 1 \leqslant i \leqslant k}} \prod_{i=0}^{k} x_i =$$

$$= \prod_{i=0}^{k} [1 + 2 + 3 + \ldots + a_i + (a_i + 1)] = \prod_{i=0}^{k} \frac{(a_i + 1)(a_i + 2)}{2} =$$

$$= \frac{1}{2^{k+1}} \cdot \prod_{i=0}^{k} (a_i + 1) \cdot \prod_{i=0}^{k} (a_i + 2).$$

Să notăm cu $\varphi_{a,p}$ probabilitatea ca un termen din șirul $C_0^0, C_1^0, C_1^1, C_2^0, C_2^1, C_2^2, \ldots, C_a^0, C_a^1, \ldots, C_a^a$ să fie divizibil cu p și cu $\overline{\varphi}_{a,p}$ probabilitatea evenimentului contrar. Dacă notăm cu N numărul acelor a_i nuli ($i \in \{0, 1, \ldots, k\}$), vom avea

$$0 \leqslant \overline{\varphi}_{a,p} = \frac{\alpha(a)}{\frac{1}{2}(a+1)(a+2)} = \frac{2^{\frac{1}{k+1}} \cdot \prod_{i=0}^{k}(a_i+1) \cdot \prod_{i=0}^{k}(a_i+2)}{\frac{1}{2}\left(\sum_{i=0}^{k} a_i p^i + 1\right)\left(\sum_{i=0}^{k} a_i p^i + 2\right)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2^k} \cdot \frac{p^{k-N+1} \cdot (p+1)^{k-N+1}}{\left(\frac{p^{k-N+1}-1}{p-1}+1\right)\left(\frac{p^{k-N+1}-1}{p-1}+2\right)} =$$

$$= \frac{1}{2^k}(p-1)^2 \cdot \left(1+\frac{1}{p}\right)^{k-N+1} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{p-2}{p^{k-N+1}}\right)\left(1+\frac{2p-3}{p^{k-N+1}}\right)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2^k}(p-1)^2\left(1+\frac{1}{p}\right)^{k-N+1} \leqslant 2(p-1)^2 \cdot \frac{\left(1+\frac{1}{p}\right)^{k+1}}{2^{k+1}} \leqslant 2(p-1)^2\left(\frac{3}{4}\right)^{k+1}.$$

Evident că dacă $a \to \infty$, numărul „cifrelor" folosite în baza p pentru scrierea lui a crește de asemenea nemărginit, adică $k \to \infty$.
Din inegalitatea de mai sus rezultă $\lim_{a\to\infty} \overline{\varphi}_{a,p} = 0$.
Dacă notăm cu φ_p probabilitatea ca un termen al șirului din enunț să fie divizibil cu p, rezultă

$$\varphi_p = \lim_{a\to\infty} \varphi_{a,p} = \lim_{a\to\infty} (1 - \overline{\varphi}_{a,p}) = 1 - \lim_{a\to\infty} \overline{\varphi}_{a,p} = 1.$$

PD 22. *Să se demonstreze că dacă într-un sistem de numerație oarecare există un număr N de n cifre al cărui pătrat se termină cu cele n cifre ale numărului N și în aceeași ordine, atunci numărul N' care satisface egalitatea $N + N' = 10^n + 1$, are aceeași proprietate.*

Gh. Țițeica, G. M. vol. VIII, 1902

Soluție. Din relația dată rezultă $N' = 10^n + 1 - N$.

Deci

$$N'^2 = 10^{2n} + 1 + N^2 + 2 \cdot 10^n - 2 \cdot 10^n \cdot N - 2N = 10^{2n} + (N^2 - N) +$$
$$+ (10 + 10^n - N) + 10^n - 2 \cdot 10^n \cdot N \text{ sau}$$
$$N'^2 = 10^n(10^n - 2N + 1) + (N^2 - N) + N'$$

sau încă

$$N'^2 - N' = 10^n (10^n - 2N + 1) + (N^2 - N).$$

Cum $N^2 - N$ se termină cu n zerouri și nu cu mai multe, urmează că $N'^2 - N'$ se termină cu n zerouri și nu cu mai multe, adică N'^2 și N' se termină cu aceleași n cifre în aceeași ordine.
Exemple:

a) $n = 10$, $N = 1787109376$, $N' = 8212890625$ în baza 10.

b) $n = 10$, $N = 2221350213$, $N' = 3334205344$ în baza 6.

PD 23. *Să se rezolve în numere naturale ecuația* $x^2 + xy = y^2 + 1$.

Al. Pantazi, G. M. vol. XXII, 1915

Soluție. Rezolvăm ecuația în raport cu y și avem

$$y^2 - xy + 1 - x^2 = 0 \text{ sau } y = \frac{x \pm \sqrt{5x^2 - y}}{2}.$$

Trebuie deci ca $x \geqslant \sqrt{5x^2 - y}$, în cazul în care considerăm soluția cu minus. Rezultă deci $x \leqslant 1$ adică $x = 1$ și $y = 0$ sau $x = 1$ și $y = 1$.
În cele ce urmează considerăm soluția cu plus:

$$y = \frac{x + \sqrt{5x^2 - 4}}{2}. \tag{1}$$

Se observă că dînd lui x valori consecutive și calculînd pe y rezultă $x = 1$ $y = 1$; $x = 3$, $y = 3$; $x = 5$, $y = 8$; $x = 13$, $y = 21$, ...
Se vede că o valoare a lui x este suma valorilor lui x și y din soluția precedentă, iar o valoare a lui y este suma dintre valoarea lui x din aceeași soluție și valoarea lui y din soluția precedentă.

Să arătăm deci că cu ajutorul șirului Fibonacci putem exprima toate soluțiile ecuației (1); mai precis, arătăm că soluțiile sînt perechi de numere Fibonacci consecutive.

Fie deci x și y două numere consecutive din șirul lui Fibonacci. Atunci $x + y$ și $x + 2y$ sînt următoarele numere din șir.
Dacă (x, y) este soluție pentru (1) rezultă că și $(x + 2y, x + y)$ este soluție adică

$$(x + y)^2 + (x + y)(x + 2y) = (x + 2y)^2 + 1.$$

În adevăr, efectuînd calculele, egalitatea precedentă este echivalentă cu:

$$x^2 + xy = y^2 + 1,$$

egalitate care știm că este verificată de perechea (x, y).

Rezultă deci că dacă considerăm cuplurile formate cu un termen de rang par și cu cel următor din șirul Fibonacci

$$1, 1, 2, 3, 45, 8,, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...,$$

obținem soluții ale ecuației (1) deci și ale ecuației din enunț. (Considerăm că rangul termenilor din șirul lui Fibonacci începe cu zero).
Să arătăm acum că nu mai există alte soluții pentru ecuația (1).
Fie deci (X, Y) o soluție arbitrară a ecuației (1).
Cum am mai procedat anterior, rezultă că luînd x și y astfel încît

$$\begin{cases} x + y = X \\ x + 2y = Y \end{cases}, \text{ adică } \begin{cases} x = 2X - Y \\ y = Y - X \end{cases},$$

atunci ecuația dată admite drept soluție și pe (x, y) deci pe $(2X - Y, Y - X)$, cu condiția ca aceasta să aibă componentele pozitive. Faptul că (X, Y) este soluție a ecuației date poate fi pus și sub forma $Y^2 - XY + (1 - X^2) = 0$. Considerînd funcția de gradul II $f(t) = t^2 - Xt + (1 - X^2)$, observăm că pentru $X \geqslant 1$ o rădăcină a funcției este negativă sau nulă și alta este pozitivă, aceasta fiind de fapt Y.
Înlocuind t cu X obținem $f(X) = 1 - X^2 \leqslant 0$, deci X este cuprins între rădăcini și deci $X \leqslant Y$, de unde, $Y - X \geqslant 0$.
Înlocuind t cu $2X$ rezultă $f(2X) = 2X^2 + 1 > 0$, adică $2X$ este în afara rădăcinilor și cum este pozitiv, rezultă $2X > Y$. Deci $2X - Y > 0$.
Așadar soluția $(2X - Y, Y - X)$ este admisibilă, dacă $X \geqslant 1$. Rezultă deci că o pereche (X, Y), soluție a ecuației (1) ne poate da altă soluție cu componente mai mici, ori decîte ori $X \geqslant 1$. Aplicînd succesiv această reducere, rezultă că obținem în final soluția care are prima componentă minimă, deci $X = 1$ și prin urmare $Y = 1$. Apoi această soluție generează soluțiile ecuației (1) ca perechi de numere Fibonacci, așa cum am văzut.
Deci pentru ecuația din enunț nu există alte soluții decît soluțiile date de cupluri din șirul numerelor Fibonacci și perechea (1, 0).

PD 24. *Să se găsească numărul tuturor numerelor raționale distincte* $\frac{p}{q}$, $(q \neq 0)$, *unde numerele întregi* p *și* q *iau valori distincte cuprinse între* $-n-1$ *și respectiv* $n+1$, $(n \in \mathbf{N})$.

A. G. Ioachimescu, G. M. vol. VII, 1901

Soluție. Cu numerele cuprinse între $-(n+1)$ și $n+1$ putem forma patru tipuri de șiruri de numere raționale: a) șiruri cu termeni cuprinși între 0 și $n+1$; șiruri cu termeni cuprinși între 0 și $-(n+1)$; c) șiruri cu termeni ai căror numărători sînt cuprinși între 0 și $n+1$, iar numitorii sînt între 0 și $(n+1)$; d) șiruri cu termeni ai căror numărători sînt cuprinși între 0 și $-(n+1)$, iar numitorii între 0 și $n+1$. Din $|p| \leqslant n+1$, $|q| \geqslant 1$ deducem $\left|\frac{p}{q}\right| \leqslant n+1$ și atunci cazurile b), c), d) dau de fapt

același numere raționale, care sînt opusele celor de la a). Rezultă deci că va fi suficient să căutăm acele numere raționale cuprinse între 1 și $n + 1$. Numărul total căutat va fi deci de două ori acest număr plus unu (numărîndu-l separat pe zero).

Aranjăm fracțiile cuprinse între 1 și $n + 1$ în tabloul următor:

$$\begin{array}{llllll}
\frac{1}{1}, & \frac{1}{2}, & \frac{1}{3}, & \frac{1}{4}, & \ldots, & \frac{1}{n+1} \\
\frac{2}{1}, & \frac{2}{2}, & \frac{2}{3}, & \frac{2}{4}, & \ldots, & \frac{2}{n+1} \\
\frac{3}{1}, & \frac{3}{2}, & \frac{3}{3}, & \frac{3}{4}, & \ldots, & \frac{3}{n+1} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & & & \ldots \\
\frac{n+1}{1}, & \frac{n+1}{2}, & \frac{n+1}{3}, & & \ldots, & \frac{n+1}{n+1}.
\end{array}$$

Din acest tablou rezultă că toate numerele de pe diagonala principală sînt 1, toate numerele de sub diagonală sînt supraunitare, iar cele de deasupra diagonalei sînt subunitare.

Se mai observă că dacă două numere raționale subunitare sînt distincte, simetricele lor în raport cu diagonala sînt de asemenea distincte, fiind inversele celor dintîi. Rezultă deci că este suficient să găsim numărul numerelor distincte situate de aceeași parte a diagonalei (de exemplu numerele raționale supraunitare). Un număr rațional $\frac{p_1}{q_1}$ va fi distinct de un alt număr rațional cu numitor și numărător mai mici, dacă $(p_1, q_1) = 1$. Pentru orice alt număr rațional p_1/q_1 cu $(p_1, q_1) \neq 1$ va exista un număr rațional cu numărător și numitor strict mai mici, egal cu p_1/q_1. În linia i vom avea atîtea numere raționale $\frac{p}{q}$, cu $(p, q) = 1$ cîte numere sînt prime cu i și mai mici strict decît i, adică $\varphi(i)$ (φ este funcția lui Euler). Numărul total al valorilor distincte pentru toate numerele raționale din tabloul dat va fi așadar

$$N_1 = 2 \cdot \sum_{i=2}^{n+1} \varphi(i) + 1$$

iar numărul căutat în problemă va fi

$$N = 2N_1 + 1 = 4 \cdot \sum_{i=2}^{n+1} \varphi(i) + 3,$$

sau

$$N = 4 \cdot \sum_{i=1}^{n+1} \varphi(i) - 1.$$

PD 25. *Să se studieze natura seriei*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{p_{n+1}} - \sqrt{p_n}}{n^\theta}, \quad \theta \in \mathbf{R},$$

unde p_n este al n-lea număr prim. Folosind faptul că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{p_{n+1}} - \sqrt{p_n}}{n}$ *este convergentă să se arate că*

$$\liminf_{n\to\infty} (\sqrt{p_{n+1}} - \sqrt{p_n}) = 0.$$

Laurenţiu Panaitotol, G.M.-A., 1/1973

Soluţie. Suma parţială de ordinul n a seriei din enunţ este

$$s_n = -\sqrt{p_1} + \sqrt{p_2}\left(\frac{1}{1^\theta} - \frac{1}{2^\theta}\right) + \ldots + \sqrt{p_n}\left(\frac{1}{(n-1)^\theta} - \frac{1}{n^\theta}\right) + \frac{\sqrt{p_{n+1}}}{n^\theta}.$$

Ţinînd seama de faptul că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{n \ln n} = 1, \tag{1}$$

rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{p_{n+1}}}{n^\theta} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{p_{n+1}}{(n+1)\ln(n+1)}} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{(n+1)\ln(n+1)}}{n^\theta} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{(n+1)\ln(n+1)}}{n^\theta} \geqslant \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{\ln(n+1)}}{n^{\theta-\frac{1}{2}}} = \begin{cases} \infty \text{ dacă } \theta \leqslant \frac{1}{2} \\ 0 \text{ dacă } \theta > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Prin urmare pentru $\theta \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$, seria din enunţ este divergentă. Pe de altă parte, pentru $\theta \in [1, \infty)$ să considerăm funcţia $f(\theta) = \frac{1}{(n-1)^\theta} - \frac{1}{n^\theta}$. Vom avea $f'(\theta) = \frac{\theta[(n-1)^{\theta+1} - n^{\theta+1}]}{[n(n-1)]^{\theta+1}} < 0$, ceea ce arată că funcţia f este descrescătoare. Urmează că $f(\theta) \leqslant f(1) = \frac{1}{n(n-1)}$, $(\forall)\ \theta \in [1, \infty)$ ceea ce atrage după sine faptul că

$$\sqrt{p_n} f(\theta) \leqslant \frac{\sqrt{p_n}}{n(n-1)}. \tag{2}$$

Pe de altă parte, ținînd seama de (1), putem deduce că există un număr $n_1 \in \mathbf{N}$ astfel încît $\dfrac{\sqrt{p_n}}{\sqrt{n \ln n}} - 1 \leqslant 1$, $(\forall)\ n \geqslant n_1$ adică $\sqrt{p_n} \leqslant 2\sqrt{n \ln n}$, $(\forall) n \geqslant n_1$.

Din (2) rezultă atunci

$$\sqrt{p_n} f(\theta) \leqslant \frac{2\sqrt{\ln n}}{n^{1/2}(n-1)}. \tag{3}$$

Însă, pentru $n \geqslant 4$ avem $\ln n < \sqrt{n}$ (lucru ce se stabilește ușor studiind funcția $\varphi(x) = \ln x - \sqrt{x}$) și deci (3) conduce la

$$\sqrt{p_n} \cdot f(\theta) \leqslant \frac{2}{n^{1/4}(n-1)} < \frac{2}{(n-1)^{5/4}}. \tag{4}$$

Luînd atunci $\nu = \max(n_1, 4)$ urmează că pentru $n \geqslant \nu$ inegalitatea (4) este îndeplinită și deci seria $\sum_{n=\nu}^{\infty} \sqrt{p_n}\left(\frac{1}{(n-1)^\theta} - \frac{1}{n^\theta}\right)$ este convergentă către o sumă σ. Pe de altă parte, deoarece șirul $\left(\frac{\sqrt{p_n}}{n^\theta}\right)_{n \in \mathbf{N}}$ este convergent pentru $\theta > \frac{1}{2}$, urmează că pentru $\theta \geqslant 1$ există $m > 0$ astfel încît $0 < \frac{\sqrt{p_n}}{n^\theta} \leqslant m$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}$. Rezultă atunci $s_n < -p_1 + \sum_{n=2}^{\nu-1} \sqrt{p_n}\left(\frac{1}{(n-1)^\theta} - \frac{1}{n^\theta}\right) + \sigma + m$, ceea ce arată mărginirea șirului $(s_n)_{n \in \mathbf{N}}$. Cum $(s_n)_{n \in \mathbf{N}}$ este crescător rezultă că seria dată este convergentă pentru $\theta \in [1, \infty)$. Să considerăm acum $\theta \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$. Fie $\varepsilon = 1 - \theta$; deoarece $\lim_{n \to \infty} \dfrac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)} = 1$, rezultă că există N_ε astfel încît pentru $n \geqslant N_\varepsilon$ să avem $\dfrac{\ln(n+1) - \ln n}{\ln n - \ln(n-1)} - 1 \geqslant -\varepsilon = \theta - 1$, adică $\ln[(n+1)(n-1)^\theta] \geqslant \ln n^{\theta+1}$. Rezultă $(n+1)(n-1)^\theta \geqslant n^{\theta+1}$, $(\forall)\ n \geqslant N_\varepsilon$ ceea ce este totuna cu

$$\frac{1}{(n-1)^\theta} - \frac{1}{n^\theta} \leqslant \frac{1}{n^{\theta+1}},\ (\forall)\ n \geqslant N_\varepsilon.$$

Procedînd ca mai înainte, luînd $\nu = \max(N_\varepsilon, 4)$, rezultă că seria $\sum_{n=\nu}^{\infty} \sqrt{p_n}\left(\frac{1}{(n-1)^\theta} - \frac{1}{n^\theta}\right)$ este convegentă. În continuare, demonstrația este

absolut aceeași ca în celălalt caz, rezultînd la fel că seria din enunț este convergentă.

Rezumînd concluziile obținute, înseamnă că seria dată este divergentă pentru $\theta \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$ și convergentă pentru $\theta \in \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$. Pentru a demonstra și a doua afirmație din enunț, vom observa că

$$0 \leqslant \liminf_{n\to\infty} (\sqrt{p_{n+1}} - \sqrt{p_n}) = \liminf_{n\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{p_{n+1}} - \sqrt{p_n}}{n}}{\frac{1}{n}}.$$

Pe de altă parte se știe că dacă $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ și $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ sînt două serii cu termeni pozitivi, prima dintre ele convergentă, iar a doua divergentă, atunci

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} \leqslant \liminf_{n\to\infty} \frac{s_n}{t_n},$$

unde $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ și $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sînt șirurile sumelor parțiale asociate celor două serii respectiv*. În cazul nostru luăm $u_n = \frac{\sqrt{p_{n+1}} - \sqrt{p_n}}{n}$ și $v_n = \frac{1}{n}$; prima serie este convergentă (deoarece sîntem în cazul $\theta = 1$), iar a doua divergentă. Notînd cu s suma primei serii, vom avea:

$$0 \leqslant \liminf_{n\to\infty} (\sqrt{p_{n+1}} - \sqrt{p_n}) \leqslant \liminf_{n\to\infty} \frac{s_n}{t_n} \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{s}{t_n} = 0.$$

Deci $\liminf_{n\to\infty} (\sqrt{p_{n+1}} - \sqrt{p_n}) = 0$ și soluția este terminată.

PD 26. *Fie $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ șirul numerelor prime. Să se arate că seria*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_{n+1} - p_n}{n^2} \text{ este convergentă.}$$

Laurențiu Panaitopol, G. M.-A, 6/1978

Soluție. Fie $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ șirul sumelor parțiale. Avem

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{p_{k+1} - p_k}{k^2} = -p_1 + \sum_{k=2}^{n} p_k \cdot \left[\frac{1}{(k-1)^2} - \frac{1}{k^2}\right] + \frac{p_{n+1}}{n^2} =$$

$$= -p_1 + \sum_{k=2}^{n} p_k \frac{2k-1}{k^2(k-1)^2} + \frac{p_{n+1}}{n^2}. \qquad (1)$$

Deoarece seria are termeni pozitivi, șirul $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este crescător. Vom arăta că este și mărginit și atunci va fi convergent. Vom folosi teo-

* V. „Analiza matematică" de Miron Nicolescu, vol. I, Editura Tehnică, București 1957, pag. 275.

rema de distribuție a numerelor prime $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{p_n}{n \ln n} = 1$, pentru care se poate vedea cartea" Ce știm și ce nu știm despre numerele prime" a lui W. Sierpinski. Deci $(\forall)\ \varepsilon > 0$, $(\exists)\ N_\varepsilon$ astfel că pentru $n \geqslant N$ avem $-\varepsilon < \frac{p_n}{n \ln n} - 1 < \varepsilon$. Luînd $\varepsilon = 1$, va exista N_1 natural astfel că pentru $n \geqslant N_1$ vom avea $p_n < 2n \ln n$. Notînd $A = -p_1 + \sum\limits_{k=1}^{N_1-1} p_k \frac{2k-1}{k^2(k-1)^2}$, ținînd seama de (1) vom avea pentru $n \geqslant N_1$:

$$\sigma_n = A + \sum_{k=N_1}^{n} p_k \cdot \frac{2k-1}{k^2(k-1)^2} + \frac{p_{n+1}}{n^2} < A + 2 \cdot \sum_{k=N_1}^{n} \frac{(2k-1)\ln k}{k(k-1)^2} +$$

$$+ \frac{(n+1)\ln(n+1)}{n^2} \cdot \frac{p_{n+1}}{(n+1)\ln(n+1)} < A + 4 \cdot \sum_{k=N_1}^{n} \frac{\ln k}{(k-1)^2} +$$

$$+ \frac{2(n+1)\ln(n+1)}{n^2}, \qquad (2)$$

Șirul $\left(\frac{(n+1)\ln(n+1)}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ este evident convergent la zero, deci este mărginit; fie B marginea sa superioară. Să mai observăm că:

$$\sum_{k=N_1}^{n} \frac{\ln k}{(k-1)^2} < \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\ln k}{(k-1)^2} < \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(k-1)^{\frac{1}{2}}}{(k-1)^2} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-1)^{\frac{3}{2}}},$$

deoarece am ținut seama că pentru orice $k \geqslant 2$ există inegalitatea $\ln k < (k-1)^{\frac{1}{2}}$. Ultima serie din șirul majorărilor precedente este convergentă și fie C suma sa. Ținînd seama de cele de mai sus, folosind (2) rezultă: $\sigma_n < A + 4C + 2B$, $(\forall)\ n \geqslant N_1$, ceea ce arată că șirul $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este mărginit. Așadar seria din enunț este convergentă.

PD 27. *Dacă p_n este al n-lea număr prim, să se arate că*

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot \frac{p_{k+1}}{p_k} = \frac{n}{2}(n + \alpha_n) \quad \text{și} \quad \sum_{k=1}^{n} k \frac{p_k}{p_{k+1}} = \frac{n}{2}(n + \beta_n),$$

unde $\alpha_n \to 3$, iar $\beta_n \to 1$.

Laurențiu Panaitopol, G. M.-A, 3/1974

Soluție. Să notăm $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} k \cdot \frac{p_{k+1}}{p_k}$, $y_n = \sum\limits_{k=1}^{n} k \cdot \frac{p_k}{p_{k+1}}$, $z_n = x_n - \frac{n(n+1)}{2}$.

Putem scrie

$$z_n = \sum_{k=1}^{n}\left(k \cdot \frac{p_{k+1}}{p_k} - k\right) = \sum_{k=1}^{n} k \cdot \frac{p_{k+1} - p_k}{p_k}.$$

Deoarece

$$\frac{\dfrac{k(p_{k+1} - p_k)}{p_k}}{\dfrac{1}{\ln k}} = \frac{k \ln k}{p_k}(p_{k+1} - p_k) \geqslant \frac{2k \ln k}{p_k} \text{ și } \lim_{k\to\infty} \frac{k \ln k}{p_k} = 1,$$

rezultă că pentru $k \geqslant k_0$ avem $\dfrac{2k \ln k}{p_k} > 1$, deci $\dfrac{k(p_{k+1} - p_k)}{p_k} > \dfrac{1}{\ln k}$. Atunci

$\sum_{k=k_0}^{\infty} \dfrac{k(p_{k+1} - p_k)}{p_k} \geqslant \sum_{k=k_0}^{\infty} \dfrac{1}{\ln k} = \infty$. Cu atît mai mult $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{k(p_{k+1} - p_k)}{p_k} = \infty$,

adică $\lim_{n\to\infty} z_n = \infty$. Notînd $z'_n = \sum_{k=2}^{n} \dfrac{p_{k+1} - p_k}{\ln k}$, avem $\dfrac{z'_{n+1} - z'_n}{z_{n+1} - z_n} =$

$$= \frac{p_{n+2} - p_{n+1}}{\ln(n+1)} \cdot \frac{p_{n+1}}{(n+1)(p_{n+2} - p_{n+1})} \to 1$$

și atunci conform lemei lui Stolz rezultă

$$\frac{z'_n}{z_n} \to 1. \tag{1}$$

Dar

$$z'_n = \frac{p_{n+1}}{\ln n} + \sum_{k=3}^{n} p_k \left[\frac{1}{\ln(k-1)} - \frac{1}{\ln k}\right] - \frac{p_2}{\ln 2} = \frac{p_{n+1}}{\ln n} +$$

$$+ \sum_{k=3}^{n} \frac{p_k \ln \dfrac{k}{k-1}}{\ln k \cdot \ln(k-1)} - \frac{p_2}{\ln 2}. \tag{2}$$

Să observăm că

$$\lim_{\to\infty} \frac{p_k \ln \dfrac{k}{(k-1)}}{\ln k - 1} = \lim_{k\to\infty} \frac{p_k}{k \ln k} \cdot \ln\left[\left(+\frac{1}{k-1}\right)^k\right] \cdot \frac{\ln k}{\ln(k-1)} = 1 \cdot \ln e \cdot 1 =$$

$= 1$, deci $\lim_{k\to\infty} \dfrac{p_k \ln \dfrac{k}{k-1}}{\ln k \cdot \ln(k-1)} = 0$; atunci și $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\sum_{k=3}^{n} \dfrac{p_k \cdot \ln \dfrac{k}{k-1}}{\ln k \cdot \ln(k-1)}}{n-2} =$

$= 0$ (dacă un șir are o limită finită, șirul mediilor aritmetice are aceeași limită).

Folosind (2), rezultă că $\lim_{n\to\infty} \frac{z'_n}{n} = 1$. Atunci

$$\lim_{n\to\infty} \frac{z_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{z_n}{z'_n} \cdot \frac{z'_n}{n} = 1 \tag{3}$$

adică $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n - \frac{n(n+1)}{2}}{n} = 1$; notînd $\alpha'_n = \frac{x_n - \frac{n(n+1)}{2}}{n}$ avem așadar $\alpha'_n \to 1$. Dar atunci

$x_n = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} + n\alpha'_n = \frac{n}{2}(n + 2\alpha'_n + 1)$ și dacă în sfîrșit punem $\alpha_n = 2\alpha'_n + 1$, rezultă $x_n = \frac{n}{2}(n + \alpha_n)$, cu $\alpha_n \to 3$.

Avem de asemenea

$$y_n - \frac{n(n+1)}{2} = \sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{p_k}{p_{k+1}} - 1\right) = -z''_n, \text{ unde } z''_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k(p_{k+1} - p_k)}{p_{k+1}}.$$

Cum $z_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k(p_{k+1} - p_k)}{p_k}$, rezultă

$$\frac{z''_{n+1} - z''_n}{z_{n+1} - z_n} = \frac{(n+1)(p_{n+2} - p_{n+1})}{p_{n+2}} \cdot \frac{p_{n+1}}{(n+1)(p_{n+2} - p_{n+1})} \to 1,$$

și conform lemei lui Stolz $\frac{z''_n}{z_n} \to 1$. Atunci, folosind și (3):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{y_n - \frac{n(n+1)}{2}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{-z''_n}{n} = -\lim_{n\to\infty} \frac{z''_n}{z_n} \cdot \frac{z_n}{n} = -1.$$

Notînd $\beta'_n = \frac{y_n - \frac{n(n+1)}{2}}{n}$, avem așadar $\beta'_n \to -1$.

Dar atunci $y_n = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} + n\beta'_n = \frac{n}{2}(n + 2\beta'_n + 1)$ și punînd $\beta_n = 2\beta'_n + 1$, avem $y_n = \frac{n}{2}(n + \beta_n)$, cu $\beta_n \to -1$.

PD 28. *Pentru orice* $n \in \mathbf{N}$, $n > 1$, *să se stabilească inegalitatea* $p_1 p_2 \cdots p_n > p_{p_n}$, *unde* p_k *reprezintă al k-lea număr prim.*

Dragoș Popescu, G. M.-A, 12/1970

Soluție. Pentru $n = 2$, $n = 3$ inegalitatea se arată direct. Fie acum $n \geqslant 4$. Folosim inegalitatea lui Bonse:

$$p_1 p_2 \cdots p_n > p_{n+1}^2, \quad (\forall)\, n \geqslant 4 \tag{1}$$

pentru care se poate consulta cartea „Ce știm și ce nu știm despre numerele prime" de W. Sierpinski. De asemenea folosim inegalitatea

$$n^2 > p_n, \quad (\forall)\, n \geqslant 2 \tag{2}$$

pentru care se poate vedea nota: „Asupra celui de-al n-lea număr prim" de V. Mangu (G. M. — A 3/1974).
În (2) înlocuind n cu p_{n+1} obținem

$$p_{n+1}^2 > p_{p_{n+1}}, \quad (\forall)\, n \geqslant 2. \tag{3}$$

Cum

$$p_{n+1} > p_n \text{ rezultă } p_{p_{n+1}} > p_{p_n}. \tag{4}$$

Din (1), (3), (4) rezultă inegalitatea din enunț.

PD 29. *Considerăm fracția continuă infinită, regulată și periodică definită prin* $\alpha_1 = \overline{[a_1, a_2, \ldots, a_n]}$. *Pentru* $2 \leqslant i \leqslant n$ *orice* α_i *se obține din* α_{i-1} *printr-o permutare circulară a numitorilor incompleți (de exemplu* $\alpha_2 = \overline{[a_2, a_3, \ldots, a_n, a_1]}$*). Să se arate că*

$$\prod_{i=1}^{n} (\alpha_i - a_i) = \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} \alpha_i}.$$

Paul Radovici-Mărculescu, G. M. Metodică 2/1980

Soluție. Din definiția unei fracții continue infinite, regulată și periodică, avem:

$$\alpha_1 = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_1 + \ddots}}}}$$

de unde $\alpha_1 - a_1 = \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{a_1 + \ddots}}}}} =$

$= \cfrac{1}{[a_2, a_3, \ldots, a_n, a_1]} = \frac{1}{\alpha_2}$. În general, vom avea $\alpha_i - a_i = \frac{1}{\alpha_{i+1}}$ pentru $i =$ $= 1, 2, \ldots, n-1$, iar $\alpha_n - a_n = \frac{1}{\alpha_1}$.

Înmulțind relațiile de mai înainte, rezultă identitatea din enunț.

PD 30. *Dacă prin p_n se notează al n-lea număr prim, atunci seria*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{p_{p_n}} \text{ este divergentă.}$$

Dan Radu, G. M.-A, 12/1973

Soluție. Folosim teorema de distribuție a numerelor prime, conform căreia avem:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n \ln n}{p_n} = 1. \tag{1}$$

Să notăm $u_n = \frac{n}{p_{p_n}}$ și $v_n = \frac{1}{\ln n \cdot \ln p_n}$. Avem:

$$\frac{u_n}{v_n} = \frac{n}{p_{p_n}} \cdot \ln n \cdot \ln p_n = \frac{n \ln n}{p_n}, \frac{p_n \ln p_n}{p_{p_n}}.$$

deci conform cu (1) rezultă

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1 \text{ și atunci seriile } \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ și } \sum_{n=1}^{\infty} v_n$$

au aceeași natură. De asemenea $\frac{n^2}{p_n} = \frac{n \ln n}{p_n} \cdot \frac{n}{\ln n}$, deci tot din (1),

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{p_n} = \infty, \text{ adică } p_n < n^2, \text{ pentru } n \geq n_0. \tag{2}$$

De asemenea avem

$$\ln n < \sqrt{n}, \text{ pentru } n \geq n_1. \tag{3}$$

Luînd $n_2 = \max(n_0, n_1)$, vom avea pentru $n \geq n_2$:

$$v_n = \frac{1}{\ln n \cdot \ln p_n} > \frac{1}{\ln n \cdot \ln(n^2)} = \frac{1}{2(\ln n)^2} > \frac{1}{2n}$$

și atunci $\sum_{n=1}^{\infty} v_n \geq \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=n_2}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$, deci seria $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ este divergentă. Atunci și seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, adică seria din enunțul problemei, este divergentă.

PD 31. *Fie F mulțimea funcțiilor $f:[a, b] \to \mathbf{R}$, continue pe $[a, b]$, derivabile pe (a, b), pentru care există θ (depinzînd de f) astfel încît $f(b) - f(a) = (b - a) f'(\theta)$, $\theta \in \left(a, \frac{a+b}{2}\right)$.*

Să se arate că dacă $f_1, f_2 \in F$, atunci cel puțin una din funcțiile $f_1 + f_2$ sau $f_1 - f_2$ aparține lui F.

L. Panaitopol, G. M. 9–10, 1982

Soluție. Fie $f_1, f_2 \in F$ și să notăm $g = f_1 + f_2$, $h = f_1 - f_2$. Fie numerele $\theta_1, \theta_2 \in \left(a, \frac{a+b}{2}\right)$, astfel încît

$$f_1(b) - f_1(a) = (b - a) f_1'(\theta), \quad f_2(b) - f_2(a) = (b - a) f_2'(\theta_2).$$

Rezultă

$$g(b) - g(a) = (b - a) \cdot [f_1'(\theta_1) + f_2'(\theta_2)]$$

și

$$h(b) - h(a) = (b - a) \cdot [f_1'(\theta_1) - f_2'(\theta_2)]. \tag{1}$$

Fie funcțiile $u, v:[a, b] \to \mathbf{R}$ definite prin

$$u(x) = g'(x) - f_1'(\theta_1) - f_2'(\theta_2),$$

respectiv

$$v(x) = h'(x) - f_1'(\theta_1) + f_2'(\theta_2).$$

Rezultă

$$u(\theta_1) = g'(\theta_1) - f_1'(\theta_1) - f_2'(\theta_2) = f_1'(\theta_1) + f_2'(\theta_1) - f_1'(\theta_1) - f_2'(\theta_2) = f_2'(\theta_1) - f_2'(\theta_2)$$

și analog

$$u(\theta_2) = f_1'(\theta_2) - f_1'(\theta_1).$$

De asemenea

$$v(\theta_1) = f_1'(\theta_2) - f_2'(\theta_1)\,; \quad v(\theta_2) = f_1'(\theta_2) - f_1'(\theta_1).$$

Pentru a arăta că una din funcţiile g sau h aparţine lui F, este suficient să arătăm că u sau v se anulează în $[\theta_1, \theta_2]$. În adevăr, dacă $(\exists)\xi \in [\theta_1, \theta_2]$ cu $u(\xi) = 0$, atunci $\xi \in \left(a, \frac{a+b}{2}\right)$ şi din $u(\xi) = 0$, deducem $g'(\xi) = f_1'(\theta_1) + f_2'(\theta_2)$; din prima relaţie din (1) rezultă atunci $g(b) - g(a) = (b-a)\,g'(\xi)$, adică $g \in F$. Analog în cazul în care $v(\xi) = 0$, rezultă $h \in F$. Să arătăm aşadar că una din funcţiile u sau v se anulează în intervalul $[\theta_1, \theta_2]$.
Avem

$$u(\theta_1)\,u(\theta_2) = [f_2'(\theta_1) - f_2'(\theta_2)]\,[f_1'(\theta_2) - f_1'(\theta_1)],$$

$$v(\theta_1)\,v(\theta_2) = [f_2'(\theta_2) - f_2'(\theta_1)]\,[f_1'(\theta_2) - f_1'(\theta_1)].$$

Prin urmare $u(\theta_1)\,u(\theta_2)$ şi $v(\theta_1)\,v(\theta_2)$ au semne contrare, deci unul din ele este negativ. Dacă de exemplu $u(\theta_1)\,u(\theta_2) < 0$, cum u are proprietatea lui Darboux, rezultă că $(\exists)\ \xi \in [\theta_1, \theta_2]$ cu $u(\xi) = 0$. Analog dacă $v(\theta_1)\,v(\theta_2) < 0$, va rezulta $v(\xi) = 0$, ceea ce încheie soluţia.

PD 32. *Fie f o funcţie reală definită într-o vecinătate deschisă mărginită a lui zero. Ştiind că $f(0) = 0$ şi că funcţia f este derivabilă în origine, să se studieze limita:*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{p=n}^{kn} f\left(\frac{1}{p}\right), \text{ unde } k \in \mathbf{N}^*.$$

Dan Radu, G. M-A, 11/1972

Soluţie. Fie V_0 vecinătatea originii în care este definită funcţia f. Deoarece f este derivabilă în 0, avem

$$f'(0) = \lim_{x_n\to 0} \frac{f(x_n) - f(0)}{x_n - 0} = \lim_{x_n\to 0} \frac{f(x_n)}{x_n}, \tag{1}$$

$(\forall)\ (x_n)_{n\in\mathbf{N}}$, şir inclus în V_0 şi convergent la 0. Pe de altă parte este evident că există $\nu \in \mathbf{N}$ astfel încît oricare ar fi $p \in \mathbf{N}$, $p \geqslant \nu$ să avem $\frac{1}{p} \in V_0$.

Să considerăm atunci şirul $x_m = \frac{1}{\nu + m - 1}$, $m \in \mathbf{N}$. Evident $x_m \to 0$ şi din (1) urmează că $\lim\limits_{m\to\infty} (\nu + m - 1) f\left(\frac{1}{\nu + m - 1}\right) = f'(0)$.

Să presupunem dat $k \in \mathbf{N}^*$, $k \geqslant 2$ şi fie $\varepsilon > 0$; din relaţia de mai sus deducem că există $N_\varepsilon' \in \mathbf{N}$ astfel încît

$$\left|(\nu + m - 1) f\left(\frac{1}{\nu + m - 1}\right)\right| < \frac{\varepsilon}{4 \ln k},\ (\forall)\ m \geqslant N_\varepsilon'.$$

de unde

$$\left[f'(0)-\frac{\varepsilon}{4\ln k}\right]\frac{1}{\nu+m-1}<f\left(\frac{1}{\nu+m-1}\right)<\left[f'(0)+\frac{\varepsilon}{4\ln k}\right]\cdot\frac{1}{\nu+m-1}.$$

Notînd $\nu+m-1=p$ şi $N_\varepsilon''=N_\varepsilon'+\nu-1$, rezultă că pentru $n\geqslant N_\varepsilon''$ avem inegalităţile

$$\left[f'(0)-\frac{\varepsilon}{4\ln k}\right]\cdot\sum_{p=n}^{kn}\frac{1}{p}<\sum_{p=n}^{kn}f\left(\frac{1}{p}\right)<\left[f'(0)+\frac{\varepsilon}{4\ln k}\right]\cdot\sum_{p=n}^{kn}\frac{1}{p}. \tag{2}$$

Pe de altă parte se arată uşor că

$$\ln\frac{kn+1}{n}=\int_n^{kn+1}\frac{dx}{x}<\sum_{p=n}^{kn}\frac{1}{p}<\int_{n+1}^{kn}\frac{dx}{x}=\ln\frac{kn}{n-1},\quad n\geqslant 2.$$

Folosind aceste inegalităţi, precum şi inegalităţile (2) avem

$$\left[f'(0)-\frac{\varepsilon}{4\ln k}\right]\ln\frac{kn+1}{n}<\sum_{p=n}^{kn}f\left(\frac{1}{p}\right)<\left[f'(0)+\frac{\varepsilon}{4\ln k}\right]\ln\frac{kn}{n-1}. \tag{3}$$

Dar, pentru $k\geqslant 2$ avem

$$\left[f'(0)+\frac{\varepsilon}{4\ln k}\right]\ln\frac{kn}{n-1}=\left[f'(0)+\frac{\varepsilon}{4\ln k}\right]\left[\ln k+\ln\frac{n}{n-1}\right]<$$

$$<\left[f'(0)+\frac{\varepsilon}{2\ln k}\right]\ln k+f(0)\cdot\ln\frac{n}{n-1}\leqslant\left[f'(0)+\frac{\varepsilon}{2\ln k}\right]\ln k+$$

$$+\left|f'(0)\ln\frac{n}{n-1}\right| \tag{4}$$

iar

$$\left[f'(0)-\frac{\varepsilon}{4\ln k}\right]\ln\frac{kn+1}{n}=\left[f'(0)-\frac{\varepsilon}{2\ln k}\right]\ln\left(k+\frac{1}{n}\right)+$$

$$+\frac{\varepsilon}{4\ln k}\left(k+\frac{1}{n}\right)>\left[f'(0)-\frac{\varepsilon}{2\ln k}\right]\ln\left(k+\frac{1}{n}\right)>$$

$$>\left[f'(0)-\frac{\varepsilon}{2\ln k}\right]\cdot\ln k>\left[f'(0)-\frac{\varepsilon}{2\ln k}\right]\ln k-\left|f'(0)\ln\frac{n}{n-1}\right|. \tag{5}$$

Din relaţiile (3), (4) şi (5) deducem

$$-\frac{\varepsilon}{2}-\left|f'(0)\ln\frac{n}{n-1}\right|<\sum_{p=n}^{kn}f\left(\frac{1}{p}\right)-f'(0)\ln k<\frac{\varepsilon}{2}+\left|f'(0)\ln\frac{n}{n-1}\right|,$$

adică

$$\left|\sum_{p=n}^{kn} f\left(\frac{1}{p}\right) - f'(0)\cdot \ln k\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \left|f'(0)\cdot \ln \frac{n}{n-1}\right|.$$

Cum însă $\lim\limits_{n\to\infty}\left|f'(0)\ln\frac{n}{n-1}\right| = 0$, rezultă că există $N''_\varepsilon \in \mathbf{N}$, astfel încît

$$\left|f'(0)\cdot \ln\frac{n}{n-1}\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad (\forall)\, n \geqslant N''_\varepsilon.$$

Luînd atunci $N_\varepsilon = \max(2, N'_\varepsilon, N''_\varepsilon)$, urmează că pentru orice $n \geqslant N_\varepsilon$ avem

$$\left|\sum_{p=n}^{kn} f\left(\frac{1}{p}\right) - f'(0)\cdot \ln k\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

ceea ce arată că

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{p=n}^{kn} f\left(\frac{1}{p}\right) = f'(0)\cdot \ln k, \tag{6}$$

acest rezultat fiind valabil, după cum am văzut, pentru $k \geqslant 2$, $k \in \mathbf{N}$. În cazul $k = 1$ avem direct

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{p=n}^{kn} f\left(\frac{1}{p}\right) = \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = f(0) = 0,$$

care concordă cu (6), în care luăm $k = 1$. În concluzie, limita cată există pentru orice $k \in \mathbf{N}^*$ și este dată de egalitatea (6).

PD 33. a) *Să se demonstreze că șirul de funcții de termen general* f_n, $f_n : [0, \pi] \to \mathbf{R}$, *definit de relația*

$$f_n(x) = \frac{x \sin^n x}{(1 + \cos^2 x)^\alpha}, \quad \alpha \in \mathbf{R}_+$$

converge neuniform pe $[0, \pi]$ *și totuși*

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\pi f_n(x)\, dx = \int_0^\pi f(x)\, dx,$$

unde f *este limita șirului* $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$. *Să se deducă de aici că șirurile*

$$a_k = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}, \quad b_k = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}$$

unde $(2k)!! = 2\cdot 4\cdot 6 \ldots 2k$ *și* $(2k+1)!! = 1\cdot 3\cdot 5 \ldots (2k+1)$, *converg la zero.*

b) *Să se arate că funcția* $F: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, *dată de relația*

$$F(x) = \int_0^x \frac{\sin^n t\, dt}{(1 + \cos^2 t)^\alpha}, \alpha \in \mathbf{R},\ n \in \mathbf{N}$$

este periodică de perioadă 2π *pentru* $n = 2k + 1$, *iar pentru* $n = 2k$ *este suma dintre o funcție liniară și una periodică de perioadă* 2π.

Stelian Găină, G. M.-A, 5/1971

Soluție. a) Evident, $f(x) = 0$ pentru $x \neq \pi/2$ și $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi/2$. Deoarece funcțiile f_n sînt continue, iar f este discontinuă, rezultă că șirul $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ nu converge uniform pe $[0, \pi]$. Cum f este discontinuă numai în $\pi/2$, ea este integrabilă pe $[0, \pi]$ și evident

$$\int_0^\pi f(x)\, dx = 0.$$

Pentru a demonstra relația din enunț, vom stabili întîi că

$$\int_0^\pi x\varphi(\sin x)\, dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(\sin x)\, dx$$

unde $\varphi: [0, 1] \to \mathbf{R}$ este o funcție continuă arbitrară. În adevăr, făcînd în prima integrală schimbarea de variabilă $x = \pi - t$ obținem

$$\int_0^\pi x\varphi(\sin x)\, dx = \int_0^\pi (\pi - t)\, \varphi(\sin t)\, dt =$$

$$= \pi \int_0^\pi \varphi(\sin t)\, dt - \int_0^\pi t \sin t\, dt,$$

de unde

$$\int_0^\pi x\varphi(\sin x)\, dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \varphi(\sin x)\, dx = \frac{\pi}{2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(\sin x)\, dx +$$

$$+ \frac{\pi}{2} \cdot \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \varphi(\sin x)\, dx.$$

Efectuînd în ultima integrală aceeași schimbare de variabilă ca și mai sus, obținem rezultatul dorit. Luînd acum în rolul funcției φ funcția

$$\varphi: [0, 1] \to \mathbf{R},\ \varphi(y) = \frac{y^n}{(2 - y^2)^\alpha},$$

deducem că

$$0 \leqslant \int_0^{\pi} f_n(x)\,dx = \int_0^{\pi} x\varphi(\sin x)\,dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(\sin x)\,dx =$$

$$= \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{(1+\cos^2 x)^{\alpha}}\,dx \leqslant \pi\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx.$$

Fie $0 < \varepsilon < \pi$. Avem

$$0 \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}} \sin^n x\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dx \leqslant$$

$$\leqslant \sin^n\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}\right)\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}} dx + \frac{\varepsilon}{2} = \left[\sin^n\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}\right)\right]\cdot\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}\right) + \frac{\varepsilon}{2}\cdot$$

Cum şirul de termen general $\left[\sin^n\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}\right)\right]\cdot\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}\right)$ converge la zero, rezultă că pentru ε dat, există n_ε astfel încît, pentru orice $n \geqslant n_\varepsilon$, să avem

$$\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin^n\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}\right) < \frac{\varepsilon}{2}\cdot$$

Astfel, pentru $n \geqslant n_\varepsilon$ avem

$$\left|\int_0^{\pi} f_n(x)\,dx\right| < \varepsilon$$

şi relaţia din enunţ este stabilită. Pentru a demonstra şi ultima afirmaţie de la a) vom observa că pentru $\alpha = 0$:

$$\int_0^{\pi} f_n(x)\,dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x\cdot\sin x\,dx.$$

Efectuînd în ultima integrală o integrare prin părţi, deducem formula de recurenţă

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \frac{n-1}{n}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\,dx.$$

de unde se obține iterînd

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k+1} x dx = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} \quad \text{și} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k} x dx = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

De aici și din cele de mai înainte, rezultă că șirurile $(a_k)_{k\in\mathbf{N}}$ și $(b_k)_{k\in\pi}$ converg la zero.

b) Pentru a arăta afirmația de la acest punct, arătăm mai întîi că dacă $h: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ este continuă și periodică de perioadă $\omega > 0$, atunci pentru orice $a \in \mathbf{R}$ avem

$$\int_a^{a+\omega} h(x)\, dx = \int_0^{\omega} h(x)\, dx,$$

iar funcția $F:\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $F(x) = \int_0^x h(t)\, dt$ este suma dintre o funcție liniară și una periodică de perioadă ω. În adevăr

$$\int_a^{a+\omega} h(x)\, dx = \int_a^{\omega} h(x)\, dx + \int_{\omega}^{a+\omega} h(x)\, dx.$$

Făcînd în ultima integrală schimbarea de variabilă $x = \omega + t$, deducem ușor că

$$\int_a^{a+\omega} h(x)\, dx = \int_0^{\omega} h(x)\, dx.$$

Avem apoi

$$F(x+\omega) = \int_0^{x+\omega} h(t)\, dt = F(x) + \int_x^{x+\omega} h(t)\, dt = F(x) + \int_0^{\omega} h(t)\, dt.$$

Notăm $\alpha = \int_0^{\omega} h(t)\, dt$ și $G(x) = F(x) - \frac{\alpha x}{\omega}$ și arătăm că funcția G este periodică de perioadă ω. În adevăr

$$G(x+\omega) = F(x+\omega) - \frac{\alpha}{\omega} x - \alpha = F(x) + \alpha -$$

$$- \frac{\alpha}{\omega} x - \alpha = F(x) - \frac{\alpha}{\omega} x = G(x).$$

Din definiția lui G rezultă că F se scrie ca sumă dintre o funcție periodică și o funcție liniară. Pentru problema noastră vom lua funcția $h:\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $h(t) = \frac{\sin^n t}{(1+\cos^2 t)^{\alpha}}$, care este o funcție periodică de perioadă 2π. Pentru $n = 2k+1$,

funcția h este și impară, deci $\alpha = \int_0^{2\pi} h(t)\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} h(t)\,dt = 0$ și atunci $F = G$, care este periodică de perioadă 2π. Pentru $n = 2k$, avem rezultatul găsit mai sus, adică F este suma dintre funcția periodică G și o funcție liniară.

PD 34. *Fiind dată funcția* $f:\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *neconstantă, pentru care există* $k \neq 0$ *astfel încît* $f(x + y) = f(x) + f(y) - kf(x)\,f(y)$ *pentru orice* $x, y \in \mathbf{R}$, *să se arate că:*

a) *Dacă f este continuă în cel puțin un punct din* **R**, *atunci f este continuă pe* **R**.

b) *Dacă f este derivabilă în cel puțin un punct din* **R**, *atunci f este derivabilă pe* **R**.

c) *Funcțiile continue pe* **R**, *care verifică condițiile din enunț, sînt de forma* $f_a(x) = \frac{1}{k}(1 - a^x)$, $0 < a \neq 1$.

Virgil Nicula, G. M. 1/1981

Soluție. a) Avem mai mulți pași. 1) Arătăm că $f(0) = 0$; în adevăr luînd $x = y = 0$ obținem $kf^2(0) - f(0) = 0$, de unde $f(0) \in \left\{0, \frac{1}{k}\right\}$. Dacă am avea $f(0) = \frac{1}{k}$, făcînd $y = 0$ în relația dată obținem $f(x) = \frac{1}{k}$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$, în contradiție cu faptul că f este neconstantă. Așadar $f(0) = 0$. (Mai mult, putem arăta nu numai că $f(0) \neq \frac{1}{k}$, ci chiar că $f(x) \neq \frac{1}{k}$, $(\forall) x \in \mathbf{R}$; în adevăr dacă $(\exists) x_0 \in \mathbf{R}$ cu $f(x_0) = \frac{1}{k}$, atunci $f(x_0 + y) = \frac{1}{k}$, $(\forall)\ y \in \mathbf{R}$, adică f ar fi constantă).

2) Arătăm că dacă f este continuă într-un punct $\alpha \in \mathbf{R}$, atunci este continuă mai întîi în origine. În adevăr, luînd $y = \alpha$ în relația dată, avem

$$f(x + \alpha) = f(x) + f(\alpha) - k f(x) f(\alpha), \text{ deci cum } f(\alpha) \neq 1/k:$$

$$f(x) = \frac{f(x + \alpha) - f(\alpha)}{1 - k f(\alpha)}\ ; \quad \text{făcînd } x \to 0, \text{ avem } x + \alpha \to \alpha$$

și cum f este continuă în α, rezultă $\lim_{x \to 0} f(x + \alpha) = f(\alpha)$ și atunci $\lim_{x \to 0} f(x) = \frac{f(\alpha) - f(\alpha)}{1 - k f(\alpha)} = 0 = f(0)$.

ß) Arătăm că dacă f este continuă în punctul $\alpha \in \mathbf{R}$, atunci este continuă în orice alt punct $x_0 \in \mathbf{R}$.

În adevăr, fie $t \to x_0$; punînd $t = x + x_0$, vom avea $x \to 0$ și utilizînd relația din enunț, avem

$$f(t) = f(x + x_0) = f(x) + f(x_0) - kf(x)f(x_0),$$

astfel că prin trecere la limită și utilizînd continuitatea în zero avem $\lim_{t \to x_0} f(t) = \lim_{x \to 0} f(x) + f(x_0) - kf(x_0) \cdot \lim_{x \to 0} f(x) = f(x_0)$, ceea ce arată că f este continuă în x_0.

b). 1) Arătăm că dacă f este derivabilă într-un punct $\alpha \in \mathbf{R}$, atunci este derivabilă și în origine. În adevăr, pentru $x_n \neq 0$ avem

$$\frac{f(x + \alpha) - f(\alpha)}{x} = \frac{f(x)}{x} \cdot [1 - kf(\alpha)]$$

și cînd $x \to 0$ membrul stîng are ca limită $f'(\alpha)$, ceea ce obligă la existența limitei $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = f'(0)$; astfel f este derivabilă în zero.

2) Arătăm că dacă f este derivabilă în punctul $\alpha \in \mathbf{R}$, atunci este derivabilă în orice alt punct $x_0 \in \mathbf{R}$.

În adevăr

$$\frac{f(x_0 + x) - f(x_0)}{x} = \frac{f(x)}{x} \cdot [1 - kf(x_0)].$$

Cînd $x \to 0$, membrul drept are limita $f'(0) \cdot [1 - kf(x_0)]$ și atunci rezultă că și membrul stîng are limită, deci f este derivabilă în x_0.

c) Fie $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(x) = 1 - kf(x)$. Funcția g este neconstantă, iar relația din enunț este echivalentă cu
$1 - kf(x + y) = [1 - kf(x)][1 - kf(y)]$, adică $g(x + y) = g(x)\,g(y)$ $(\forall)\ x, y \in \mathbf{R}$.

Se știe că singurele funcții continue neconstante ce verifică această egalitate sînt funcțiile $g_a(x) = a^x$, $0 < a \neq 1$ (iar funcțiile continue constante ce verifică relația sînt $g_0(x) = 0$ și $g_1(x) = 1$). Corespunzător, rezultă că funcțiile f căutate sînt $f_a(x) = \frac{1}{k}(1 - a^x)$, $0 < a \neq 1$.

PD 35. *Fie $(a_n)_{n \geq 1}$, $(b_n)_{n \geq 1}$ șiruri de numere reale astfel încît $a_n \in (-1, 0)$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}^*$ și $\lim_{n \to \infty} a_n = a \in (-1, 0]$. Să se demonstreze că șirul $(x_n)_{n \geq 1}$, cu proprietatea că $x_{n+1} + a_n x_n = b_n$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}^*$, este convergent dacă și numai dacă șirul $(b_n)_{n \in \mathbf{N}}$ este convergent.*

D. M. Bătinețu, G. M. 11/1981

Soluție. Vom demonstra următoarea propoziție: „dacă $(a_n)_{n \geq 1}$, $(b_n)_{n \geq 1}$ sînt șiruri de numere reale, astfel încît $a_n \in \mathbf{R}^*$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}^*$, atunci soluția

generală a recurenței liniare de ordinul întîi: $x_{n+1} + a_n x_n = b_n$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}^*$ (1') este

$$x_{n+1} = (-1)^n a_1 a_2 \ldots a_n \left[x_1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k b_k}{a_1 a_2 \ldots a_k} \right], \tag{1}$$

unde $x_1 \in \mathbf{R}$ este o constantă arbitrară.

Demonstrație. Să considerăm șirul $(p_n)_{n \geqslant 1}$ astfel încît $p_1 = 1$, $p_n = (-1)^{n-1} a_1 a_2 \ldots a_{n-1}$, $(\forall)\ n \geqslant 1$. Fie $(y_n)_{n \geqslant 1}$ șirul de numere reale cu proprietatea că $x_n = y_n p_n$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}^*$. Cu aceste notații, recurența (1') devine:

$$p_{k+1} y_{k+1} + a_k p_k y_k = b_k, \qquad (\forall)\ k \in \mathbf{N}^*,$$

și dacă ținem seama că $a_k p_k = -p_{k+1}$ $(\forall)\ k \in \mathbf{N}^*$, deducem că

$$p_{k+1}(y_{k+1} - y_k) = b_k, \qquad (\forall)\ k \in \mathbf{N}^*.$$

Deoarece $p_k \in \mathbf{R}^*$, $(\forall)\ k \in \mathbf{N}^*$, din recurența precedentă obținem:

$$y_{k+1} - y_k = \frac{b_k}{p_{k+1}},\ (\forall)\ k \in \mathbf{N}^*, \text{ de unde rezultă}$$

$$y_{n+1} = y_1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{p_{k+1}},\ (\forall)\ n \in \mathbf{N}^* \Leftrightarrow x_{n+1} = p_{n+1}\left(x_1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{p_{k+1}} \right),$$

$$(\forall)\ n \in \mathbf{N}^* \Leftrightarrow x_{n+1} = (-1)^n a_1 a_2 \ldots a_n \left[x_1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k b_k}{a_1 a_2 \ldots a_k} \right],\ (\forall)\ n \in \mathbf{N}^*$$

și propoziția este demonstrată. Să trecem acum la rezolvarea propriu-zisă a problemei.

Dacă șirul $(x_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ este convergent și $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x \in \mathbf{R}$, atunci $\lim\limits_{n \to \infty} (x_{n+1} + a_n x_n) = x(1 + a) = \lim\limits_{n \to \infty} b_n$ și deci șirul $(b_n)_{n \geqslant 1}$ este convergent.

Reciproc, dacă șirul $(b_n)_{n \geqslant 1}$ este convergent și $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = b \in \mathbf{R}$, vom arăta că șirul $(x_n)_{n \geqslant 1}$ este convergent. În adevăr, în conformitate cu (1) avem

$$x_{n+1} = p_{n+1}\left(x_1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{p_{k+1}} \right), \quad (\forall)\ n \in \mathbf{N}^*. \tag{2}$$

Avem $a_n \in (-1, 0)$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}^* \Rightarrow -\frac{1}{a_n} \in (1, \infty)$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}^*$. Mai departe observăm că

$$\frac{1}{p_{n+1}} - \frac{1}{p_n} = -\frac{1}{a_n} \cdot \frac{1}{p_n}(1 + a_n) > 0,\ (\forall)\ n \in \mathbf{N}^*,$$

Prin urmare şirul $\left(\frac{1}{p_n}\right)_{n\geq 1}$ este strict crescător. Totodată el este şi nemărginit, deoarece din $-\frac{1}{a_n} \in (1, \infty)$, $(\forall)\, n \in \mathbf{N}^*$, deducem că $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{p_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \prod\limits_{k=1}^{n-1} \left(-\frac{1}{a_n}\right) = +\infty$.

Cu aceasta ne-am asigurat că în calculul limitei şirului $(x_n)_{n\geq 1}$ putem aplica teorema Stolz—Cesaro.

Din (2) avem

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{b_k}{p_{k+1}}}{\frac{1}{p_{n+1}}} \overset{\ddot{u}}{=} b \lim_{n\to\infty} \frac{1}{p_{n+2}} \cdot \frac{p_{n+2}}{1 + a_{n+1}} = \frac{b}{1+a}$$

şi problema este rezolvată.

(Am aplicat teorema Stolz-Cesaro la trecerea prin semnul ü).

PD 36. *Să se demonstreze că dacă $B'C - BC' = AC^2$, ecuaţia lui Ricatti $y' = Ay^2 + By + C$ este integrabilă şi să i se găsească integrala generală* (A, B, C, y *sînt funcţii reale continue de argument real* x).

M. Ghermănescu, G. M. 5/1942

Soluţie. Se ştie că dacă se cunoaşte o soluţie particulară y_0 a ecuaţiei Ricatti, atunci prin schimbarea de funcţie $y = y_0 + \frac{1}{z}$, se obţine o ecuaţie liniară în z.

De aceea vom căuta mai întîi o soluţie particulară. Condiţia din enunţ se mai scrie $(B/C)' = A$ pe mulţimea $\{x \in \mathbf{R} \mid C(x) \neq 0\}$ şi ecuaţia Ricatti dată devine $y' = (B/C)'\, y^2 + By + C$ sau

$$(-1/y)' = (B/C)' + B \cdot 1/y + C \cdot (1/y)^2,$$

sau încă

$$\left(\frac{1}{y} + \frac{B}{C}\right)' + \frac{C}{y}\left(\frac{1}{y} + \frac{B}{C}\right) = 0.$$

Dacă $1/y + B/C = 0$, obţinem soluţia particulară $y_0 = -C/B$. Efectuînd atunci schimbarea de funcţie $y = -C/B + 1/z$, ecuaţia propusă se transformă în ecuaţia liniară $z' = \left(\frac{2AC}{B} - B\right) z - A$. Pentru rezolvarea acesteia aplicăm metoda variaţiei constantelor. Ecuaţia omogenă $z' = \left(\frac{2AC}{B} - B\right) z$

are soluția $z = ue^v$, unde u este o constantă, iar v este o primitivă a funcției $\frac{2AC}{B} - B$.

Considerînd acum u ca funcție de x, obținem

$$z' = u'e^v + ue^v \cdot v' = u'e^v + ue^v \cdot \left(\frac{2AC}{B} - B\right)$$

și înlocuind în ecuația liniară neomogenă obținem

$$u'e^v + ue^v\left(\frac{2AC}{B} - B\right) = \left(\frac{2AC}{B} - B\right)ue^v - A,$$

adică $u'e^v = -A$, de unde $u' = -Ae^{-v}$. Rezultă $u(x) = -\int A(x)\, e^{-v(x)}\, dx + K$ și deci soluția generală a ecuației liniare în z este

$$z(x) = e^{v(x)} \cdot \left[-\int A(x)\, e^{-v(x)}\, dx + K\right].$$

Atunci, integrala generală a ecuației Ricatti este

$$y(x) = y_0(x) + \frac{1}{z(x)} = -\frac{C(x)}{B(x)} + \frac{e^{-v(x)}}{K - \int A(x)\, e^{-v(x)}\, dx},$$

unde K este o constantă, iar v are semnificația precizată anterior.

Capitolul **IX**

PROBLEME PENTRU EXAMENELE DE ADMITERE ÎN FACULTĂȚI (A)

Introducere

Concursurile de admitere în învățămîntul superior au o tradiție internațională și constituie pentru tineret o preocupare vitală, de finalitatea căreia depind cariere viitoare. De aceea, probele de matematică trecute în anii anteriori suscită cel mai viu interes și au o importanță deosebită în pregătirea pentru astfel de concursuri. La noi în țară au căpătat o importanță asemănătoare și concursurile de admitere în treapta a II-a prin dificultățile pe care le oferă problemele respective.

În consecință, am consacrat un întreg capitol problemelor de admitere publicate în G. M. dîndu-le soluții cît mai explicite și mai pline de sugestii în vederea folosirii metodelor și instrumentelor și în alte cazuri asemănătoare.

În secțiunea de algebră sînt de subliniat probleme care de fapt sînt de teoria numerelor ca (A 1), (A 2), altele care privesc polinoamele, ca (A 3), (A 8). Rezolvări de ecuații cu radicali se găsesc, de exemplu în (A 6), (A 13). Sînt de semnalat și probleme de structuri algebrice ca (A 7), (A 14) în care intervin matrice, precum și probleme cu soluții care folosesc artificii de calcul ca (A 5), (A 16).

Problemele de analiză ocupă un loc de seamă în probele de concursuri de admitere. Vom găsi mai multe probleme privitoare la șiruri, temă de predilecție în ultimii ani, de exemplu (A 57), (A59) sau (A 62), altele, la proprietăți ale unor funcții ca și cele din (A 58), (A 60) sau (A 65). Probleme de limite sînt de asemenea în repertoriul concursurilor, de exemplu, (A 66) sau (A 70), precum și probleme de ecuații algebrice sau transcendente ca (A 76).

În general, se constată o tendință spre probleme cu caracter teoretic, evitîndu-se caracterul algoritmic.

Geometria apare sub formele sintetică și analitică. În probleme de geometrie sintetică vom găsi și configurații tridimensionale ca în (A 39), (A 41) sau (A 49), dar în general problemele privesc configurații plane: relații metrice ca în (A 37), (A 53), (A 56), locuri geometrice ca în (A 38), (A 40), (A 55), proprietăți de figuri ca în (A 42). Vom sublinia prezența mai multor probleme de geometrie analitică ca (A 44), (A 50), (A 52).

Trigonometria este bine reprezentată în problemele de admitere sub formă de ecuații ca în (A 18), (A 19), (A 21), (A 24), proprietăți ale triunghiurilor ca în (A 28), (A 29), (A 34), reprezentări geometrice ale numerelor complexe ca în (A 27) sau (A 31).

Considerăm că acest capitol poate aduce servicii și sugestii concurenților la examenele de admitere, dacă aceștia își completează pregătirea și cu celelalte capitole de probleme.

A 1. *Fie* $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{1982}$ *coeficienții polinomului* $(1 + x + x^2)^{991}$. *Să se arate că* $a_0 + a_2 + a_4 + \ldots + a_{1982}$ *este un număr par.*

Universitatea din București, Facultatea de Matematică, G. M. 11/1982

Soluție. Avem $(1 + x + x^2)^{991} = \sum_{k=0}^{1982} a_k x^k$. Înlocuind pe x cu 1 obținem

$$3^{991} = \sum_{k=0}^{1982} a_k \tag{1}$$

și înlocuind pe x cu (-1) obținem $1 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots + a_{1982}$. (2)
Adunînd relațiile (1) și (2) obținem $2(a_0 + a_2 + \ldots a_{1982}) = 3^{991} + 1$.
Dar $3^{991} = (4 - 1)^{991} = 4h - 1$ cu $h \in \mathbf{N}$. Deci $a_0 + a_2 + \ldots + a_{1982} = 2h$.

A 2. *Să se arate că numărul natural*

$$a = 5^{2n-1} + 5^{3n+1} + 5^{5n} \text{ se divide cu } 31,\ n \in \mathbf{N},\ n \geqslant 1.$$

Institutul Politehnic București, G. M. 12/1982

Soluție. Avem

$$A = 5^{2n-1}(1 + 5^{3n+2} + 5^{3n+1}) = 5^{2n-1}(1 + 125^n \cdot 25 + 125^n \cdot 5) =$$

$$= 5^{2n-1}[1 + (\mathcal{M}31 + 1) \cdot 25 + (\mathcal{M}31 + 1)\,5] = 5^{2n-1} \cdot \mathcal{M}31 = \mathcal{M}31.$$

A 3. *Fie polinomul* $P = x^3 - x^2 + 2$. *Dacă* $x_1 \in \mathbf{R}$, $P(x_1) = 0$, $x_2, x_3 \in \mathbf{C}\setminus\mathbf{R}$, $P(x_2) = P(x_3) = 0$, *să se determine un polinom* Q *de gradul al doilea cu coeficienți reali astfel încît* $Q(x_1) = x_2$, $Q(x_2) = x_3$, $Q(x_3) = x_2$.

Institutul Politehnic București, 1980, G. M. 10/1980

Soluție. Se observă mai întîi că $P = x^3 - x^2 + 2 = (x^3 + 1) - (x^2 - 1) =$ $= (x + 1)(x^2 - x + 1) - (x - 1)(x + 1) = (x + 1)(x^2 - 2x + 2)$, deci conform ipotezei $x_1 = -1$ și x_2, x_3 sînt rădăcinile ecuației $x^2 - 2x + 2 = 0$, adică $x_2 = 1 - i$, $x_3 = 1 + i$. Considerînd $Q = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$, și impunînd condițiile din ipoteză obținem

$$Q(x_1) = x_1 \Leftrightarrow Q(-1) = -1 \Leftrightarrow a - b + c = -1. \quad (1)$$

$$Q(x_2) = x_3 \Leftrightarrow Q(1 - i) = 1 + i \Leftrightarrow (2a + b + c) + (-2a - b)i =$$

$$= 1 + i \Leftrightarrow 2a + b + c = 1 \ (2) \text{ și } -2a - b = 1. \quad (3)$$

Rezolvînd sistemul dat de relațiile (1), (2), (3) obținem $a = 2$, $b = -5$, $c = 2$, valori care verifică și condiția $Q(x_3) = x_2$.
(De altfel, observînd că x_2 și x_3 sînt conjugate, deducem că relațiile $Q(x_2) = x_3$ și $Q(x_3) = x_2$ sînt echivalente, căci putem scrie: $Q(x_2) = x_3 \Leftrightarrow Q(\bar{x}_3) = \bar{x}_2 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow Q(x_3) = \bar{x}_2 \Leftrightarrow Q(x_3) = x_2$. De aceea am folosit numai condiția $Q(x_2) = x_3$).

A 4. *Să se demonstreze că* $\log_5 10$ *nu este rațional.*

Universitatea din București, Facultatea de Matematică, 1980

Soluție. Presupunem prin absurd că $\log_5 10 = p/q$ unde p și q sînt numere naturale nenule relativ prime. Egalitatea se mai scrie

$$5^{p/q} = 10 \text{ sau, ridicînd la puterea } q\text{: } 5^p = 10^q.$$

Ultima egalitate este însă o contradicție, deoarece membrul stîng este un număr impar, iar membrul drept este un număr par.

A 5. *Arătați că dacă* $a, b, c \in \mathbf{Q}$ *și* $a\sqrt[3]{4} + b\sqrt[3]{2} + c = 0$ *atunci* $a = b = c = 0$ *(enunț simplificat).*

Universitatea din București, Facultatea de Matematică, 1980, G. M. 10/1982

Soluție. Înmulțim egalitatea din enunț cu $\sqrt[3]{2}$ și obținem $b\sqrt[3]{4} + c\sqrt[3]{3} + 2a = 0$. Înmulțind egalitatea din enunț cu b și egalitatea precedentă cu $-a$ și adunînd, obținem

$$\sqrt[3]{2}(b^2 - ac) + bc - 2a^2 = 0. \quad (1)$$

Dacă $b^2 - ac \neq 0$ atunci $\sqrt[3]{2} = \dfrac{2a^2 - bc}{b^2 - ac} \in \mathbf{Q}$, contradicție.

Așadar

$$b^2 - ac = 0. \quad (2)$$

Din (1) rezultă

$$bc - 2a^2 = 0. \quad (3)$$

Presupunem $a \neq 0$. Din (2) rezultă $c = b^2/a$ care înlocuit în (3) dă: $b^3/a = 2a^2$ adică $b^3/a^3 = 2$ sau $b/a = \sqrt[3]{2}$, din nou contradicție, deoarece $b/a \in \mathbf{Q}$ și $\sqrt[3]{2} \notin \mathbf{Q}$. Rămîne cazul $a = 0$. Din (2) rezultă $b = 0$, valori care înlocuite în egalitatea din enunț implică $c = 0$.

A 6. *Să se rezolve ecuația* $\sqrt{1 + ax} = x + \sqrt{1 - ax}$.

Treapta a II-a 1983, profil matematică—fizică, G. M. 9,1983

Soluție. Ecuația se mai poate scrie

$$\sqrt{1 + ax} - \sqrt{1 - ax} = x \quad \text{sau} \quad \frac{2ax}{\sqrt{1 + ax} + \sqrt{1 - ax}} = x.$$

Obținem soluția $x = 0$, pentru orice $a \in \mathbf{R}$. În continuare avem

$$\sqrt{1 + ax} + \sqrt{1 - ax} = 2a \Leftrightarrow 1 + ax \geqslant 0,\ 1 - ax \geqslant 0,\ a \geqslant 0$$

și

$$1 + ax + 1 - ax + 2\sqrt{1 - a^2x^2} = 4a^2 \Leftrightarrow a \geqslant 0,\ |ax| \leqslant 1$$

și

$$\sqrt{1 - a^2x^2} = 2a^2 - 1 \Leftrightarrow a \geqslant 0,\ |ax| \leqslant 1,\ 2a^2 - 1 \geqslant 0$$

și

$$1 - a^2x^2 = 4a^4 - 4a^2 + 1 \Leftrightarrow a \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}},\ |ax| \leqslant 1$$

și

$$x^2 = 4(1 - a^2) \Leftrightarrow a \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}},\ a^2 \leqslant 1,\ |ax| \leqslant 1$$

și

$$x = \pm 2\sqrt{1 - a^2} \Leftrightarrow a \in \left[\frac{1}{\sqrt{2}},\ 1\right],\ a^2x^2 \leqslant 1 \text{ și } x = \pm 2\sqrt{1 - a^2}.$$

Cum $a^2 \cdot 4(1 - a^2) \leqslant 1 \Leftrightarrow (2a^2 - 1)^2 \geqslant 0$, rezultă că soluțiile $x = \pm 2\sqrt{1 - a^2}$ convin numai pentru $a \in \left[\frac{1}{\sqrt{2}},\ 1\right]$.

A 7. *Fie* $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ \beta & 0 \end{pmatrix}$ *o matrice cu coeficienți reali.*

a) *Să se arate că dacă* $x_0I + x_1A + x_2A^2 = 0$ *(unde* $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, *iar* x_0, x_1, x_2 *sînt numere reale), atunci* $x_1 = -\alpha x_2$ $x_0 = -\beta x_2$.

b) *Să se determine* α, β *astfel încît* $(A - I)^2 = 0$.

c) *Să se determine* α, β *astfel încît* $A^2 = I$.

Universitatea din Bucureşti, Facultatea de Matematică, 1976, G. M. 2, 1977

Soluţie. a) Deoarece $A^2 = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ \beta & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ \beta & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^2 + \beta & \alpha \\ \alpha\beta & \beta \end{pmatrix}$,

relaţia dată devine

$$x_0\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + x_1\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ \beta & 0 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} \alpha^2 + \beta & \alpha \\ \alpha\beta & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sau

$$\begin{pmatrix} x_0 & 0 \\ 0 & x_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1\alpha & x_1 \\ x_1\beta & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2(\alpha^2 + \beta) & \alpha x_2 \\ \alpha\beta x_2 & \beta x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sau

$$\begin{pmatrix} x_0 + \alpha x_1 + (\alpha^2 + \beta)x_2 & x_1 + \alpha x_2 \\ \beta x_1 + \alpha\beta x_2 & x_0 + \beta x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sau

$$\begin{cases} x_0 + \alpha x_1 + x_2(\alpha^2 + \beta) = 0, \\ \beta x_1 + x_2(\beta\alpha) = 0, \\ x_0 + x_2\beta = 0. \end{cases}$$

Ultimele două egalităţi dau $x_0 = -\beta x_2$ şi $x_1 = -\alpha x_2$, relaţie ce verifică şi prima egalitate.

b) Din $(A - I)^2 = A^2 - 2A + I = 0$ rezultă următoarele relaţii

$$\begin{cases} 1 - 2\alpha + (\alpha^2 + \beta) = 0, \\ -2\beta + \beta\alpha = 0, \\ -2 + \alpha = 0, \\ 1 + \beta = 0. \end{cases}$$

Rezultă $\alpha = 2$ şi $\beta = -1$ din ultimele două ecuaţii. De asemenea, sînt verificate şi primele două ecuaţii de aceste valori.

c) Din relația dată rezultă

$$\begin{pmatrix} \alpha^2+\beta & \alpha \\ \beta\alpha & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

adică $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, $\beta\alpha = 0$, $\alpha = 0$, $\beta = 1$, adică $\alpha = 0$ și $\beta = 1$.

A 8. a) *Se dă polinomul* $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ *cu* $a, b, c \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$. *Notăm cu* x_1, x_2, x_3 *rădăcinile ecuației* $P(x) = 0$, *presupuse distincte două cîte două. Să se arate că avem:*

$$\frac{x_1}{P'(x_1)} + \frac{x_2}{P'(x_2)} + \frac{x_3}{P'(x_3)} = 0,$$

$P'(x)$ *fiind derivata lui* $P(x)$;

b) *Dacă* $Q(x)$ *este un polinom de gradul întîi, să se arate că:*

$$\frac{Q(x_1)}{P'(x_1)} + \frac{Q(x_2)}{P'(x_2)} + \frac{Q(x_3)}{P'(x_3)} = 0;$$

c) *Să se determine rădăcinile* y_1, y_2, y_3 *ale ecuației* $P(y + a) = 0$ *(a este coeficientul lui* x^2 *din* $P(x)$*), ca funcții de rădăcinile* x_1, x_2, x_3 *ale ecuației* $P(x) = 0$).

Să se arate că, dacă ecuațiile $P(x) = 0$ *și* $P(y + a) = 0$ *admit două rădăcini comune, atunci rădăcinile ecuației* $P(x) = 0$ *sînt în progresie aritmetică.*

Institutul Politehnic din Timișoara, 1975, G. M. 10/1975

Soluție. a) $P(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$. Derivînd și înlocuind $x = x_1$, $x = x_2$, $x = x_3$ se obține:

$P'(x_1) = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)$, $P'(x_2) = (x_2 - x_1)(x_2 - x_3)$ și

$P'(x_3) = (x_3 - x_1)(x_3 - x_2)$ verificîndu-se apoi identitatea din enunț.

b) Folosind valorile de mai înainte ale lui $P'(x_1)$, $P'(x_2)$, $P'(x_3)$ se arată ușor că și

$$\frac{1}{P'(x_1)} + \frac{1}{P'(x_2)} + \frac{1}{P'(x_3)} = 0.$$

Dacă $Q(x) = mx + n$, vom avea

$$\frac{Q(x_1)}{P'(x_1)} + \frac{Q(x_2)}{P'(x_2)} + \frac{Q(x_3)}{P'(x_3)} = m\left[\frac{x_1}{P'(x_1)} + \frac{x_2}{P'(x_2)} + \frac{x_3}{P'(x_3)}\right] +$$

$$+ n\left[\frac{1}{P'(x_1)} + \frac{1}{P'(x_2)} + \frac{1}{P'(x_3)}\right] = 0.$$

c) $y_i = x_i - a$, $i = 1, 2, 3$.

Să presupunem că x_1 și x_2 sînt rădăcini comune celor două ecuații. Deci $\{x_1, x_2\} = \{y_1, y_2\}$ sau $\{x_1, x_2\} = \{y_2, y_3\}$ sau $\{x_1, x_2\} = \{y_1, y_3\}$. Dacă am avea $\{x_1, x_2\} = \{y_1, y_2\}$, atunci deoarece $a \neq 0$ trebuie ca $x_1 = y_2$ și $x_2 = y_1$, dar de aici rezultă $a = 0$, contradicție. Dacă avem $\{x_1, x_2\} = \{y_2, y_3\}$, neputînd avea $x_2 = y_2$ va trebui ca $x_1 = y_2$ și $x_2 = y_3$ adică $x_1 = x_2 - a$, $x_2 = x_3 - a$, deci x_1, x_2, x_3 formează o progresie aritmetică.

Analog se tratează cazul $\{x_1, x_2\} = \{y_1, y_3\}$, obținîndu-se de asemenea progresie o aritmetică.

A 9. a) *Să se calculeze suma:*

$$S = \frac{f(x_1 + x_2)}{x_3} + \frac{f(x_2 + x_3)}{x_1} + \frac{f(x_3 + x_1)}{x_2}$$

unde x_1, x_2 *și* x_3 *sînt rădăcinile ecuației* $f(x) = x^3 + ax^2 + b = 0$.

b) *Pentru ce valori ale lui* x *fracția:*

$$\frac{x^2 + |x| - 2}{x^2 - |x| - 6}$$

este pozitivă?

Institutul Politehnic din București, 1972, G. M. 1/1973

Soluție. Dacă x_1 și x_2 sînt două dintre rădăcinile ecuației $f(x) = 0$, atunci avem:

$$f(x_1 + x_2) = 3x_1 x_2(x_1 + x_2) + 2ax_1 x_2 - b.$$

Ținem seamă de relațiile dintre rădăcinile și coeficienții ecuației date:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -a$$
$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 0$$
$$x_1x_2x_3 = -b.$$

din care mai rezultă încă:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = 0 \text{ și } \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2} = \frac{2}{b}.$$

Deci $f(x_1 + x_2) = 2b - ax_1x_2$ și:

$$S = 2b\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right) - a\left(\frac{x_1x_2}{x_3} + \frac{x_2x_3}{x_1} + \frac{x_3x_1}{x_2}\right) =$$
$$= ab\left(\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2}\right) = ab \cdot \frac{-2a}{b} = -2a^2.$$

b) Avem

$$\frac{x^2 + |x| - 2}{x^2 - |x| - 6} = \frac{(|x| + 2)(|x| - 1)}{(|x| + 2)(|x| - 3)}.$$

Întrucît $|x| + 2 > 0$, rămîne de stabilit pentru ce valori ale lui x fracția

$$F = \frac{|x| - 1}{|x| - 3}$$

ia valori pozitive. Stabilim mai întîi semnul fracției prin tabelul următor:

$\|x\|$	0		1		3		$+\infty$
$\|x\| - 1$	$- - - - - 0$	$+ + + + + + + + +$					
$\|x\| - 3$	$- - - - - - - - - - 0$	$+ + + + +$					
F	$+ + + + + 0$	$- - -$	$\|$	$+ + + + +$			

din care deducem: $0 \leqslant |x| \leqslant 1$ sau $|x| > 3$, adică

$$x \in (-\infty, -3) \cup [-1, 1] \cup (3, +\infty).$$

A 10. *Se consideră ecuațiile* $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ *și* $g(x) = x^3 + (a + \lambda)x^2 + (b + \lambda)x + c + \lambda = 0$, *unde* a, b, c *și* λ *sînt numere reale.*

a) *Să se exprime coeficienții* b, c *în funcție de* a *astfel ca cele două ecuații* $f(x) = 0$ *și* $g(x) = 0$ *să aibă două rădăcini comune.*

b) *Înlocuind* b *și* c *cu valorile găsite la punctul* a) *să se determine* a *știind că suma pătratelor rădăcinilor ecuației* $f(x) = 0$ *este* 15.

Institutul Politehnic din București 1972, G. M. 1/1973

Soluție. a) Între $f(x)$ și $g(x)$ există relația

$$g(x) = f(x) + \lambda(x^2 + x + 1).$$

Condiția ca $f(x)$ și $g(x)$ să admită două rădăcini comune, revine la condiția ca $f(x)$ și $x^2 + x + 1$ să admită două rădăcini comune, adică $f(x)$ să admită ca rădăcini ambele rădăcini ale ecuației $x^2 + x + 1 = 0$: $x_1 = \varepsilon$, $x_2 = \varepsilon^2$ ($\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$, $\varepsilon^3 = 1$).

Condiția $f(x_1) = 0$ și $f(x_2) = 0$, conduce la sistemul:

$$\begin{cases} 1 + a\varepsilon^2 + b\varepsilon + c = 0 \\ 1 + a\varepsilon + b\varepsilon^2 + c = 0 \end{cases}$$

cu soluțiile $b = a$ și $c = a - 1$. În acest caz, $f(x)$ se scrie:

$$f(x) = x^3 + ax^2 + ax + a - 1.$$

b) x_1, x_2 și x_3 fiind rădăcinile ecuației determinate mai sus $f(x) = 0$, avem $x_1 + x_2 + x_3 = -a$ și $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = a$, deci:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) = a^2 - 2a.$$

Condiția cerută în ipoteza de la punctul b) revine deci la $a^2 - 2a - 15 = 0$, care admite ca soluții $a_1 = -3$ și $a_2 = 5$.

A 11. *Se consideră expresia*

$$E(a, z) = \sqrt{\frac{z^2}{a^2} + 2 + \frac{a^2}{z^2}},$$

unde a este un număr real diferit de zero, iar z este un număr complex diferit de zero.

a) Să se determine rădăcinile ecuației $E(1, z) = 1$ și să se arate că toate rădăcinile ecuației se află pe un cerc.

b) Să se determine valorile reale ale lui a pentru care ecuația $E(a, z) = a$ în necunoscuta z, are toate rădăcinile complexe nereale.

Institutul Politehnic din Iași, 1972, G. M. 2/1983

Soluție. Egalitatea din enunț mai poate fi scrisă:

$$E^2(a, z) = \left(\frac{z}{a} + \frac{a}{z}\right)^2.$$

a) Determinarea rădăcinilor ecuației $E(1, z) = 1$, revine la determinarea rădăcinilor ecuației $E^2(1, z) = 1$:

$$\left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \left(z + \frac{1}{z} - 1\right)\left(z + \frac{1}{z} + 1\right) = 0$$

sau $(z^2 - z + 1)(z^2 + z + 1) = 0$
având ca rădăcini: $z_1 = -\varepsilon$, $z_2 = -\varepsilon^2$, $z_3 = \varepsilon$ și $z_4 = \varepsilon^2$,
în care ε și ε^2 sînt rădăcinile cubice ale unității $(\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0,\ \varepsilon^3 = 1)$.

Întrucît rădăcinile de orice ordin n din unitatea complexă au modulele unitare, rezultă că $|z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_4| = 1$ deci aparțin cercului unitate.

b) Ecuația $E(a, z) = a$ este echivalentă cu ecuația $E^2(a, z) = a^2$, adică cu

$$\left(\frac{z}{a} + \frac{a}{z}\right)^2 - a^2 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{z}{a} + \frac{a}{z} - a\right)\left(\frac{z}{a} + \frac{a}{z} + a\right) = 0$$

sau $(z^2 - a^2z + a^2)(z^2 + a^2z + a^2) = 0$, care admite toate rădăcinile complexe nereale, dacă $a^2(a^2 - 4) < 0$, adică $a \in (-2, +2)$.

A12. *Să se arate că dacă $x, y \in \mathbf{R}$ și $x + y \geqslant 1$, atunci $x^2 + y^2 \geqslant \frac{1}{2}$.*

Universitatea din București, Facultatea de Matematică, 1982, G. M. 11/1982

Soluție. Din egalitatea evidentă $2(x^2 + y^2) = (x + y)^2 + (x - y)^2$ deducem $2(x^2 + y^2) \geq (x + y)^2$. Cum $x + y \geq 1$, rezultă că $x^2 + y^2 \geq \frac{1}{2}$.

Generalizare: Dacă $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbf{R}$ și $\sum_{i=1}^{n} x_i \geq 1$ atunci $\sum_{i=0}^{n} x_i^2 \geq \frac{1}{n}$.

Într-adevăr, în inegalitatea Schwarz-Cauchy-Buniakowski

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)$$

făcînd $y_1 = y_2 = \ldots = x_n = 1$, deducem

$$n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \geq 1, \quad \text{deci} \quad \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq \frac{1}{n}.$$

A 13. *Să se rezolve ecuația*

$$\left(\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}\right)^x - \left(\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}\right)^x = \frac{3}{2}.$$

Universitatea din București, Facultatea de Matematică, 1982, G. M. 12/1982

Soluție. Notăm $\left(\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}\right)^x = y$ și deoarece $\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} \cdot \sqrt{3 - 2\sqrt{2}} = 1$ deducem că $\left(\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}\right)^x = \frac{1}{\left(\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}\right)^x} = \frac{1}{y}$.

Așadar ecuația dată în x se transcrie în următoarea ecuație în y: $y - \frac{1}{y} = \frac{3}{2}$ cu soluțiile $y_1 = 2$, $y_2 = -\frac{1}{2}$. Cum $y = \left(\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}\right)^x > 0$, rezultă că este acceptabilă doar soluția $y_1 = 2$ deci $\left(\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}\right)^x = 2$, de unde deducem $x = \frac{\lg 2}{\lg\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}} = \frac{\lg 2}{\lg(1 + \sqrt{2})}$.

A 14. *Fie T mulțimea tuturor matricilor de forma $\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$ unde x și y parcurg mulțimea $\mathbf{Z}_3$ a claselor de resturi modulo 3.*

1. Determinați numărul elementelor mulțimii T.

2. Să se determine mulțimea G a matricilor $\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$ din T, astfel încît $x^2 + y^2 = \hat{1}$.

3. Arătați că mulțimea G formează un grup față de operația de înmulțire a matricelor.

4. Arătați că grupul G este izomorf cu grupul aditiv $(\mathbf{Z}_4, +)$ al claselor de resturi modulo 4.

Universitatea din București, 1976, Facultatea de Matematică, G. M. 2/1977

Soluție. 1) Deoarece x și y pot lua valorile $\hat{0}$, $\hat{1}$, $\hat{2}$ și deoarece la cupluri (x, y) distincte corespund matrici distincte, rezultă că numărul elementelor din T este egal cu cel al cuplurilor (x, y), adică $3 \cdot 3 = 9$.

2) Deoarece $\mathbf{Z}_3 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}\}$, găsim că ecuația $x^2 + y^2 = \hat{1}$ este verificată doar de următoarele sisteme de valori $x = \hat{0}$, $y = \hat{1}$; $x = \hat{1}$, $y = \hat{0}$; $x = \hat{2}$, $y = \hat{0}$ și $x = \hat{0}$, $y = \hat{2}$. Deci mulțimea G va fi formată din 4 matrici, pe care le vom nota

$$e = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{1} \\ -\hat{1} & \hat{0} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{2} \end{pmatrix} \text{ și } \quad c = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{2} \\ -\hat{2} & \hat{0} \end{pmatrix}.$$

3) Alcătuim tabla de înmulțire a acestor patru matrice:

$\cdot$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	b	c	e
b	b	c	e	a
c	c	e	a	b

Se observă că produsul a două matrici din G este tot o matrice din G, elementul neutru este e, iar fiecare matrice are un invers în G, deoarece fiecare linie a tabelului conține matricea unitate e. Așadar $(G, \cdot)$ este grup.

4) Alcătuim tabla grupului $(\mathbf{Z}_4, +)$:

$+$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$
$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{0}$
$\hat{2}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$
$\hat{3}$	$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$

Pentru a stabili izomorfismul între G și $\mathbf{Z}_4$ trebuie să găsim o bijecție $f: G \to \mathbf{Z}_4$, astfel încît să fie morfism de grupuri, adică:

$$f(x \cdot y) = f(x) + f(y), \quad (\forall)\ x, y \in G.$$

Construim $f:G \to Z_4$ astfel $f(e) = \hat{0}$; $f(a) = \hat{1}$; $f(b) = \hat{2}$; $f(c) = \hat{3}$. Rezultă f bijectivă; în plus, din compararea celor două table rezultă şi faptul că f este morfism de grupuri.

A 15. *Determinaţi valorile parametrului* $a \in \mathbf{R}$ *astfel încît sistemul*

$$\begin{cases} x - 2y + z - t = 0 \\ 2x - y + 3z - 3t = 0 \\ x + y + z + t = 0 \\ 2x + (a-1)y + 2z + at = 0 \end{cases}$$

să aibă şi soluţii diferite de soluţia banală şi să se determine toate soluţiile sistemului în acest caz.

Universitatea din Bucureşti, Facultatea de Matematică 1982, G. M. 12/1982

Soluţie. O condiţie necesară şi suficientă pentru ca sistemul omogen dat să admită şi soluţii diferite de soluţia banală este ca determinantul sistemului să fie nul, adică:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & a-1 & 2 & a \end{vmatrix} = 0.$$

Însă $D = -a$. În concluzie $D = 0 \Leftrightarrow a = 0$, deci pentru $a = 0$ sistemul dat are şi soluţii diferite de soluţia banală. Cum

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

putem alege drept minor principal al sistemului pe Δ şi deci putem considera pe x, y, z necunoscute principale. Sistemul se scrie:

$$\begin{cases} x - 2y + z = t \\ 2x - y + 3z = 3t \\ x + y + z = -t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-10\lambda}{3}, \ z = 3\lambda \\ y = \dfrac{-2\lambda}{3}, \ t = \lambda, \end{cases} \lambda \in \mathbf{R}.$$

A 16. *Să se scrie expresia:*

$$E = \sqrt{\log_2 x(\log_x 2 + \log_2 x - 2)} + \sqrt{\log_2 x(\log_x 2 + \log_2 x + 2)}$$

în funcție de $y = \log_2 x$ *și apoi să se determine valorile lui* x *pentru care* $E = 2$.

Institutul Politehnic București, 1976, G. M. 3/1977

Soluție. Pentru $x \in (0, 1) \cup (1, \infty)$ expresia dată devine:

$$E = \sqrt{\log_2 x\left(\frac{1}{\log_2 x} + \log_2 x - 2\right)} + \sqrt{\log_2 x\left(\log_2 x + \frac{1}{\log_2 x} + 2\right)} =$$

$$= \sqrt{(\log_2 x - 1)^2} + \sqrt{(\log_2 x + 1)^2} = |\log_2 x - 1| + |\log_2 x + 1| =$$

$$= |y - 1| + |y + 1|, \text{ unde am notat } y = \log_2 x.$$

Prin urmare rezultă:

$$E = \begin{cases} -2y & \text{dacă } y \in (-\infty, -1) \\ 2 & \text{dacă } y \in [-1, 1] - \{0\} \\ 2y & \text{dacă } y \in (1, +\infty). \end{cases}$$

Rezultă deci că $E = 2$ pentru $y \in [-1, 1] - \{0\}$, ceea ce este echivalent cu faptul că $x \in [1/2, 2] - \{1\}$.

A 17. *Se consideră matricea* $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, *unde* a, b, c, d *sînt numere reale și matricea* $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Se cere:*

a) *Să se calculeze matricea:*

$$E = M^2 - \lambda M - \mu I,$$

unde λ *și* μ *sînt doi parametri reali.*

b) *Să se determine parametrii* λ *și* μ *pentru care matricea* E *este egală cu matricea zero.*

Institutul Politehnic București, 1972, G. M. 12/1972

Soluție. Notînd $\delta = \det(M) = ad - bc$, un calcul simplu ne conduce la egalitatea:

$$M^2 = (a + d) M - \delta I. \tag{1}$$

a) Cu ajutorul relației (1), valoarea expresiei E se scrie:

$$E = (a + d - \lambda) M - (\delta + \mu) I. \tag{2}$$

Pentru egalitatea $E=0$ considerăm două cazuri, după cum $\delta+\mu=0$ sau $\delta+\mu\neq 0$.

I. $\delta+\mu=0\Rightarrow a+d-\lambda=0$, sau $M=0$.

I.1. În cazul $\delta+\mu=0$ şi $a+d-\lambda=0$, avem soluţia unică $\lambda=a+d$ şi $\mu=-\delta=bc-ad$;

I.2. În cazul $\delta+\mu=0$ şi $M=0$, avem $\delta=0$, de unde soluţia $\mu=-\delta=0$ şi $\lambda\in\mathbf{R}$.

II. $\delta+\mu\neq 0\Rightarrow a+d-\lambda\neq 0$, $M\neq 0$ şi condiţiile:

$$b=c=0,\ a=d=\frac{\delta+\mu}{a+d-\lambda}=\frac{a^2+\mu}{2a-\lambda}$$

din care rezultă soluţia: $\lambda\in\mathbf{R}$ şi $\mu=a^2-\lambda a$.

A 18. *Să se arate că oricare ar fi* $m\in\mathbf{R}\setminus\{1\}$, *imaginile pe cercul trigonometric ale soluţiilor ecuaţiei*

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2}+m\sin\frac{x}{2}\sin\frac{3x}{2}=\cos x$$

sînt vîrfurile unui triunghi echilateral.

Institutul Politehnic din Bucureşti, 1983, G. M. 10 – 11/1983

Soluţie. Ecuaţia din enunţ este echivalentă succesiv cu

$$\frac{1}{2}(\cos x+\cos 2x)+m\cdot\frac{1}{2}(\cos x-\cos 2x)=\cos x\Leftrightarrow\cos x+\cos 2x+$$

$$+m\cos x-m\cos 2x=2\cos x\Leftrightarrow\cos x\cdot(m-1)=\cos 2x\cdot(m-$$

$$-1)\Leftrightarrow\cos x=\cos 2x,$$

deoarece $m\neq 1$. Ultima ecuaţie se poate scrie şi astfel:

$$\cos x=2\cos^2 x-1\Leftrightarrow 2\cos^2 x-\cos x-1=0\Leftrightarrow\cos x=$$

$$=1\quad\text{sau}\quad\cos x=-\frac{1}{2},\ \text{ale căror soluţii în } [0,2\pi]\ \text{sînt}\ x_1=$$

$$=0,\ x_2=\frac{2\pi}{3},\ x_3=\frac{4\pi}{3}.$$

Imaginile acestor valori pe cercul trigonometric sînt punctele $A(1,0)$,

$B\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $C\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ care sînt vîrfurile unui triunghi echilateral (verificarea se poate face calculînd distanțele $\|AB\|$, $\|A, C\|$, $\|BC\|$ și arătînd că sînt egale cu $\sqrt{3}$).

A 19. *Să se rezolve ecuația*

$$3 \sin^3 x + \cos^3 x = 2 \sin x + \cos x.$$

Institutul Politehnic din București, 1983, G. M. 10—11/1983

Soluție. Ecuația din enunț se mai poate scrie astfel:

$$3 \sin^3 x - 2 \sin x = \cos x - \cos^3 x \Leftrightarrow \sin x(3 \sin^2 x - 2) =$$

$$= \cos x(1 - \cos^2 x) \Leftrightarrow \sin x(3 \sin^2 x - 2 \sin^2 x - 2 \cos^2 x) =$$

$$= \cos x \cdot \sin^2 x \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \quad \text{sau} \\ \sin^2 x - 2 \cos^2 x = \sin x \cos x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \quad \text{sau} \\ \sin^2 x - \cos^2 x = \sin x \cos x + \cos^2 x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \quad \text{sau} \\ (\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x) = \cos x(\sin x + \cos x) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \quad \text{sau} & (1) \\ \sin x + \cos x = 0 \quad \text{sau} & (2) \\ \sin x - 2 \cos x = 0. & (3) \end{cases}$$

Ecuația (1) implică $x = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.
Ecuația (2) este echivalentă cu

$$\sin x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0 \Leftrightarrow 2 \sin \frac{\pi}{4} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= 0 \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi, \; k \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4} + k\pi, \; k \in \mathbf{Z}.$$

Ecuația (3) conjugată cu relația fundamentală $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ne dă:

$$4 \cos^2 x + \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow 5 \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \cos x = \pm \frac{\sqrt{5}}{5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \pm \arccos\left(\pm \frac{\sqrt{5}}{5}\right) + 2k\pi, \; k \in \mathbf{Z}.$$

Deci $x \in \{k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\} \cup \left\{\frac{3\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\right\} \cup \left\{\pm \arccos\left(\pm \frac{\sqrt{5}}{5}\right) + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\right\}$.

A 20. *Să se rezolve ecuația* $\sin(x - 50°) = 2 \sin(x + 10°)$.

Institutul de Construcții București, 1978

Soluție. Ecuația se mai poate scrie:

$$\frac{\sin(x - 50°)}{\sin(x + 10°)} = \frac{2}{1} \quad \text{sau} \quad \frac{\sin(x - 50°) + \sin(x + 10°)}{\sin(x - 50°) - \sin(x + 10°)} = \frac{2 + 1}{2 - 1}$$

sau $\frac{2 \sin(x - 20°) \cos 30°}{-2 \sin 30° \cos(x - 20°)} = 3$ sau $\operatorname{tg}(x - 20°) = -\sqrt{3}$, de unde

rezultă $x = 140° + 180° \cdot k$, $k \in \mathbf{Z}$.

A 21. *Să se determine toate soluțiile ecuației:*

$$4^{\cos^2 x} + 4^{\cos^2 x} = 3 \text{ care aparțin segmentului } \left[\frac{3}{4}, 1\right].$$

U.R.S.S. 1977

Soluție. Ecuația din enunț se mai poate scrie astfel:

$$4^{2\cos^2 x - 1} + 4^{\cos^2 x} = 3 \quad \text{sau} \quad (4^{\cos^2 x})^2 \cdot \frac{1}{4} + 4^{\cos^2 x} = 3.$$

Facem transformarea $y = 4^{\cos^2 x}$; ecuația devine:

$$\frac{1}{4} \cdot y^2 + y - 3 = 0 \Leftrightarrow y^2 + 4y - 12 = 0 \Leftrightarrow (y^2 - 4) + 4y - 8 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (y - 2)(y + 6) = 0 \Leftrightarrow y = 2 \quad \text{sau} \quad y = -6.$$

Soluția $y = -6$ nu convine, căci $4^{\cos^2 x} > 0$, deci rezultă că $4^{\cos^2 x} = 2$ **sau** $2^{2\cos^2 x} = 2$, sau $2\cos^2 x = 1$, sau $\cos^2 x = \frac{1}{2}$, sau $\cos x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Dacă $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, atunci $x = \pm \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Din ipoteză avem că $x \in \left[\frac{3}{4}, 1\right]$ și se arată ușor că oricare ar fi $k \in \mathbf{Z}$, $x = \pm \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \notin$ $\notin \left[\frac{3}{4}, 1\right]$. Dacă $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, atunci $x = \pm \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ și din condiția $x \in \left[\frac{3}{4}, 1\right]$ rezultă $x = \frac{\pi}{4}$.

A 22. *Să se determine toate soluțiile ecuației*

$$1 - 5 \sin x + 2 \cos^2 x = 0$$

care verifică inegalitatea $\cos x \geqslant 0$.

Facultăți din U.R.S.S. 1977

Soluție. Ecuația din enunț se mai poate scrie astfel:

$$1 - 5 \sin x + 2 - 2 \sin^2 x = 0 \Leftrightarrow 2 \sin^2 x + 5 \sin x - 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + 3)\left(\sin x - \frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \sin x = -3 \quad \text{sau} \quad \sin x = \frac{1}{2}.$$

Dar $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$, deci singura posibilitate rămîne $\sin x = \frac{1}{2}$, sau $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. În cadranul I, soluțiile sînt de forma $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, iar în cadranul II, sînt de forma $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Din ipoteză $\cos x \geqslant 0$, deci soluțiile care verifică ipotezele din enunț sînt cele de forma $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

A 23. *Să se găsească toate perechile de numere reale* (a, b) *pentru care avem:*

$$a(\cos x - 1) + b^2 = \cos(ax + b^2) - 1, \ (\forall)\ x \in \mathbf{R}.$$

U.R.S.S. 1981

Soluție. Fie (a, b) o pereche de numere reale pentru care avem $a(\cos x - 1) + b^2 = \cos(ax + b^2) - 1$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$. Atunci pentru $x = \pi$ și $x = 2\pi$, a și b satisfac egalitățile:

$$-2a + b^2 = \cos(\pi a + b^2) - 1; \tag{1}$$

$$b^2 = \cos(2\pi a + b^2) - 1. \tag{2}$$

Din (2) deducem că $b^2 \leqslant 0$, deoarece $|\cos \alpha| \leqslant 1$, $(\forall)\ \alpha \in \mathbf{R}$.
Avem deci $b = 0$ și $\cos 2\pi a = 1$, adică $a \in \mathbf{Z}$. Egalitatea (1) devine $1 - 2a = \cos \pi a$. Deoarece $-1 \leqslant \cos \pi a \leqslant 1$, avem $-1 \leqslant 1 - 2a \leqslant 1$ sau $0 \leqslant a \leqslant 1$. Cum a este întreg, rezultă că $a = 0$ sau $a = 1$. Perechile căutate sînt $(0, 0)$ și $(1, 0)$.

A 24. *Să se determine toate soluțiile ecuației:*

$\int_{0}^{a^2} \cos(x + \alpha)dx = -\sin \alpha$, *care aparțin intervalului* $[2, 3]$.

U.R.S.S. 1977

Soluție. Membrul stîng al egalității din enunț se mai poate scrie

$$\int_0^{\alpha^2} \cos(x+\alpha)dx = \int_{\alpha}^{\alpha^2+\alpha} \cos y\, dy = \sin(\alpha+\alpha^2) - \sin\alpha.$$

Deci egalitatea din enunț devine:

$$\sin(\alpha+\alpha^2) - \sin\alpha = -\sin\alpha \Leftrightarrow \sin(\alpha+\alpha^2) = 0 \Leftrightarrow \alpha+\alpha^2 = k\pi,\ k \in Z \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4k\pi}}{2},\quad k \in \mathbf{Z} \cap \left(-\frac{1}{4\pi}, \infty\right).$$

Dar, din ipoteză soluțiile trebuie să aparțină intervalului [2, 3], deci soluțiile de forma $\alpha = (-1-\sqrt{1+4k\pi})/2$ nu convin.
Impunînd condiția $\alpha \in [2, 3]$ rezultă

$$\frac{-1+\sqrt{1+4k\pi}}{2} \in [2, 3] \Leftrightarrow -1+\sqrt{1+4k\pi} \in [4, 6] \Leftrightarrow \sqrt{1+4k\pi} \in [5, 7] \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 1 + 4k\pi \in [25, 49] \Leftrightarrow 4k\pi \in [24, 48] \Leftrightarrow k \in \left[\frac{6}{\pi}, \frac{12}{\pi}\right]$. Dar $k \in \mathbf{Z}$ și atunci singurele valori convenabile ale lui k sînt $k = 2$ și $k = 3$.
Deci soluțiile ecuației date sînt

$$\alpha_1 = \frac{-1+\sqrt{1+8\pi}}{2},\quad \alpha_2 = \frac{-1+\sqrt{1+12\pi}}{2}.$$

A 25. *Să se găsească toate rădăcinile întregi ale ecuației:*

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\left(3x - \sqrt{9x^2+160x+800}\right)\right) = 1.$$

U.R.S.S. 1980

Soluție. Fie x o rădăcină a ecuației date. Atunci există un număr întreg n astfel încît să avem $\frac{\pi}{8}(3x - \sqrt{9x^2+160x+800}) = 2n\pi$, sau $\sqrt{9x^2+160x+800} = 3x - 16n$. Ridicînd la pătrat obținem:

$$(3n+5)x = 8n^2 - 25. \tag{1}$$

Transformăm membrul drept al egalității (1) astfel:

$$8n^2 - 25 = 8\left(n^2 - \frac{25}{9}\right) - \frac{25}{9} = \frac{8}{9}(3n+5)(3n-5) - \frac{25}{9}.$$

Aceeași egalitate (1) se mai poate scrie: $8(3n+5)(3n-5) - 9x(3n+5) = 25$. Deoarece x și n sînt numere întregi, ultima egalitate ne arată că $3n+5$ este divizor al numărului 25, adică $3n+5$ este unul din numerele ± 1, ± 5, ± 25,

de unde rezultă că n este unul din numerele $n_1 = -10$, $n_2 = -2$, $n_3 = 0$. Valorile corespunzătoare ale lui x le găsim din egalitatea (1). Astfel toate rădăcinile întregi ale ecuației date se găsesc printre numerele $x_1 = -31$, $x_2 = -7$, $x_3 = -5$. Făcînd verificarea soluțiilor, vedem că numai x_1 și x_2 satisfac ecuația dată.

A 26. *Să se determine valorile reale ale lui x, care satisfac simultan condițiile:* $2\cos^2 3x = 1 + \cos 4x$ *și* $|x| < 1$.

Universitatea din București, Facultatea de Matematică, 1979

Soluție. Ecuația din enunț se mai poate scrie:

$$2\cos^2 3x = 1 + 2\cos^2 2x - 1 \text{ sau } 2\cos^2 3x = 2\cos^2 2x \text{ sau}$$

$$\cos^2 3x = \cos^2 2x \text{ sau } \cos 3x = \pm \cos 2x.$$

Cazul I. $\cos 3x = \cos 2x \Leftrightarrow \cos 3x - \cos 2x = 0 \Leftrightarrow -2\sin\frac{5x}{2}\sin\frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{5x}{2} = k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$ sau $\frac{x}{2} = k\pi,\ k \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow x = \frac{2k\pi}{5},\ k \in \mathbf{Z}$ sau $x = 2k\pi,$

$k \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow x = \frac{2k\pi}{5},\ k \in \mathbf{Z}.$

În plus, deoarece $|x| < 1$, rezultă că din mulțimea soluțiilor obținute convine numai soluția pentru $k = 0$, deci $x = 0$.

Cazul II. $\cos 3x = -\cos 2x \Leftrightarrow \cos 3x + \cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2\cos\frac{5x}{2}\cos\frac{x}{2} =$

$= 0 \Leftrightarrow \frac{5x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$ sau $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow x = \frac{(2k+1)\pi}{5}, k \in \mathbf{Z}.$

Impunînd condiția $|x| < 1$, rezultă că $x \in \left\{-\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{5}\right\}$.

În concluzie valorile reale ale lui x cerute sînt $-\frac{\pi}{5}$, 0, $\frac{\pi}{5}$.

A 27. *Să se rezolve ecuația:* $z^{n-1} = \bar{z}$, $z \in \mathbf{C}$, *unde* $\bar{z}$ *este conjugatul lui z, iar n este un număr natural.*

Institutul Politehnic din București, 1982

Soluție. Considerînd numărul z sub formă trigonometrică $z = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, unde $\rho \geq 0$ și $\alpha \in [0, 2\pi)$, ecuația dată devine, ținînd seama de formula lui Moivre:

$$\rho^{n-1}[\cos(n-1)\alpha + i\sin(n-1)\alpha] = \rho(\cos\alpha - i\sin\alpha)$$

sau

$$\rho^{n-1}[\cos(n-1)\alpha + i\sin(n-1)\alpha] = \rho[\cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha)],$$

de unde rezultă:

$$\rho^{n-1} = \rho,\ (n-1)\alpha = -\alpha + 2k\pi\ (k \in \mathbf{Z}),\ \text{adică}$$

$$\rho = 0 \text{ sau } \rho^{n-2} = 1, \text{ respectiv } \alpha = \frac{2k\pi}{n} \text{ dacă } n \neq 0.$$

Avem de discutat următoarele cazuri:

1) pentru $\rho = 0$ obținem $z = 0$ care este o soluție a ecuației date, dacă $n \neq 0$ și $n \neq 1$;

2) pentru $n = 0$ ecuația devine $z^{-1} = \bar{z}$ adică $z \cdot z = 1$ sau $\rho^2 = 1$, deci $\rho = 1$. În acest caz sînt soluții toate numerele complexe de modul egal cu unu.

3) pentru $\rho \neq 0$ și $n \neq 0$ avem

$$\rho^{n-2} = 1,\ \alpha = \frac{2k\pi}{n}\ (k \in \mathbf{Z})$$

și apar două subcazuri:

— dacă $n = 2$ atunci ecuația în ρ este verificată de orice valoare dată necunoscutei, deci orice $\rho > 0$. Cum în acest caz avem $\alpha = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, atunci

$$z = \rho(\cos k\pi + i\sin k\pi) = \pm\rho \in \mathbf{R}.$$

Deoarece și $z = 0$ verifică ecuația, rezultă că este soluție în acest caz orice număr real.

— dacă $n \neq 2$ ecuația $\rho^{n-2} = 1$ are soluție unică $\rho = 1$ și deci

$$z = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n},\ k \in \mathbf{Z}.$$

Conform teoremei împărțirii cu rest a numerelor întregi avem $k = pn + q$, cu $p, q \in \mathbf{Z}$ și $0 \leqslant q < n$, deci

$$\cos\frac{2k\pi}{n} = \cos\frac{2(pn+q)\pi}{n} = \cos\left(2p\pi + \frac{2q\pi}{n}\right) = \cos\frac{2q\pi}{n} \text{ și analog}$$

$$\sin\frac{2k\pi}{n} = \sin\frac{2q\pi}{n}.$$

Sînt deci distincte soluțiile

$$z = \cos\frac{2q\pi}{n} + i\sin\frac{2q\pi}{n},\ \text{cu } q \in \{0, 1, \ldots, n-1\}.$$

Așadar, în acest caz sînt soluții ale ecuației date toate rădăcinile de ordinul n ale unității.

A 28. Să se cerceteze, care sînt ***unghiurile ascuțite*** *ale triunghiului ABC știind că* ***lungimile laturilor*** *sînt:*

$$a = m,\ b = n,\ c = m + n + 2,\ \textit{unde}\ m,\ n > 1,\ m,\ n \in \mathbf{N}.$$

Institutul Politehnic din București, 1982

Soluție. Din $a < c$, $b < c$ rezultă că $\mu(\hat{A}) < \mu(\hat{C})$, $\mu(\hat{B}) < \mu(\hat{C})$, deci unghiurile $\hat{A}$ și $\hat{B}$ sînt sigur ascuțite.
În caz contrar ar rezulta că triunghiul ABC ar avea două unghiuri obtuze sau unul drept și unul obtuz, contradicție. Mai departe vom cerceta unghiul $\hat{C}$. Din teorema cosinusului avem

$$\cos \hat{C} = \frac{m^2 + n^2 - (m + n - 1)^2}{2mn} = \frac{2m + 2n - 2mn - 1}{2mn} =$$

$$= \frac{2(m + n - mn) - 1}{2mn}.$$

Se arată că dacă $m,\ n > 1$, $m,\ n \in \mathbf{Z}$, atunci $m + n - mn \leqslant 0$. (1)

În adevăr relația (1) se mai poate scrie: $m + n \leqslant mn \Leftrightarrow n \leqslant m(n - 1) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow n - 1 + 1 \leqslant m(n - 1) \Leftrightarrow 1 \leqslant m(n - 1) - (n - 1) \Leftrightarrow 1 \leqslant (m - 1)(n - 1)$
ceea ce este evident, deoarece $m,\ n > 1$, $m,\ n \in \mathbf{Z}$.

Deci $\dfrac{2(m + n - mn) - 1}{2mn} > 0$, de unde rezultă $\cos \hat{C} < 0$ și cum $\mu(\hat{C}) \in$
$\in (0,\ \pi)$, rezultă $\mu(\hat{C}) \in \left(\dfrac{\pi}{2},\ \pi\right)$, adică unghiul $\hat{C}$ este obtuz. Așadar singurele unghiuri ascuțite ale triunghiului ABC sînt $\hat{A}$ și $\hat{B}$.

A 29. *Fie triunghiul ABC cu $m(\hat{A}) > m(\hat{B}) > m(\hat{C})$. Să se arate că dacă* $\sin \hat{A} + \sin \hat{B} + \sin \hat{C} = 2$, *atunci* $m(\hat{B}) + m(\hat{C}) < 45°$.

Institutul Politehnic din București, 1983

Soluție. Avem $\sin(B + C) = \sin B \cos C + \sin C \cos B < \sin B +$
$+ \sin C = \sqrt{2} - \sin A = \sqrt{2} - \sin(B + C)$, de unde $2 \sin(B + C) < \sqrt{2}$ sau
$\sin(B + C) < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

De aici rezultă $m(\hat{B}) + m(\hat{C}) < 45°$ sau $m(\hat{B}) + m(\hat{C}) > 135°$.

Dar, dacă am avea $m(\hat{B}) + m(\hat{C}) > 135°$, atunci ar rezulta $m(\hat{A}) < 45°$ și nu mai putem avea ordonarea din ipoteză $m(\hat{A}) > m(\hat{B}) > m(\hat{C})$. Rămîne deci unica posibilitate: $m(\hat{B}) + m(\hat{C}) < 45°$.

A 30. *Se dă un triunghi ABC în care mediana AA' este perpendiculară pe AB. Notînd cu a, b, c lungimile laturilor triunghiului să se calculeze măsura unghiului $\hat{A}$ în funcție de b, c și măsura unghiului $\hat{C}$ în funcție de a și b.*

Institutul Politehnic din București, 1983

Soluție. Din teorema medianei avem $\| AA' \|^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}$, iar din triunghiul dreptunghic $AA'B$ avem $\| AA' \|^2 = \frac{a^2}{4} - c^2$.

Egalînd cele două expresii ale lui $\| AA' \|^2$ se obține relația

$$a^2 = b^2 + 3c^2. \tag{1}$$

Folosind teorema cosinusului și egalitatea (1), avem

$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{b^2 + c^2 - (b^2 + 3c^2)}{2bc} = -\frac{c}{b}$, de unde rezultă $A = \arccos\left(-\frac{c}{b}\right) = \pi - \arccos\frac{c}{b}$.

Analog:

$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{a^2 + b^2 - \frac{a^2 - b^2}{3}}{2ab} = \frac{a^2 + 2b^2}{3ab}$, de unde rezultă $C = \arccos\frac{a^2 + 2b^2}{3ab}$.

A 31. *Să se determine numărul complex z astfel încît, oricare ar fi α real și oricare ar fi $n > 1$, $n \in \mathbf{N}$, să avem*

$$(\cos\alpha + z\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + z\sin n\alpha.$$

Institutul Politehnic din București, 1982, G. M. 12/1982

Soluție. Deoarece relația din ipoteză are loc oricare ar fi α real și oricare ar fi $n > 1$, $n \in \mathbf{N}$, considerăm în particular $\alpha = \frac{\pi}{2}$ și $n = 2$. Atunci relația din enunț devine

$$\left(\cos\frac{\pi}{2} + z\sin\frac{\pi}{2}\right)^2 = \cos 2\cdot\frac{\pi}{2} + z\sin 2\cdot\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow z^2 = -1 \Leftrightarrow z_{1,2} = \pm i.$$

Așadar $z \in \{-i, i\}$ este o condiție necesară. Arătăm că această condiție este și suficientă.

Pentru $z = i$, relația din enunț este chiar formula lui Moivre, iar pentru $z = -i$, avem

$$=(\cos \alpha - i \cdot \sin \alpha)^n = [\cos(-\alpha) + i \cdot \sin(-\alpha)]^n =$$

$$= \cos(-n\alpha) + i \cdot \sin(-n\alpha) = \cos n\alpha - i \cdot \sin n\alpha.$$

În concluzie, singurele valori care verifică relația din enunț sînt $z = -i$ și $z = i$.

A 32. *Să se arate că pentru* $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ *există inegalitatea* $\sin^2 x + \operatorname{cosec}^2 x > 2$.

Universitatea din București, Facultatea de Matematică, 1982, G. M. 2/1982

Soluție. Deoarece $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, rezultă $0 < \sin x < 1$. Avem:

$$\sin^2 x + \operatorname{cosec}^2 x > 2 \Leftrightarrow \sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x} > 2 \Leftrightarrow \frac{\sin^4 x - 2\sin^2 x + 1}{\sin^2 x} > 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow (\sin^2 x - 1)^2 > 0$, care este evidentă deoarece $\sin^2 x \neq 1$, $(\forall) x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

A 33. *Se dau relațiile:*

$$\sin x + \sin y = a; \quad \cos x + \cos y = b; \quad a^2 + b^2 = 1.$$

Să se arate că $\sin(x + y) = 2ab$.

Universitatea din București, Facultatea de Matematică, G. M. 11/1982

Soluție. Din relațiile date obținem

$$(\sin x + \sin y)^2 + (\cos x + \cos y)^2 = a^2 + b^2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin x \sin y + 2 \cos x \cos y = -1 \Leftrightarrow \cos(x - y) = -\frac{1}{2}.$$

De asemenea obținem

$$(\sin x + \sin y + \cos x + \cos y)^2 = (a + b)^2 \Leftrightarrow 2 + 2 \sin x \cdot \sin y +$$

$$+ 2 \sin x \cdot \cos x + 2 \sin x \cos y + 2 \sin y \cdot \cos x + 2 \sin y \cos y +$$

$$+ 2 \cos x \cos y = 1 + 2ab \Leftrightarrow 2 \cos(x - y) + \sin 2x + \sin 2y +$$

$$+ 2 \sin(x + y) = -1 + 2ab \Leftrightarrow 2 \cos(x - y) + 2 \sin(x + y) \cos(x - y) +$$

$+ 2 \sin(x + y) = -1 + 2ab$ și cum $\cos(x - y) = -\frac{1}{2}$, rezultă $\sin(x + y) = 2ab$.

A 34. *Într-un* ***triunghi*** ABC *se cunosc relațiile* $\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{1}{3}$ *și* $a=\frac{b+c}{3}$ *unde* a, b, c *sînt lungimile laturilor triunghiului, iar* A, B, C *măsurile unghiurilor.*

a) *Să se* ***calculeze valoarea lui*** $\cos A$ *și să se arate că unghiul* $\hat{A}$ *este ascuțit.*

b) *Să se* ***calculeze*** *valoarea lui* $\cos B$ *și să se arate că* $B > A$.

Institutul de Mine din Petroșani, 1975

Soluție. a) $\cos A=\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}}=\dfrac{1-\frac{1}{9}}{1+\frac{1}{9}}=\dfrac{4}{5}\cdot$

Cum $\cos A > 0$, rezultă $0 < A < \frac{\pi}{2}\cdot$

b) Teorema **cosinusului** $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ se va scrie $\frac{(b+c)^2}{9}=$ $=b^2+c^2-2bc\cdot\frac{4}{5}$, de unde se poate exprima b în funcție de c. Efectuînd calculele se obține $b=\frac{5c}{4}$, sau $b=\frac{4c}{5}$, deci avem două cazuri de studiat.

În primul caz, rezultă $a=\frac{3c}{4}$ și atunci $a^2+c^2=b^2$, adică triunghiul este dreptunghic cu $B=\frac{\pi}{2}$; așadar $B > A$.

În cel de-al doilea caz, rezultă $a=\frac{3c}{5}$ și atunci

$$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{3}{5}\cdot$$

Așadar $\cos B < \cos A$ și deci $B > A$.

A 35. *Să se verifice identitatea*

$$\frac{\sin x+\sin 2x}{2\cos x-1}=\sin x\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{2}\right)\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{x}{2}\right)\cdot$$

Institutul de Petrol și Gaze din Ploiești, G. M., 12/1976

Soluție. $\dfrac{\sin x + \sin 2x}{2\cos x - 1} = \dfrac{\sin x(1 + 2\cos x)}{2\cos x - 1} = \dfrac{2\sin x\left(\cos x + \cos\dfrac{\pi}{5}\right)}{2\left(\cos x - \cos\dfrac{\pi}{3}\right)} =$

$$= \frac{\sin x \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{2}\right)} = \sin x \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{2}\right)\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{x}{2}\right).$$

A 36. *Să se verifice identitatea :*

$(\cos a + \cos b)^2 + (\sin a + \sin b)^2 = 4\cos^2\dfrac{a-b}{2}$ *și apoi să se rezolve ecuația*

$$(\sin a + \sin b)x^2 - 2(\cos a + \cos b)x - \sin a - \sin b = 0.$$

Notînd cu x_1 *și* x_2 *rădăcinile ecuației precedente, să se afle* $a + b$ *știind că* $x_1^2 + x_2^2 = 2$.

Institutul Politehnic din Iași, 1982 G. M. 1/1983

Soluție. Avem

$$u = \sin a + \sin b = 2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}, \quad v = \cos a + \cos b =$$

$$= 2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$$

deci

$$u^2 + v^2 = 4\cos^2\frac{a-b}{2}\left(\sin^2\frac{a+b}{2} + \cos^2\frac{a+b}{2}\right) = 4\cos^2\frac{a-b}{2}.$$

Ecuația dată se poate scrie: $ux^2 - 2vx - u = 0$.

Coeficientul u se anulează pentru $a + b = 2k_1\pi$, $k_1 \in \mathbf{Z}$, sau pentru $a - b = (2k_2 + 1)\pi$, $k_2 \in \mathbf{Z}$, iar v se anulează pentru $a + b = (2k_3 + 1)\pi$, $k_3 \in \mathbf{Z}$, sau pentru $a - b = (2k_2 + 1)\pi$, $k_2 \in \mathbf{Z}$.

Fie mulțimile

$$F_1 = \{(a, b) \mid a + b = 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\};$$

$$F_2 = \{(a, b) \mid a - b = (2k + 1)\pi,\ k \in \mathbf{Z}\{;$$

$$F_3 = \{(a, b) \mid a + b = (2k + 1)\pi,\ k \in \mathbf{Z}\}.$$

Pentru $(a, b) \in F_2$ avem $u = v = 0$, deci ecuația dată devine o identitate și deci admite ca soluție orice număr $x \in \mathbf{R}$.

Pentru $(a, b) \in F_1 \setminus F_2$ avem $u = 0$ și $v \neq 0$, deci ecuația admite o soluție $x = 0$.

Pe $\mathbf{R}^2 \setminus (F_1 \cup F_2)$ avem $u \neq 0$, deci ecuația admite două soluții, date de:

$$x_1 = -\operatorname{tg} \frac{a+b}{4} \; ; \; x_2 = \operatorname{ctg} \frac{a+b}{4}.$$

În acest caz, relația $x_1^2 + x_2^2 = 2$ conduce la:

$$\operatorname{tg}^2 \frac{a+b}{4} - 2 + \operatorname{ctg}^2 \frac{a+b}{4} = 0, \text{ sau}$$

$$\left(\operatorname{tg} \frac{a+b}{4} - \operatorname{ctg} \frac{a+b}{4}\right)^2 = 0, \text{ deci } \operatorname{tg} \frac{a+b}{4} - \operatorname{ctg} \frac{a+b}{4} = 0,$$

care conduce la rezolvarea ecuației trigonometrice $\cos \frac{a+b}{2} = 0$,

cu soluția $a + b = (2k_3 + 1)\pi$, $k_3 \in \mathbf{Z}$, adică $(a, b) \in F_3$.

A 37. *Pe laturile unui triunghi echilateral ABC se consideră punctele $P \in |AB|$, $Q \in |BC|$, $R \in |CA|$, astfel încît $|AP| \equiv |BQ| \equiv |CR|$. Să se arate că:*

$$4\sigma[PQR] \geqslant \sigma[ABC].$$

Universitatea din București, Facultatea de Matematică, 1982, G. M. 11/1892

Soluție. Notăm $\|AB\| = l$, $\|AP\| = \|BQ\| = \|CR\| = x$, $\sigma[PQR] = \sigma_1$, $\sigma[ABC] = \sigma$. Observînd că $\Delta APR \equiv \Delta BQP \equiv \Delta CRQ$, obținem că

$$\sigma_1 = \sigma - 3\sigma[APR] = \frac{\sqrt{3}}{4} l^2 - 3 \frac{x \cdot (l - x) \sin A}{2} = \frac{\sqrt{3} l^2}{4} - 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} x(l - x).$$

Inegalitatea de demonstrat devine:

$\sqrt{3}(l^2 - 3lx + 3x^2) \geqslant \frac{\sqrt{3}}{4} l^2 \Leftrightarrow 4l^2 - 12lx + 12x^2 \geqslant l^2 \Leftrightarrow 3(l^2 - 4lx + 4x^2) \geqslant$
$\geqslant 0 \Leftrightarrow 3(l - 2x)^2 \geqslant 0$, ceea ce este evident.

Egalitatea se atinge pentru $l - 2x = 0$ sau $x = \frac{l}{2}$, adică în cazul cînd punctele P, Q, R sînt mijloacele laturilor $|AB|$, $|BC|$, respectiv $|AC|$.

A 38. *În triunghiul dreptunghic ABC, ipotenuza $|BC|$ este fixă, iar vîrful A este variabil. Se prelungește $|BA|$ cu $|AD| \equiv |BA|$, se unește mijlocul E al lui $|BC|$ cu D și se notează cu M punctul de intersecție dintre dreptele ED și AC. Se cere locul geometric al punctului M.*

Institutul Politehnic din București, 1982, G. M. 12/1982

Soluție. (fig. A 38). Din ipoteză rezultă că $|DE|$ și $|CA|$ sînt mediane în triunghiul CBD, deci $\{M\} = |CA| \cap |DE|$ este centrul de greutate al triunghiului CBD. În concluzie

$$\frac{\|ME\|}{\|DE\|} = \frac{\|MA\|}{\|CA\|} = \frac{1}{3}.$$

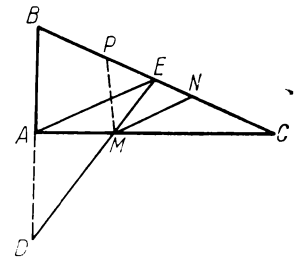


Fig. A 38

Fie $MN \| AE$, $N \in |BC|$. Atunci, deoarece $\frac{\|MA\|}{\|CA\|} = \frac{1}{3}$, rezultă că

$$\frac{\|MN\|}{\|AE\|} = \frac{2}{3} \text{ (din asemănarea triunghiurilor } CAE \text{ și } CMN). \qquad (1)$$

De asemenea $\frac{\|NE\|}{\|NC\|} = \frac{\|MA\|}{\|MC\|} = \frac{1}{2}$ și cum punctele E și C sînt fixe, rezultă că și punctul N este fix.

Dar vîrful A se mișcă pe cercul de diametru $|BC|$, deci $\|AE\| = \frac{\|BC\|}{2} =$ = constant, deci din (1) rezultă $\|MN\| = \frac{2}{3}\|AE\| = \text{const.}$ În concluzie locul geometric al punctului M este un cerc de centru N și rază $\|MN\| = \frac{2}{3}\|AE\| = \frac{2}{3} \cdot \frac{\|BC\|}{2} = \frac{\|BC\|}{3}$, din care scoatem următoarele două puncte (cazuri cînd triunghiul ABC este degenerat): punctul C și punctul $P \in |BC|$, unde $\frac{\|PB\|}{\|BC\|} = \frac{1}{3}$.

Comentariu. Această soluție evită noțiunea de omotetie, cu care s-ar fi putut ajunge mai repede la locul geometric căutat. Într-adevăr, în momentul în care am obținut că $\frac{\|CM\|}{\|CA\|} = \frac{2}{3}$, deducem că M este omoteticul lui A prin omotetia de centru C și raport $\frac{2}{3}$. Cum A descrie cercul de centru E și rază $\frac{\|BC\|}{2}$ (mai puțin punctele B și C), deducem că M descrie omoteticul acestui cerc (mai puțin omoteticele punctelor B și C), adică M descrie cercul de centru N și rază $\frac{2}{3} \cdot \frac{\|BC\|}{2} = \frac{\|BC\|}{3}$ (mai puțin punctele P și C).

A 39. *Două drepte oarecare duse printr-un punct A din spațiu intersectează sfera de centru O și rază r în punctele M, N respectiv P, Q. Să se arate că:*

$$\|AM\| \cdot \|AN\| = \|AP\| \cdot \|AQ\| = \|AO\|^2 - r^2.$$

Institutul Politehnic diu București, 1982, G. M. 12/1982

Soluție. Considerăm planul determinat de dreapta AN și de punctul O. Acest plan intersectat cu sfera va da un cerc $\mathcal{C}$ de centru O și de rază r. Fie AT tangentă la cercul $\mathcal{C}(0, r)$.
Atunci $\|AM\| \cdot \|AN\| = \|AT\|^2 = \|AO\|^2 - \|OT\|^2 = \|AO\|^2 - r^2$ (am folosit puterea unui punct față de un cerc). Similar se arată că $\|AP\| \cdot \|AQ\| = \|AO\|^2 - r^2$.

A 40. *Fie ABC un* ***triunghi înscris*** *într-un cerc. Perpendiculara în B pe AB taie a doua oara* ***cercul în*** *P, iar pe AC în M. Dreapta CP taie pe AB în N. Să* ***se arate*** *că* $AP \perp MN$. *Să se găsească locul geometric al lui M, cînd bază* $[BC]$ ***este fixă și punctul*** *A descrie cercul.*

Institutul Politehnic din București 1982, G. M. 11/1982

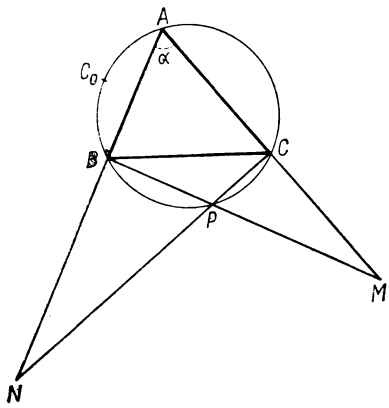


Fig. A 40 a

Soluție. Din $PB \perp AB$ rezultă că $|PA|$ este diametru în cercul considerat, deci $\widehat{ACP}$ este unghi drept (fig. A 40a). În concluzie, P este ortocentru în triunghiul AMN, deci $AP \perp MN$. Să găsim acum locul lui M. Deoarece perpendiculara în B pe AB intersectează pe AC, deducem că $|BC|$ nu este diametru, deci există un arc mic $\overset{\frown}{BC}$ și un arc mare $\overset{\frown}{BC}$. Fie α măsura arcului mic $\overset{\frown}{BC}$ și S, S' semiplanele limitate de dreapta BC care conțin respectiv arcul mare $\overset{\frown}{BC}$ și arcul mic $\overset{\frown}{BC}$. Să mai notăm cu C_0 punctul diametrul opus lui C. Avem următoarele cazuri distincte:

I) A parcurge arcul mic $\overset{\frown}{BC_0}$. În această situație avem $M \in S$ și cum $\widehat{BMC}$ este exterior triunghiului ABM, avem $m(\widehat{BMC}) = 90° + m(\widehat{BAM}) = 90° + \frac{\alpha}{2}$. Rezultă că M descrie arcul capabil de unghiul $90° + \frac{\alpha}{2}$, corespunzător segmentului $|BC|$, situat în semiplanul S.

II) A parcurge semicercul $\overset{\frown}{CC_0}$ ce nu conține B (fig. A 40a). În acest caz avem $M \in S'$ și din triunghiul ABM avem $m(\widehat{BMC}) = 90° - m(\widehat{BAM}) = 90° - \frac{\alpha}{2}$.

III) A parcurge arcul mic $\overset{\frown}{BC}$ (figura A 40b). În acest caz avem $M \in S'$ și cum $\widehat{BAC}$ este exterior triunghiului ABM avem $m(\widehat{BAC}) = 90° + m(\widehat{BMA})$, adică $\frac{360° - \alpha}{2} = 90° + m(\widehat{BMA})$.

Deducem $m(\widehat{BMA}) = m(\widehat{BMC}) = 90° - \frac{\alpha}{2}$.

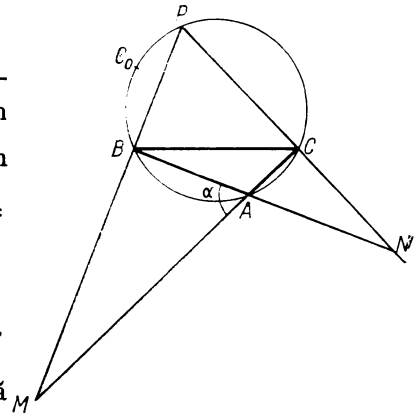


Fig. A 40 b

Reunind cazurile II) și III), deducem că atunci cînd A descrie arcul mare $\overset{\frown}{BC_0}$, punctul M descrie arcul capabil de unghiul $90° - \frac{\alpha}{2}$, corespunzător segmentului $|BC|$, situat în semiplanul S'.

În concluzie, locul geometric al punctului M este reuniunea celor două arce capabile, adică un cerc mai puțin punctele B și C.

A 41. *Într-un tetraedru $[VABC]$ vîrful V se proiectează în ortocentrul bazei ABC. Să se arate că dreptele VA și BC sînt perpendiculare.*

Universitatea din București, Facultatea de Matematică, 1980, G. M. 11/1980

Soluție. Fie AA_1 înălțimea din vîrful A în triunghiul ABC, $A_1 \in BC$. Deoarece $VH \perp (ABC)$ (H ortocentrul triunghiului ABC) și $AA_1 \perp BC$, din teorema celor trei perpendiculare rezultă că $VA_1 \perp BC$. Deci $VA_1 \perp BC$, $AA_1 \perp BC$ și în concluzie dreapta BC este perpendiculară pe planul (AA_1V). În particular, $BC \perp AV$.

A 42. *Se consideră un triunghi ABC în care $m(\hat{A}) = 60°$ și unghiurile $\hat{B}$ și $\hat{C}$ sînt ascuțite. Fie M mijlocul laturii $|BC|$ și B', C' picioarele înălțimilor duse din B, respectiv din C, pe laturile opuse. Să se arate că triunghiul $MB'C'$ este echilateral.*

Institutul Politehnic din București, 1980, G. M. 10/1980

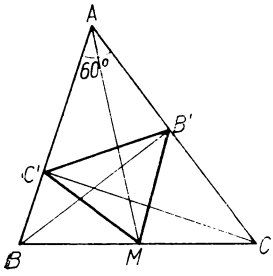


Fig. A 42

Soluție. În triunghiul dreptunghic $BB'C$, $B'M$ este mediană, deci $\| B'M \| = \frac{\| BC \|}{2}$ (fig. A 42). Similar, $\| C'M \| = \frac{\| BC \|}{2}$. Din faptul că $B'C'$ este antiparalelă la BC rezultă că $\widehat{AC'B'} \equiv \hat{C}$ deci $m(\widehat{B'C'C}) = 90° - m(\hat{C})$. Dar $m(\widehat{MC'C}) = m(\widehat{MCC'}) = m(\hat{C}) - 30°$, căci în triunghiul dreptunghic $C'CA$, $m(\hat{A}) = 60°$, deci $m(\widehat{ACC'}) = 30°$.

În concluzie $m(\widehat{B'C'M}) = m(\widehat{B'C'C}) + m(\widehat{MC'C}) = 90° - m(\hat{C}) + m(\hat{C}) - 30° = 60°$.

Deci triunghiul $B'MC'$ este isoscel, căci $|MC'| \equiv |MB'|$ și are unghiul $\widehat{MC'B'}$ de măsură 60°. Rezultă că este echilateral.

A 43. *Se dau într-un plan trei puncte A, B, M și se notează cu O mijlocul lui $|AB|$. Să se demonstreze că produsul scalar $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ este egal cu $\| OM \|^2 - \| OA \|^2$. Punctele A și B fiind fixe și notînd $\| AB \| = 2a$, să se afle locul geometric al punctelor M din plan astfel ca produsul scalar al vectorilor $\overrightarrow{MA}$ și $\overrightarrow{MB}$ să fie egal cu $3a^2$.*

Bacalaureat Laos, 1962, G. M. 3/1965

Soluție. Fie $m(\widehat{AMB}) = \alpha$, deci $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \| MA \| \cdot \| MB \| \cos \alpha$ (1). Din teorema cosinusului rezultă $\cos \alpha = \frac{\| MA \|^2 + \| MB \|^2 - \| AB \|^2}{2 \| MA \| \cdot \| MB \|}$.

Înlocuind în (1) obținem

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \frac{1}{2} (\| MA \|^2 + \| MB \|^2) - \frac{1}{2} \| AB \|^2. \qquad (2)$$

Adunăm și scădem $\frac{1}{4} \| AB \|^2$ și aplicăm teorema medianei:

$$\| OM \|^2 = \frac{1}{2} (\| MA \|^2 + \| MB \|^2) - \frac{1}{4} \| AB \|^2; \text{ rezultă}$$

$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \| OM \|^2 - \frac{1}{4} \| AB \|^2 = \| OM \|^2 - \| OA \|^2$. Dar $\| AB \| = 2a$ și avem $\| OA \| = a$. Punînd condiția $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 3a^2$ obținem

$$\| OM \|^2 - a^2 = 3a^2 \text{ sau } \| OM \|^2 = 4a^2 \text{ sau } \| OM \| = 2a.$$

Locul geometric al lui M este cercul de centru O și rază $2a$.

Observație. Relația $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \|OM\|^2 - \|OA\|^2$ rămîne adevărată și în cazul cînd $M \in AB$.

A 44. *În raport cu un sistem de coordonate carteziene rectangulare în plan se consideră dreapta (D) definită de ecuația:*

$$(D)\colon\ 2x \sin^2 \frac{a}{2} + 2y \cos^2 \frac{a}{2} + \cos a - 1 = 0,$$

unde a este un parametru real care variază.

a) *Să se arate că oricare ar fi valoarea parametrului a, dreapta (D) trece printr-un punct fix A ale cărui coordonate se cer.*

b) *Să se scrie ecuația parabolei care are focarul în A și directoarea reprezentată de ecuația $y + 2 = 0$ și apoi să se traseze graficul acestei parabole.*

Universitatea din București, Facultatea de Matematică, 1963, G. M. 3/1965

Soluție. a) Ținînd seama de $1 - \cos a = 2 \sin^2 \frac{a}{2}$, ecuația $2x \sin^2 \frac{a}{2} + 2y \cos^2 \frac{a}{2} + \cos a - 1 = 0$ se mai poate scrie:

$(D)\colon\ x \sin^2 \frac{a}{2} + y \cos^2 \frac{a}{2} - \sin^2 \frac{a}{2} = 0$. Notînd $\operatorname{tg}^2 \frac{a}{2} = \frac{\lambda}{\mu}$ ecuația devine $\lambda x + \mu y - \lambda = 0$ sau $\lambda(x - 1) + \mu y = 0$, adică ecuația unui fascicul de drepte care trec prin punctul fix $A(1, 0)$.

b) $A(1, 0)$ fiind focarul și $(\Delta)\colon\ y + 2 = 0$ ecuația directoarei și dacă notăm cu $M(x, y)$ un punct curent de pe parabolă, atunci prin definiție avem $\|MN\| = \|MA\|$, unde $N(x, -2)$ este proiecția punctului M pe Δ. Scriind analitic că $\|MN\| = \|MA\|$ obținem ecuația parabolei:

$$(y + 2)^2 = (x - 1)^2 + y^2 \text{ sau } y = \frac{1}{4}(x^2 - 2x - 3).$$

Graficul parabolei se trasează ușor.

A 45. *Să se găsească locul geometric al punctelor din plan (spațiu) pentru care raportul distanțelor la două puncte fixe să fie constant.*

Institutul Politehnic din București, 1972, G. M. 3/1973

Soluția 1. Fie A și B două puncte fixe distincte. Căutăm locul punctelor M pentru care $\frac{\|MA\|}{\|MB\|} = k$, unde k este o constantă pozitivă.

Ne situăm în plan. Pentru $k = 1$, orice punct M pentru care avem $\frac{\|MA\|}{\|MB\|} = 1$ aparține mediatoarei segmentului $[AB]$ și reciproc. În acest caz, locul geometric căutat este mediatoarea segmentului $[AB]$ (fig. A 45a).

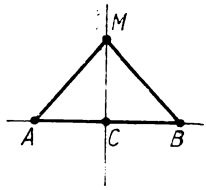


Fig. A 45a

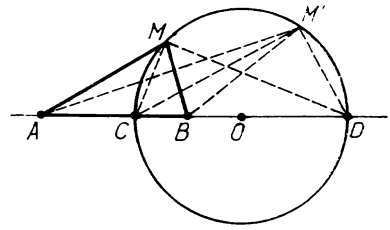


Fig. A 45b

Fie acum $k \neq 1$ și M un punct care nu aparține dreptei AB astfel ca să avem $\frac{\|MA\|}{\|MB\|} = k$. Bisectoarea interioară a unghiului $\widehat{AMB}$ taie pe AB în C. Deoarece $k \neq 1$, rezultă că $\|MA\| \neq \|MB\|$, deci triunghiul AMB nu este isoscel, prin urmare bisectoarea exterioară a unghiului $\widehat{AMB}$ taie pe AB în D. Din proprietățile bisectoarelor avem (fig. A 45b).

$$\frac{\|CA\|}{\|CB\|} = \frac{\|DA\|}{\|DB\|} = \frac{\|MA\|}{\|MB\|} = k.$$

Astfel C și D sînt puncte fixe de pe dreapta AB și împart segmentul $[AB]$ în raportul k. Deoarece $m(\widehat{CMD}) = 90°$, rezultă că punctul M aparține cercului de diametru $[CD]$.

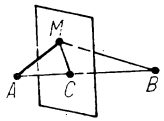
Reciproc, fie M' un punct al cercului de diametru $[CD]$, unde C și D sînt punctele fixe de pe dreapta AB care împart segmentul $[AB]$ în raportul k. Deoarece $M'C \perp M'D$ rezultă că $M'C$ și $M'D$ sînt bisectoarele unghiului din M', adică

$$\frac{\|M'A\|}{\|M'B\|} = \frac{\|CA\|}{\|CB\|} = k.$$

Raționamentul este același pentru orice punct M' care nu aparține lui AB. Punctele C și D convin prin definiție. De aceea locul geometric al punctelor pentru care raportul distanțelor la două puncte fixe A și B este un număr pozitiv $k \neq 1$, este cercul de diametru $[CD]$, punctele C și D, împărțind pe $[AB]$ în raportul dat.

Ne situăm în spațiu. Argumente analoage arată că pentru $k = 1$ locul geometric este planul mediator al segmentului $[AB]$ (fig. A 45c), iar pentru $k \neq 1$ locul geometric este o sferă de diametru $[CD]$ (fig. A 45 d).

Soluția 2. Întrucît la problemele de geometrie date la concurs au fost admise și soluții analitice, vom prezenta soluția analitică a problemei anterioare pentru cazul planului.



Eig. A 45c

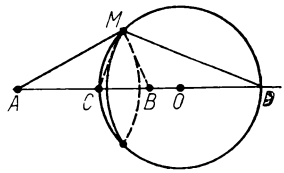


Fig. A 45d

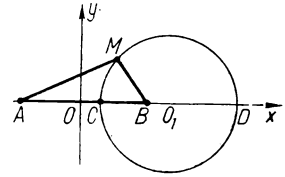


Fig. A 45e

Fie A şi B două puncte fixe din plan. Alegem pe AB drept axă Ox şi mediatoarea segmentului $[AB]$ orientată ca în fig. A 45 e, drept axă Oy. În raport cu sistemul de coordonate ales avem $A(-a, 0)$, $B(a, 0)$, $a > 0$. Dacă $M(x, y)$ este un punct variabil din plan atunci

$$\frac{\|MA\|}{\|MB\|} = k,\ k > 0 \Leftrightarrow \|MA\| = k \cdot \|MB\| \Leftrightarrow \sqrt{(x+a)^2 + y^2} =$$

$$= k\sqrt{(x-a)^2 + y^2} \Leftrightarrow (1-k^2)(x^2+y^2) + 2xa(1+k^2) + a^2(1-k^2) = 0.$$

Pentru $k = 1$ ecuaţia se reduce la $x = 0$ şi deci locul căutat este mediatoarea segmentului $[AB]$.

Pentru $k \neq 1$ ecuaţia reprezintă un cerc care taie axa Ox în punctele fixe $C\left(a\frac{k-1}{k+1}, 0\right), D\left(a\frac{k+1}{k-1}, 0\right)$ care împart segmentul $[AB]$ în raportul k Evident C este situat între A şi B. Pentru $k > 1$, D este situat la dreapta lui B, iar pentru $k < 1$, D este situat la stînga lui A. Cu alte cuvinte locul căutat este cercul de diametru $[CD]$, unde C şi D sînt punctele fixe de pe dreapta AB care împart segmentul $[AB]$ în raportul k.

A 46. *Se dau două semidrepte perpendiculare $[Ox$ şi $[Oy$, un punct fix A pe $[Ox$ şi un punct fix B pe $[Oy$ astfel încît $\|OA\| = \|OB\| = a$. Un punct P se mişcă pe segmentul $[OB]$, iar un punct P' se mişcă pe semidreapta $[By$ astfel încît* $\mu(\widehat{OAP}) = \mu(\widehat{OP'A}) = \theta,\ \theta \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right]$.

Să se găsească locul geometric al centrului cercului circumscris triunghiului APP'.

Institutul Politehnic din Bucureşti, 1971, G. M. 2/1972

Soluţia 1. Segmentul $[OA]$ este tangent în A la cercul APP' deoarece punctele O şi A sînt fixe, iar $\mu(\widehat{OAP}) = \mu(\widehat{OP'A}) = \theta$ (fig. A 46). Dacă M este mijlocul segmentului $[PP']$, atunci centrul C al cercului APP' este punctul de intersecţie al perpendicularei ridicate pe $[Oy$ în M cu perpendiculara $[Az$ ridicată în A pe $[Ox$. Semidreapta $[Az$ este fixă şi $\|CM\| \leqslant \|CA\|$. Re-

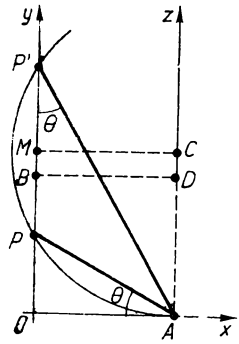


Fig. A 46

zultă $\|CA\| \geqslant a$ și deci C aparține semidreptei $[Dz$, unde $\|AD\| = a$. Reciproc, fie $C \in [Dz$. Prin C ducem $CM \perp Oy$ și pe $[Oy$ luăm $\|MP\| = \|MP'\|$, P fiind interior segmentului $[MO]$. Unim pe A cu P și P'. Segmentul $[OA]$ este tangent la cercul APP' în A, deoarece $CA \perp OA$. Rezultă $\mu(\widehat{OAP}) = \mu(\widehat{OP'A})$ și deci C satisface problema. Rezultă că locul geometric al punctului C este semidreapta $[Dz$, unde $\|AD\| = a$.

Soluția 2 analitică. Notînd $m = \operatorname{tg} \theta$, avem $\|OP\| = am$ și $\|OP'\| = \frac{a}{m}$. Coordonatele vîrfurilor triunghiului APP' vor fi:

$$A(a, 0),\ P(0, am) \text{ și } P'\left(0, \frac{a}{m}\right).$$

Pentru $m \neq 1$, coordonatele centrului C al cercului circumscris triunghiului APP' sînt soluțiile sistemului:

$$(x - a) + y^2 = x^2 + (y - am)^2 = x^2 + \left(y - \frac{a}{m}\right)^2 \text{ sau } 2x = 2my +$$

$$+ a(1 - m^2) = \frac{2}{m} y + a\left(1 - \frac{1}{m^2}\right) \text{ deci } x_C = a,\ y_C = \frac{a}{2}\left(m + \frac{1}{m}\right).$$

În cazul cercetat $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$, deci $m \in (0, +1)$, rezultă $y \in (a, +\infty)$ și locul geometric căutat al centrului $C(x_C, y_C)$ va fi semidreapta deschisă $|Dz$.

În cazul limită cînd $m = 1$, deci $\theta = \frac{\pi}{4}$, punctele P și P' tind către B, iar semidreapta $[Oy$ devine tangentă în B la cerc.

Din familia de cercuri tangente în B la semiaxa $[Oy$:

$$(x - \lambda)^2 + (y - a)^2 = \lambda^2$$

îl vom determina pe cel care conține punctul $A(a, 0)$: $(a - \lambda)^2 + a^2 = \lambda^2$ condiție verificată pentru $\lambda = a$, deci centrul cercului va fi în punctul $D(a, a)$, punct care va aparține și el locului.

Prin urmare locul geometric căutat va fi semidreapta $[Dz$.

A 47. *Fie un unghi* $\widehat{xAy}$ *și* $[Az$ *o semidreaptă interioară unghiului. Prin* I, *un punct de pe* $[Az$, *se duce o dreaptă mobilă care se intersectează cu laturile* $[Ax$ *și* $[Ay$ *în punctele* M *și* N *și perpendiculara pe* $[Az$ *care intersectează laturile unghiului în* B *și* C. *Tot prin* I *se duc dreptele* $IP \| AB$, $(P \in AC)$ *și* $IP' \| AC$ $(P' \in AB)$. *Să se arate că:*

a) $\dfrac{\|IP\|}{\|AM\|} + \dfrac{\|IP'\|}{\|AN\|} = const.$

b) *Dacă* I *este pe bisectoarea unghiului* $\widehat{xAy}$, *atunci*

$$\frac{1}{\|AM\|}+\frac{1}{\|AN\|}=\frac{2}{\|AB\|}.$$

Institutul Pedagogic din Tîrgu Mureș, 1972, G. M. 3/1973

Soluție a) Conform teoremei fundamentale a asemănării avem (fig. A 47):

$\Delta PIN \sim \Delta AMN$ și $\Delta P'IM \sim \Delta AMN$.

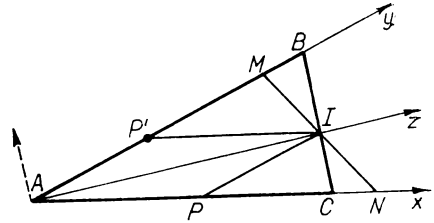


Fig. A 47

Din asemănarea acestor triunghiuri, deducem:

$$\frac{\|IP\|}{\|AM\|}=\frac{\|IN\|}{\|NM\|},\quad \frac{\|IP'\|}{\|AN\|}=\frac{\|IM\|}{\|MN\|}$$

care adunate membru cu membru conduc la:

$$\frac{\|IP\|}{\|AM\|}+\frac{\|IP'\|}{\|AN\|}=\frac{\|IN\|+\|IM\|}{\|MN\|}=\frac{\|MN\|}{\|MN\|}=1.$$

b) Dacă I este pe bisectoarea unghiului $\widehat{xAy}$, atunci triunghiul ABC este isoscel, AI fiind și înălțime și bisectoare. Rezultă că AI este și mediană IP fiind paralelă cu AB, rezultă că $|IP|$ este linie mijlocie în triunghiul ABC, deci:

$$\|IP\|=\frac{\|AB\|}{2};\ \text{la fel avem și}\ \|IP'\|=\frac{\|AC\|}{2}.$$

Dar cum $\|AB\|=\|CA\|$, rezultă că $\|IP\|=\|IP'\|=\frac{\|AB\|}{2}$.

Înlocuind pe $\|IP\|$ și $\|IP'\|$ cu valorile lor obținem

$$\frac{\|IP\|}{\|AM\|}+\frac{\|IP'\|}{\|AN\|}=1\ \text{sau}\ \frac{\|AB\|}{\|AM\|}+\frac{\|AB\|}{\|AN\|}=2,$$

$$\text{de unde}\ \frac{1}{\|AM\|}+\frac{1}{\|AN\|}=\frac{2}{\|AB\|}.$$

Discuție asupra existenței soluției. Pentru a ușura analiza cazurilor ce se pot ivi cînd dreapta mobilă ce trece prin I ocupă diferite poziții, vom recurge la calculul analitic luînd ca axă a absciselor dreapta ce conține semidreapta $[Az$, iar perpendiculara în A pe aceasta ca axă a ordonatelor.

Fie $I(i, 0)$, cu $i > 0$ și Ax: $u = nz$; Ay: $u = mz$,
ecuațiile dreptelor Ax și Ay. Conform cerințelor din enunț, va trebui să avem:

$$n \leqslant 0 < m \ (1) \quad \text{sau } n < 0 \leqslant m. \tag{1'}$$

Fie k coeficientul unghiular al dreptei variabile ce trece prin I. Ecuația ei, va fi deci MN: $u = k(z - i)$
în cazul cînd dreapta nu este perpendiculară pe Az și BC: $z = i$,
cînd ea este perpendiculară pe Az.
Coordonatele punctelor M, B, N și C vor fi:

$$M\left(\frac{ki}{k-m}, \frac{mki}{k-m}\right), B(i, mi), N\left(\frac{ki}{k-n}, \frac{nki}{k-n}\right), C(i, ni)$$

iar coordonatele punctelor P și P':

$$P\left(\frac{mi}{m-n}, \frac{mni}{m-n}\right), P'\left(-\frac{ni}{m-n}, -\frac{mni}{m-n}\right).$$

Cele două rapoarte cerute la punctul a), vor fi:

$$\frac{\|IP\|}{\|AM\|} = \frac{-n\,|\,k-m\,|}{|\,k\,|(m-n)} \text{ sau } \frac{\|IP\|}{\|AB\|} = \frac{-n}{m-n}.$$

$$\frac{\|IP'\|}{\|AN\|} = \frac{m\,|\,k-n\,|}{|\,k\,|(m-n)} \text{ sau } \frac{\|IP'\|}{\|AC\|} = \frac{m}{m-n}.$$

Rămîne de văzut în ce condiții suma S a celor două rapoarte este constantă. În cazul cînd dreapta variabilă este perpendiculară pe Az, avem

$$S = \frac{-n}{m-n} + \frac{m}{m-n} = 1 \text{ (constant)},$$

deci concluzia din a) este verificată. În cazul cînd dreapta variabilă intersectează pe Az sub un unghi diferit de un unghi drept, suma S se scrie :

$$S = \frac{1}{|\,k\,|(m-n)}(m\,|\,k-n\,| - n\,|\,k-m\,|).$$

1°. Cazul $k = 0$ (dreapta variabilă coincide cu Az) se exclude.

2°. Cazurile $n = 0$ sau $m = 0$, conduc la $S = 1$, deci concluzia a) este de asemenea verificată pentru orice $k \neq 0$.

3°. Pentru $k \leqslant n < 0 < m$, sau $n < 0 < m \leqslant k$ se obține $S = 1$, deci luăm acele drepte mobile care nu intersectează interiorul unghiului $\widehat{PIP'}$

4°. În cazul în care dreapta mobilă intersectează interiorul unghiului $\widehat{PIP'}$, nu avem soluții, S fiind în acest caz o funcție de parametrul k.

A 48. *Într-un triunghi dreptunghic ABC, cu unghiul drept în A, ducem bisectoarea unghiului $\hat{A}$ care întîlnește pe BC în D, iar prin D ducem perpendiculara pe BC, care taie pe AB în E și pe AC în F.*

a) *Să se arate că $\| BD \| = \| DF \|$ și $\| CD \| = \| DE \|$.*

b) *Să se arate că simetricul punctului E față de dreapta BC este pe cercul circumscris triunghiului BFC și că simetricul punctului F față de dreapta BC este pe cercul circumscris triunghiului BEC, iar aceste două cercuri sînt congruente.*

c) *Să se arate că unghiurile $\widehat{BEF}$ și $\widehat{BCF}$ sînt congruente și că $\| AE \| \cdot \| BF \| = \| AF \| \cdot \| CE \|$.*

Institutul Pedagogic din Tîrgu-Mureș, 1972, G. M. 3/1973

Soluție. (fig. A 48). a) Patrulaterul $ABDF$ este inscriptibil deoarece unghiurile opuse $\widehat{BAF}$ și $\widehat{BDF}$ sînt suplementare (fiecare dintre ele fiind unghi drept). [AD fiind bisectoare, înseamnă că $m(\widehat{BAD}) = m(\widehat{DAC}) = 45°$. De aici rezultă că $m(\widehat{BD}) = m(\widehat{DF})$. Dar într-un cerc la arce congruente corespund coarde congruente, deci $\|BD\| = \|DF\|$. Patrulaterul $ADCE$ este și el inscriptibil pentru că segmentul $|EC|$ se vede sub același unghi (de măsură 90°) și din A și din D. De aici rezultă că $m(\widehat{DEC}) = m(\widehat{DAC}) = 45°$.

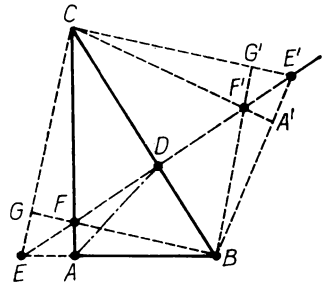


Fig. A 48

Triunghiul DEC fiind dreptunghic în D, înseamnă că $m(\widehat{DEC}) = 90° - 45° = 45°$, deci triunghiul DEC este isoscel și prin urmare $\| CD \| = \| DE \|$.

b) Vom arăta că patrulaterele $BE'CF$ și $BECF'$ sînt inscriptibile și congruente.

Din patrulaterul inscriptibil $ADCE$ avem că $m(\widehat{AEF}) = m(\widehat{FCB})$.

Dar $m(\widehat{AEF}) = m(\widehat{BE'D})$, E și E' fiind simetrice față de BC. Deci $m(\widehat{BEF}) = m(\widehat{FCB})$. Prin urmare segmentul $[BF]$ se vede sub același unghi și din E' și din C deci patrulaterul $BE'CF$ este inscriptibil; deci E' se găsește pe cercul circumscris triunghiului BFC. Unghiul $\widehat{DCF'}$ este congruent cu unghiul $\widehat{FCD}$, F, F' fiind simetrice față de BC. Dar am văzut că $m(\widehat{AEF}) = m(\widehat{FCD})$ și $m(\widehat{BE'F}) = m(\widehat{AEF})$.

De aici rezultă că $m(\widehat{DCF'}) = m(\widehat{AEF})$, deci segmentul $[BF']$ se vede sub același unghi din E și din C, deci patrulaterul $BECF'$ este inscriptibil

și deci F' se află pe cercul circumscris triunghiului BEC. Să arătăm că cele două patrulatere inscriptibile $BFCE'$ și $BECF'$ sînt congruente.

Avem: $\|BE'\| = \|BE\|; \|BF\| = \|BF'\|; \|FC\| = \|F'C\|; \|CE'\| = \|CE\|$ fiind vorba de segmente simetrice față de dreapta BC.

De aici rezultă că $\Delta BEC' \equiv \Delta BEC$; $\Delta BFC \equiv \Delta BF'C$.

Deci cele două patrulatere fiind formate din cîte două triunghiuri respectiv congruente și la fel așezate, sînt congruente, prin urmare cercurile circumscrise lor sînt congruente.

c) Din patrulaterul inscriptibil $ABDF$ avem $m(\widehat{ABF}) = m(\widehat{ADF})$.

Din patrulaterul inscriptibil $ADCE$ avem $m(\widehat{ADF}) = m(\widehat{ADE}) = m(\widehat{ACE})$.

Din cele două șiruri de egalități rezultă că $m(\widehat{ABF}) = m(\widehat{ACE})$ sau $m(\widehat{EBF}) = m(\widehat{ACE})$.

Din aceste egalități rezultă că triunghiurile dreptunghice ABF și ACE sînt asemenea, avînd cîte un unghi ascuțit congruent, iar din asemănarea lor avem:

$$\frac{\|AF\|}{\|AE\|} = \frac{\|BF\|}{\|CE\|} \text{ de unde: } \|AE\| \cdot \|BF\| = \|AF\| \cdot \|CE\|.$$

Variantă de soluție la punctul b). Din $AC \perp EB$ și $ED \perp BC$, rezultă că F este ortocentrul triunghiului CEB. F' fiind simetricul ortocentrului F față de BC, el se va afla pe cercul circumscris triunghiului CEB. Demonstrația este imediată:

$m(\widehat{CF'B}) = m(\widehat{CFB})$, F și F' fiind simetrice față de BC; $\widehat{CFB} \equiv \widehat{GFA}$ ca opuse la vîrf; $m(\widehat{AEG}) + m(\widehat{GFA}) = 180°$, E și F fiind vîrfuri opuse în patrulateful inscriptibil $FGEA$; de aici rezultă că $m(\widehat{CF'B}) + m(\widehat{BEC}) = 180°$ adică F' aparține cercului circumscris triunghiului CEB, de unde concluzia că patrulaterul $CEBF'$ este inscriptibil.

Triunghiurile CEB și $CE'B$ fiind simetrice față de BC, sînt congruente, F' simetricul lui F fiind ortocentrul triunghiului CBE'. Dar F fiind la rîndul său simetricul ortocentrului F' al triunghiului $CE'B$ față de dreapta CD, el se va afla pe cercul circumscris acestui triunghi, de unde rezultă că și patrulaterul $CFBE'$ este inscriptibil. În fine, din congruența triunghiurilor CEB și $CE'B$ rezultă congruența cercurilor circumscrise lor, conform ultimei cerințe a concluziei din enunțul punctului b).

A 49. *Într-un plan π se dau două drepte perpendiculare d_1 și d_2 care se intersectează în O. Distanțele de la un punct M, nesituat în planul π, la dreptele d_1 și d_2 sînt egale respectiv cu $3a$ și $4a$, iar distanța de la M la O este de $3a\sqrt{2}$. Să se calculeze distanța de la M la planul π în funcție de a.*

Institutul Politehnic din București, 1976, G. M. 3/1977

Soluție. Fie B proiecția lui M pe planul π, iar A și C proiecțiile lui M pe d_1 și d_2. Din reciproca teoremei celor trei perpendiculare rezultă $BA \perp d_1$, $BC \perp d_2$. Rezultă că patrulaterul $OABC$ este dreptunghi. Deoarece triunghiurile OAM, OCM, OAB și OBM sînt dreptunghice, rezultă:

$$\| OA \|^2 = \| OM \|^2 - \| AM \|^2 = 9 \cdot 2a^2 - 9a^2 = 9a^2;$$

$$\| OC \|^2 = \| OM \|^2 - \| CM \|^2 = 18a^2 - 16a^2 = 2a^2;$$

$$\| OB \|^2 = \| OA \|^2 + \| AB \|^2 = \| OA \|^2 + \| OC \|^2 = 11a^2;$$

$$\| MB \|^2 = \| OM \|^2 - \| OB \|^2 = 18a^2 - 11a^2 = 7a^2$$

Deci $\| MB \| = a\sqrt{7}$.

A 50. *În planul raportat la un sistem de axe dreptunghiulare considerăm parabola $2y = x^2$. Fie P un punct pe parabolă. Să se determine în funcție de abscisa k a lui P:*

a) *Coordonatele punctului T unde tangenta în P taie axa Ox, aria triunghiului OTP și coordonatele centrului de greutate G al aceluiași triunghi;*

b) *Să se afle locul geometric al punctului G cînd P descrie parabola dată;*

c) *Să se arate că înălțimea triunghiului OTP corespunzătoare lui T trece printr-un punct fix.*

Universitatea din București, Facultatea de Matematică, 1976, G. M. 2/1977

Soluție. a) Ecuația tangentei în P $(k, k^2/2)$ este: $2kx - 2y - k^2 = 0$. Coordonatele punctului T se obțin din rezolvarea sistemului:

$$2kx - 2y - x^2 = 0 \quad \text{și} \quad y = 0. \quad \text{Rezultă} \quad T(k/2,\ 0).$$

Fie P' proiecția ortogonală a lui P pe Ox, adică $P'(k, 0)$. Rezultă

$$\sigma[OTP] = 1/2 \cdot \| OT \| \cdot \| PP' \| = 1/2 \cdot | k | /2 \cdot k^2/2 = | k^3 | /8.$$

Coordonatele centrului de greutate G vor fi:

$$x_G = \frac{x_O + x_T + x_P}{3} = k/2, \qquad y_G = \frac{y_O + y_T + y_P}{3} = k^2/6.$$

b) Eliminînd k între coordonatele centrelor de greutate obținem $y = 2/3 \cdot x^2$, adică locul geometric este o parabolă.

c) Dreapta OP are panta $k/2$. Înălțimea corespunzătoare vîrfului T în triunghiul OTP are ecuația: $2x + k(y - 1) = 0$. Deci punctul fix va fi $E(0,\ 1)$.

A 53. *Se consideră un triunghi oarecare ABC. Fie G centrul său de greutate. O dreaptă variabilă trecînd prin G intersectează segmentele $|AB|$ și $|AC|$ respectiv în M și N. Să se arate că:*

$$\frac{\|BM\|}{\|MA\|}+\frac{\|CN\|}{\|NA\|}=1.$$

Institutul Politehnic din București, 1975, G. M. 2/1976

Soluție. Dacă $MN \parallel BC$ atunci $\frac{\|BM\|}{\|MA\|}=\frac{\|CN}{\|NA\|}=\frac{1}{2}$ și relația se verifică.

Să presupunem acum că MN va intersecta BC într-un punct U, iar paralela prin A la BC într-un punct V (fig. A 53). Fie O mijlocul segmentului $|BC|$. Deoarece dreapta MN taie laturile $|AB|$ și $|AC|$ ale triunghiului ABC, rezultă conform axiomei lui Pasch că MN nu taie latura $|BC|$, deci punctului U nu este pe segmentul $|BC|$.

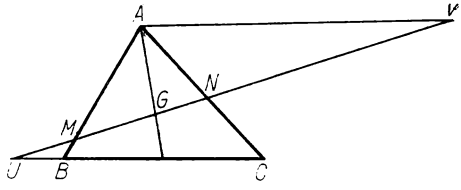


Fig. A 53

Să tratăm cazul cînd $B \in |UC|$ (analog se tratează cazul cînd $C \in |BU|$). Folosind asemănările de triunghiuri care apar, putem scrie:

$$\frac{\|BM\|}{\|MA\|}+\frac{\|CN\|}{\|NA\|}=\frac{\|UB\|}{\|AV\|}+\frac{\|UC\|}{\|AV\|}=\frac{(\|UO\|-\|BO\|)+(\|UO\|+\|OC\|)}{\|AV\|}=$$

$$=\frac{2\|UO\|}{\|AV\|}=2\cdot\frac{\|GO\|}{\|GA\|}=2\cdot\frac{1}{2}=1.$$

A 54. *Se dă un triunghi ABC dreptunghic în A. Fie D piciorul înălțimii din A. Să se arate că: $\|AD\|>\|AB\|+\|AC\|-\|BC\|$.*

Institutul Politehnic din București, 1975, G. M. 2/1976

Soluție. Notînd $\|BC\|=a$, $\|CA\|=b$, $\|AB\|=c$, inegalitatea de demonstrat se scrie succesiv: $\frac{bc}{a}>b+c-a \Leftrightarrow bc>ab+ac-a^2 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow a^2-ab-ac+bc>0 \Leftrightarrow (a-b)(a-c)>0$ și această ultimă inegalitate este evidentă deoarece $a>b$, $a>c$.

A 55 *Tangenta în A la cercul circumscris triunghiului ABC întîlnește dreapta BC în D. Se consideră o paralelă variabilă MN la AD astfel încît M este pe dreapta AB și N pe dreapta AC.*

1) *Să se calculeze lungimile segmentelor $|DA|$, $|DB|$ și $|DC|$ în funcție de lungimeile laturilor triunghiului ABC;*

2) *Să se arate că patrulaterul $BMNC$ este inscriptibil;*

A 51. *Să se calculeze lungimea laturii tetraedrului regulat înscris într-o sferă de rază R.*

Institutul Politehnic din București 1977, G. M. 3/1977

Soluție. Din ipoteză avem că baza și fețele laterale ale tetraedrului sînt triunghiuri echilaterale congruente. Dacă se notează cu a latura tetraedrului regulat și cu O centrul sferei circumscrise triunghiului echilateral BCD, trebuie calculată întîi distanța $\|DI\|$, unde I este proiecția lui A pe planul (BCD).

Avem $\|DI\| = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{\sqrt{3}}$. Rezultă deci $\|AI\| = \sqrt{\|AD\|^2 - \|DI\|^2} = \frac{2a}{\sqrt{6}}$. Dacă A' este punctul diametral opus lui A, atunci în triunghiul dreptunghic ADA' avem, aplicînd teorema catetei, $\|AD\|^2 = \|AI\| \cdot \|AA'\|$ adică $a^2 = \frac{2a}{\sqrt{6}} \cdot 2R$. Deci $a = \frac{4R}{\sqrt{6}}$.

A 52. *Se consideră parabola de ecuație $y^2 - 2px = 0$ având focarul F și directoarea Δ. Un punct variabil M de pe parabolă are proiecția (ortogonală) M' pe axa Ox. Fie M'' simetricul punctului M' față de originea O a axelor și N punctul de intersecție a dreptei MM'' cu directoarea Δ.*

a) *Să se arate că dreapta $M''N$ este tangentă la parabolă în punctul M.*

b) *Să se afle locul geometric al punctului de intersecție a dreptei FM cu paralela dusă prin N la axa Ox.*

Universitatea din Cluj, 1975, G. M. 10/1975

Soluție. a) Fie $M(\alpha, \beta)$ deci $\beta^2 = 2p\alpha$. Avem $M'(\alpha, 0)$, $M''(-\alpha, 0)$. Ecuația dreptei MM'' este $\frac{x+\alpha}{2\alpha} = \frac{y}{\beta}$ sau, înlocuind $\alpha = \frac{\beta^2}{2p}$ se obține $2px - 2\beta y + \beta^2 = 0$. Ecuația tangentei la parabolă în punctul M este $y\beta = p(x + \alpha)$ și înlocuind la fel $\alpha = \frac{\beta^2}{2p}$ găsim $2px - 2\beta y + \beta^2 = 0$. Rezultă că cele două drepte coincid.

b) Se obține ușor că ecuația dreptei MF este $2p\beta x + (p^2 - \beta^2)y - p^2\beta = 0$, iar ecuația paralelei prin N la axa Ox este $y = \frac{\beta^2 - p^2}{2\beta}$. Din cele două ecuații rezultă $x = \frac{p^4 + \beta^4}{4p\beta^2}$ și apoi se stabilește ușor egalitatea $y^2 = px - \frac{p^2}{2}$, ceea ce arată că locul geometric este tot o parabolă.

3) *Să se arate că locul geometric al mijlocului segmentului* $|MN|$, *cînd variază paralela* MN, *este o dreaptă ce trece prin* A;

4) *Să se arate că locul geometric de la punctul precedent conține un punct* E *situat pe* $|BC|$ *astfel încît*

$$\frac{\|EB\|}{\|EC\|} = \frac{\|DB\|}{\|DC\|} = \frac{\|AB\|^2}{\|AC\|^2};$$

5) *Să se dovedească congruența unghiurilor* $\widehat{BAE}$ *și* $\widehat{CAA'}$, A' *fiind mijlocul lui* $|BC|$;

6) *Presupunînd* $m(\widehat{BAC}) = 90°$ *și* $\|AB\| < \|AC\|$, *să se exprime aria suprafeței obținută prin rotirea în jurul dreptei* DC *a segmentului* $|DA|$ *și a arcului de cerc* $\overset{\frown}{AC}$ *(care nu conține punctul* B*), în funcție de* $\|AB\| = c$, $\|AC\| = b$.

Universitatea din Iași, 1975, G. M. 10/1975

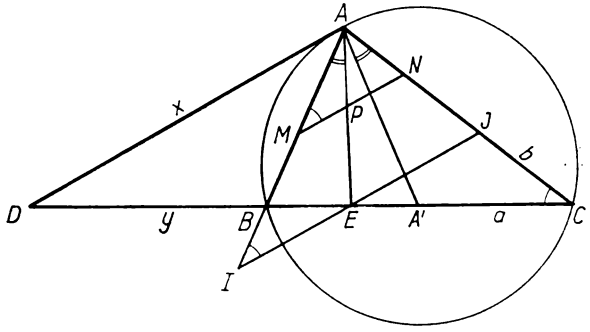


Fig. A 55

Soluție. (fig. A 55). 1) Trebuie ca $\|AB\| \neq \|AC\|$, fie de exemplu $\|AB\| < \|AC\|$. Atunci rezultă $B \in |DC|$. Notînd $\|BC\| = a$, $\|AC\| = b$, $\|AB\| = c$, $\|AD\| = x$, $\|BD\| = y$, avem scriind puterea punctului D față de cerc $x^2 = y(a + y)$, iar din teorema cosinusului în triunghiul ABD avem $x^2 = y^2 + c^2 + 2cy \cos B$. Înlocuind și $\cos B = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$, rezultă după calcule $x = \dfrac{abc}{b^2 - c^2}$, $y = \dfrac{ac^2}{b^2 - c^2}$ și $\|DC\| = \dfrac{ab^2}{b^2 - c^2}$.

2) $\widehat{BCN} \equiv \widehat{DAM} \equiv \widehat{AMN}$.

3) Fie M_0N_0 o poziție fixă a paralelei, iar MN o poziție arbitrară a acesteia. Notăm cu P_0, P mijloacele segmentelor $|M_0N_0|$, $|MN|$. Cum $MN \| M_0N_0$, există $\lambda \in \mathbf{R}$ astfel încît $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AM_0}$, $\overrightarrow{AN} = \lambda\overrightarrow{AN_0}$. Atunci $\overrightarrow{AP} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}) = \lambda \cdot \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AM_0} + \overrightarrow{AN_0}) = \lambda\overrightarrow{AP_0}$ deci punctul P aparține dreptei AP_0. Reciproc, orice punct al acestei drepte aparține locului geometric.

4) Fie $I \in AB$, $J \in AC$ astfel încît mijlocul E al segmentului $|IJ|$ să aparțină dreptei BC. De fapt $E \in AP_0$ și cum dreapta AP_0 intersectează

chiar segmentul $|BC|$, deducem că $E \in |BC|$. Mijlocul E al segmentului $|IJ|$ este conjugatul armonic al punctului de la ∞ în raport cu I și J, deci fasciculul cu razele AJ, AE, AI, AD este armonic. Atunci acest fascicul determină pe secanta $DBEC$ tot o diviziune armonică, adică

$$\frac{\|EB\|}{\|EC\|} = \frac{\|DB\|}{\|DC\|} = \frac{y}{a+y} = \frac{\dfrac{ac^2}{b^2-c^2}}{\dfrac{ab^2}{b^2-c^2}} = \frac{c^2}{b^2}.$$

5) Cum $\widehat{AIJ} \equiv \widehat{ACB}$ rezultă $\Delta AIJ \sim \Delta ACB$ și mai departe rezultă $\Delta AIE \sim \Delta ACA'$, de unde $\widehat{BAE} \equiv \widehat{CAA'}$.

6) $|BC|$ este diametru, deci cercul are raza $R = \frac{a}{2}$. Notînd cu K piciorul înălțimii din A a triunghiului ABC, se obține ușor $\|AK\| = \frac{bc}{a}$, $\|CK\| = \frac{b^2}{a}$. Aria căutată este suma dintre aria laterală a unui con avînd raza $r = \frac{bc}{a}$ și generatoarea $x = \frac{abc}{b^2-c^2}$ și aria unei calote sferice care face parte dintr-o sferă de rază $R = \frac{a}{2}$ și are înălțimea $h = \frac{b^2}{a}$. Efectuînd calculele se obține că aria respectivă este egală cu $\frac{\pi b^4}{b^2-c^2}$.

A 56. *Fie $ABCDE$ un pentagon regulat și $\{F\} = |AC| \cap |BD|$. Să se arate că $AFDE$ este un romb și să se calculeze raportul* $\dfrac{\|DF\|}{\|BF\|}$.

Institutul Politehnic din București, 1982, G. M. 12/1982

Soluție. $m(\widehat{BDE}) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5} \cdot 2\pi\right) = \frac{2\pi}{5}$, $m(\widehat{AED}) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{5} \cdot 2\pi\right) = \frac{3\pi}{5}$.

Rezultă că $\widehat{BDE}$ și $\widehat{AED}$ sînt suplementare deci $BD \parallel AE$; analog $AC \parallel ED$ și cum $\|AE\| = \|ED\|$ rezultă că $AFDE$ este romb. În triunghiul ABD, AF este bisectoarea unghiului $\widehat{BAD}$ deoarece arcele $\widehat{BC}$ și $\widehat{CD}$ sînt congruente. Aplicînd teorema bisectoarei

$$\frac{\|DF\|}{\|BF\|} = \frac{\|AD\|}{\|AB\|}$$

și conform cu teorema sinusurilor în triunghiul ABD, $\|AD\|$ și $\|AB\|$ sînt proporționale cu sinusurile unghiurilor opuse:

$$\frac{\|DF\|}{\|BF\|} = \frac{\sin \widehat{ABD}}{\sin \widehat{ADB}} = \frac{\sin \frac{2\pi}{5}}{\sin \frac{\pi}{5}} = 2 \cos \frac{\pi}{5}.$$

A 57. *a) Presupunem* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$. *Notînd* $S_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, *să se arate că dacă* $|b_n| < \frac{\varepsilon}{2}$, *pentru* $n > N(\varepsilon)$, *are loc inegalitatea:*

$$\frac{S_N}{n} - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{S_n}{n} < \frac{S_N}{n} + \frac{\varepsilon}{2}, \text{ pentru } n > N(\varepsilon).$$

b) Să se obțină de mai sus că $-\varepsilon < \frac{S_n}{n} < \varepsilon$ *pentru* $n > N_1(\varepsilon)$. *Ce concluzie rezultă de aici?*

b) Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ *(finită), să se arate că:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = L,$$ *folosind observația că* $a_n = L + b_n$, *unde* $\lim b_n = 0$.

c) Să se afle $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{n^2}\right)$.

Institutul Politehnic din Iași, 1977

Soluție. a) Avem că $S_n = S_N + b_{N+1} + \ldots + b_n$, pentru $n > N(\varepsilon) = N$. Dar $-\frac{\varepsilon}{2} < b_i < \frac{\varepsilon}{2}$ de îndată ce $i > N$, deci $-(n-N)\frac{\varepsilon}{2} < \sum\limits_{i=N+1}^{n} b_i < (n-N)\frac{\varepsilon}{2}$, de unde rezultă că $S_N - (n-N)\frac{\varepsilon}{2} < S_n < S_N + (n-N)\frac{\varepsilon}{2}$ sau $\frac{S_N}{n} - \frac{n-N}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{2} < \frac{S_n}{n} < \frac{S_N}{n} + \frac{n-N}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{2}$, pentru $n > N$. Dar

$$-\frac{n-N}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{2} > -\frac{\varepsilon}{2}, \quad \frac{n-N}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{căci} \quad N = N(\varepsilon) > 0,$$

deci

$$\frac{S_N}{n} - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{S_n}{n} < \frac{S_N}{n} + \frac{\varepsilon}{2}, \text{ pentru } n > N. \tag{1}$$

b) Şirul $\left(\frac{S_N}{n}\right)_{n\geq 1}$ este convergent la zero, deoarece numărul S_N este fixat, deci există un rang $N'\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ astfel încît

$$-\frac{\varepsilon}{2} < \frac{S_N}{n} < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ pentru } n > N'\left(\frac{\varepsilon}{2}\right). \tag{2}$$

Fie $N_1(\varepsilon) = \max\left\{N(\varepsilon), N'\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right\}$. Atunci din (1) şi (2) rezultă: $-\frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} <$ $< \frac{S_N}{n} - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{S_n}{n} < \frac{S_N}{n} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$ sau $-\varepsilon < \frac{S_n}{n} < \varepsilon$, pentru $n > N_1(\varepsilon)$. În concluzie, deoarece ε a fost luat arbitrar, pozitiv, rezultă că şirul $\left(\frac{S_n}{n}\right)_{n\geq 1}$ este convergent la zero.

c) Numărul L fiind finit vom nota cu $(b_n)_{n\geq 1}$ şirul cu termenul general $b_n = a_n - L$. Deoarece şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ converge la L, rezultă că şirul $(b_n)_{n\geq 1}$ converge la zero. Aplicînd rezultatul de la punctul precedent al problemei, rezultă că şirul $\left(\frac{S_n}{n}\right)_{n\geq 1}$ converge la zero.

Dar $\frac{S_n}{n} = \frac{b_1 + \ldots + b_n}{n} = \frac{(a_1 - L) + \ldots + (a_n - L)}{n} = \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} -$

$- L$. Deoarece $\left(\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} - L\right) \xrightarrow{n} 0$, rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} = L$.

d) Fie şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ cu termenul general $a_n = \frac{1}{n}$. Evident $a_n \xrightarrow{n} 0$. În plus, avem

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = \frac{1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{n^2}.$$

Aplicînd rezultatul de la punctul 3, rezultă că $\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \xrightarrow{n} 0$, deci

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{n^2}\right) = 0.$$

A 58. *Fie* $f : \left[\frac{1}{\pi}, \infty\right) \to \mathbf{R}$ *definită prin* $f(x) = \int_{\frac{1}{\pi}}^{x} \left|\cos\frac{1}{t}\right| \cdot \frac{dt}{t^2}$.

a) Să se arate că f este monotonă.

b) Să se determine $\lim_{n\to\infty} f(n)$.

Universitatea din București, 1976

Soluție. a) Fie $x_1 < x_2$. Avem de arătat că $f(x_1) \leqslant f(x_2)$. Pentru aceasta vom compara $f(x_2) - f(x_1)$ cu zero.

Funcția $g : \left[\frac{1}{\pi}, \infty\right) \to \mathbf{R}$, $g(t) = \left|\cos\frac{1}{t}\right| \cdot \frac{1}{t^2}$ este o funcție continuă. Atunci, aplicînd teorema de medie, putem scrie:

$$f(x_2) - f(x_1) = \int_{\frac{1}{\pi}}^{x_2} g(t)dt - \int_{\frac{1}{\pi}}^{x_1} g(t)\,dt = \int_{x_1}^{x_2} g(t)\,dt = (x_2 - x_1)\,g(\xi) =$$

$$= (x_2 - x_1) \cdot \left|\cos\frac{1}{\xi}\right| \cdot \frac{1}{\xi^2} \geqslant 0 \text{ unde } \xi \in (x_1, x_2).$$

Rezultă $f(x_1) \leqslant f(x_2)$, adică f este crescătoare. (Observăm că putem chiar renunța la teorema de medie și folosim doar faptul că g este pozitivă și atunci integrala sa pe intervalul $[x_1, x_2]$ este un număr pozitiv).

b) Pentru $n \geqslant 1$, deoarece $1 > \frac{2}{\pi}$, avem

$$f(n) = \int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \left|\cos\frac{1}{t}\right| \cdot \frac{dt}{t^2} + \int_{\frac{2}{\pi}}^{n} \left|\cos\frac{1}{t}\right| \cdot \frac{dt}{t^2} = \int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \left(-\cos\frac{1}{t}\right)\frac{dt}{t^2} +$$

$$+ \int_{\frac{2}{\pi}}^{n} \cos\frac{1}{t} \cdot \frac{dt}{t^2} = \sin\frac{1}{t}\Bigg|_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} - \sin\frac{1}{t}\Bigg|_{\frac{2}{\pi}}^{n} =$$

$$= \sin\frac{\pi}{2} - \sin\pi - \sin\frac{1}{n} + \sin\frac{\pi}{2} = 2 - \sin\frac{1}{n}.$$

Deci

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = \lim_{n\to\infty}\left(2 - \sin\frac{1}{n}\right) = 2.$$

A 59. *Fie șirul* $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ *cu* ***următoarele proprietăți:***

a) $(x_{2n+1} - x_{2n})\,(x_{2n} - x_{2n-1}) < 0$, $(\forall) n \in \mathbf{N}^*$;

b) $\lim_{n\to\infty} (x_{n+1} - x_n) = 0$.

***Este** șirul* $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ *convergent?*

Universitatea din București, 1974

Soluţie. Fie şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ cu termenul general:

$$x_n = \begin{cases} -1, \text{ dacă } n = 1 \\ 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}, \text{ dacă } n = \text{impar} \geqslant \beta \\ 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}, \text{ dacă } n = \text{par.} \end{cases}$$

Arătăm că şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ verifică proprietăţile a) şi b) şi este totuşi divergent. Pentru a verifica a) avem pentru $n \geqslant 2$:

$$(x_{2n+1} - x_{2n})(x_{2n} - x_{2n-1}) = -\frac{1}{2n+1}\left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n-1}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2n+1}\left(\frac{2}{2n-1} + \frac{1}{2n}\right) < 0.$$

Pentru $n = 1$ avem $(x_3 - x_2)(x_2 - x_1) = -\frac{1}{\beta}\left(1 + \frac{1}{2} + 1\right) < 0.$

Pentru a verifica b), observăm că:

$$x_{n+1} - x_n = -\frac{1}{2k+1} \xrightarrow{k} 0 \text{ pentru } n = 2k,$$

$$x_{n+1} - x_n = \frac{2}{2k-1} + \frac{1}{2k} \xrightarrow{k} 0 \text{ pentru } n = 2k-1.$$

Deci, $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1} - x_n) = 0$. Folosind faptul că şirul $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, cu termenul general $y_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$ este divergent, rezultă uşor că şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este divergent.

Putem da însă şi exemplu de şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent care verifică proprietăţile a) şi b).

Astfel, şirul de termen general, $x_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$,

verifică a) şi b) şi este convergent.

Observaţie. Dacă condiţia a) se înlocuieşte cu condiţia a') $(x_{2n+1} - (x_{2n}) \cdot (x_{2n} - x_{2n-1} > 0$, $(\forall)\ n \geqslant 1$, există şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de termen general $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$ care verifică a') şi b) şi este divergent.

A 60. *Se dă o funcție* $f:[0,\infty)\to\mathbf{R}$ *cu proprietatea următoare: există un întreg* $k\geqslant 2$, *astfel încît* $f(x)=f(x^k)$, *oricare ar fi* $x\in[0,\infty)$. *Arătați că:*

a) *Pentru orice* $x\in[0,\infty)$ *și orice întreg* $n\geqslant 1$ *au loc relațiile:* $f(x)=f(x^{k^n})=f(\sqrt[k^n]{x})$

b) *Dacă* f *este continuă, atunci* f *este constantă.*

Universitatea din București, 1976

Soluție. Prima egalitate de la punctul a) se obține aplicînd de n ori consecutiv ipoteza din enunț pentru x. Astfel:

$$f(x)=f(x^k)=f((x^k)^k)=f(x^{k^2})=f((x^{k^2})^k)=f(x^{k^3})=\ldots=f(x^{k^n}).$$

Pentru a doua egalitate aplicăm același procedeu pentru $x^{\frac{1}{k^n}}$. Astfel

$$f(x^{\frac{1}{k^n}})=f((x^{\frac{1}{k^n}})^k)=f(x^{\frac{1}{k^{n-1}}})=\ldots=f(x).$$

b) Fie $x\in[0,1)$. Atunci aplicînd punctul a) rezultă ca $(\forall)\ n\geqslant 1$, avem $f(x)=f(x^{k^n})$ Dar $x_n=x^{k^n}\xrightarrow{n}0$, și deoarece funcția f este continuă iar șirul valorilor $(f(x_n))_{n\geqslant 1}$ este șirul constant de termen $f(x)$, rezultă că $f(0)=\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=f(x)$.

Fie $x\in(1,\infty)$. Atunci șirul $y_n=\sqrt[k^n]{x}\xrightarrow{n}1$; deoarece $f(y_n)=f(x)$, $(\forall)\ n\geqslant 1$ și funcția f este continuă, rezultă că $f(1)=\lim\limits_{n\to\infty}f(y_n)=f(x)$. Deci $\operatorname{Im} f=f([0,\infty))=\{f(0),f(1)\}$. Dar deoarece intervalul $[0,\infty)$ este o mulțime conexă, iar funcția f este continuă, rezultă că $\operatorname{Im} f$ este o mulțime conexă, adică $f(0)=f(1)$.
Deci,
$(\forall)\ x\in[0,\infty)$, avem că $f(x)=f(0)$, adică funcția f este constantă.

A 61. *Se consideră funcția* $f(x)=\cos x\cdot\sin 2x$. *Să se arate că* $\min\limits_{x\in[-\pi,\pi]}f(x)>-\frac{7}{9}$.

U.R.S.S., 1977

Soluție. Funcția f se mai poate scrie:

$$f(x)=\cos x\cdot 2\sin x\cos x=2\cos^2 x\sin x=2(1-\sin^2 x)\sin x=$$

$$=2\sin x-2\sin^3 x.\ \text{Prin derivare, obținem}$$

$$f'(x)=2\cos x-6\sin^2 x\cdot\cos x=2\cos x(1-3\sin^2 x).$$

Pentru a afla punctele de extrem ale funcției f, vom rezolva ecuația $f'(x) = 0$ sau,

$2 \cos x (1 - 3 \sin^2 x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0$ sau $\sin^2 x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ sau $\sin x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Dacă $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, din condiția $x \in [-\pi, \pi]$ rezultă că $x = \pm \frac{\pi}{2}$ și $f\left(\pm \frac{\pi}{2}\right) = 0 > -\frac{7}{9}$.

Dacă $x \in [-\pi, \pi]$ verifică ecuația $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{3}$, atunci

$$f(x) = 2 \sin x - 2 \sin^3 x = 2 \frac{\sqrt{3}}{3} - 2 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{27} = 2\left(\frac{3\sqrt{3} - \sqrt{3}}{9}\right) = \frac{4\sqrt{3}}{9} > -\frac{7}{9}.$$

Dacă $x \in [-\pi, \pi]$ verifică ecuația $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, atunci $f(x) = -\frac{2\sqrt{3}}{3} + 2 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{27} = -\frac{4\sqrt{3}}{9}$; dar $-\frac{4\sqrt{3}}{9} > -\frac{7}{9}$, deoarece inegalitatea este echivalentă cu $4\sqrt{3} < 7$ sau $48 < 49$, evident. Deci și în acest caz $f(x) > -\frac{7}{9}$. Deoarece punctele de minim ale funcției derivabile f se află printre rădăcinile ecuației $f'(x) = 0$, am verificat că

$$\min_{x \in [\pi, \pi]} f(x) = -\frac{4\sqrt{3}}{9} > -\frac{7}{9}.$$

A 62. *Să se calculeze limita șirului* $(x_n)_{n \geq 1}$ *unde* $x_n = ac + (a + ab)c^2 + (a + ab + ab^2)c^3 + \ldots + (a + ab + \ldots + ab^n)c^{n+1}$, *unde* a, b, c *sînt numere reale astfel încît* $|c| < 1$, $b \neq 1$ *și* $|bc| < 1$.

Institutul Politehnic din București, 1983

Soluție. Avem succesiv $x_n = ac + (1 + b)ac^2 + (1 + b + b^2)ac^3 + \ldots + (1 + b + \ldots b^n)ac^{n+1} = ac + \frac{b^2 - 1}{b - 1}ac^2 + \frac{b^3 - 1}{b - 1}ac^3 + \ldots + \frac{b^{n+1} - 1}{b - 1}ac^{n+1} = \frac{ac}{b - 1}[(b - 1) + (b^2 - 1)c + (b^3 - 1)c^2 + \ldots + (b^{n+1} - 1)c^n] = \frac{ac}{b - 1}[(b + b^2c + b^3c^2 + \ldots + b^{n+1}c^n) - (1 + c + c^2 + \ldots + c^n)] = \frac{ac}{b - 1}\left[b\frac{(bc)^{n+1} - 1}{bc - 1} - \frac{c^{n+1} - 1}{c - 1}\right]$.

În șirul de egalități am folosit faptul că $b \neq 1$, $c \neq 1$, $bc \neq 1$.

Deoarece $|c| < 1$, avem că $\lim\limits_{n\to\infty} c^{n+1} = 0$ și deoa fece $|bc| < 1$, avem că $\lim\limits_{n\to\infty} (bc)^{n+1} = 0$. Deci,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{ac}{b-1}\left[b\,\frac{(bc)^{n+1}-1}{bc-1} - \frac{c^{n+1}-1}{c-1}\right] =$$

$$= \frac{ac}{b-1}\left(\frac{-b}{bc-1} + \frac{1}{c-1}\right) = \frac{ac}{b-1}\cdot\frac{b-1}{(bc-1)(c-1)} = \frac{ac}{(bc-1)(-1)}\cdot$$

A 63. *Fie $(a_n)_{n\leqslant 0}$ un șir mărginit de numere reale. Să se arate că dacă $(b_n)_{n\geqslant 0}$ este un șir de numere reale astfel încît $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$ atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$; reciproca este adevărată?*

Universitatea din București 1979.

Soluție. Vom demonstra că $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{b_n}\right| = 0$ și aplicînd rezultatul cunoscut că dacă un șir $(x)_{n\geqslant 0}$ are proprietatea că $|x_n| \xrightarrow{n} 0$ atunci și $x_n \xrightarrow{n} 0$, va rezulta că $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$. Dar șirul $(a_n)_{n\geqslant 0}$ este mărginit, deci $(\exists)\ M > 0$ astfel încît $|a_n| \leqslant M$, $(\forall)\ n \geqslant 0$.

Fie $\varepsilon > 0$; deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} |b_n| = 0$, există că există un rang $N\left(\frac{M}{\varepsilon}\right) = N$ astfel încît (A) $n \leqslant N$ să avem $|b_n| > \frac{M}{\varepsilon}$.

Atunci $\frac{1}{|b_n|} < \frac{\varepsilon}{M}$. Deci

$$\left|\frac{a_n}{b_n}\right| = \frac{|a_n|}{|b_n|} \leqslant \frac{M}{|b_n|} < M.\ \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon,\ (\forall)\ n > N.$$

Deci, $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{b_n}\right| = 0$.

Reciproca afirmației din enunț este falsă. De exemplu, fie $(a_n)_{n\geqslant 0}$ cu $a_n = \frac{1}{n}$ și $(b_n)_{n\leqslant 0}$ cu $b_n = 1$. Atunci șirul $(a_n)_{n\leqslant 0}$ este mărginit, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} =$ $= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, dar $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1 \neq \infty$.

Comentariu. Totuşi, impunînd o condiţie suplimentară şirului $(a_n)_{n\geq 0}$ putem avea reciproca adevărată.

Fie $(a_n)_{n\geq 0}$ cu $\alpha < |a_n| < \beta$, $(\forall)\ n \geq 0$, unde $\alpha > 0$, $\beta > \alpha$.

Atunci dacă $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 0$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} |b_n| = \infty$.

Fie într-adevăr $\varepsilon > 0$. Din faptul că $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 0$ rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_n|}{|b_n|} = 0$ şi deci $(\exists)\ N\left(\dfrac{\alpha}{\varepsilon}\right) = N$, astfel încît $(\forall)\ n \geq N$ să avem $\dfrac{|a_n|}{|b_n|} < \dfrac{\alpha}{\varepsilon}$. Dar $|a_n| > \alpha$, deci $\dfrac{\alpha}{|b_n|} < \dfrac{|a_n|}{|b_n|} < \dfrac{\alpha}{\varepsilon}$ de unde rezultă că $\dfrac{\alpha}{|b_n|} < \dfrac{\alpha}{\varepsilon}$, deci $|b_n| > \varepsilon$, $(\forall)\ n \geq N$.

Cum $\varepsilon > 0$ a fost ales arbitrar, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} |b_n| = \infty$.

A 64. *Se consideră un şir* $(x_n)_{n\in N}$ *de numere reale astfel încît, pentru orice* n, *are loc relaţia*

$$x_{n+2} = \frac{x_n + x_{n+1}}{2}.$$

***Să se** arate că dacă* $x_1 \leq x_2$, *atunci:*

a) *Şirul* $(x_{2n+1})_{n\in N}$ *este crescător, iar şirul* $(x_{2n})_{n\in N}$ *este descrescător;*

b) *Pentru orice* n *are loc relaţia* $|x_{n+2} - x_{n+1}| = \dfrac{|x_2 - x_1|}{2^n}$;

c) *Pentru orice* n *are loc relaţia* $2x_{n+2} + x_{n+1} = 2x_2 + x_1$;

d) *Să se deducă că şirul* $(x_n)_{n\in N}$ *este convergent şi are limita egală cu* $\dfrac{x_1 + 2x_2}{3}$.

Universitatea din Bucureşti, 1976

Soluţie. a) Se arată prin inducţie după n, că $x_{2n-1} \leq x_{2n}$, $(\forall)\ n \geq 1$. Într-adevăr, avem $x_1 \leq x_2$. Să presupunem că $x_{2k-1} \leq x_{2k}$.

Avem de arătat că $x_{2k+1} \leq x_{2k-2}$ Dar, $x_{2k+1} \leq x_{2k+2} \Leftrightarrow \dfrac{x_{2k} + x_{2k-1}}{2} \leq \dfrac{x_{2k+1} + x_{2k}}{2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{x_{2k} + x_{2k-1}}{2} \leq \frac{\dfrac{x_{2k} + x_{2k-1}}{2} + x_{2k}}{2} \Leftrightarrow 2x_{2k} + 2x_{2k-1} \leq x_{2k} + x_{2k-1} + 2x_{2k} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x_{2k-1} \leq x_{2k}$, care prin ipoteza inducţiei este adevărată. Acum vom arăta că $(x_{2n+1})_{n\in N}$ este crescător.

Avem: $x_{2k+1} = \frac{x_{2k} + x_{2k-1}}{2} \geqslant \frac{x_{2k-1} + x_{2k-1}}{2} = x_{2k-1}$, inegalitatea avînd loc conform observației precedente, unde am arătat că $x_{2n-1} \leqslant x_{2n}$, $(\forall)\, n \geqslant 1$.

De asemenea, șirul $(x_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ este descrescător. Avem:

$$x_{2k} = \frac{x_{2k-1} + x_{2k-2}}{2} \leqslant \frac{x_{2k} + x_{2k-2}}{2} \Leftrightarrow 2x_{2k} \leqslant x_{2k} + x_{2k-2} \Leftrightarrow x_{2k} \leqslant x_{2k-2}.$$

b) Prin inducție după n.

Din $x_3 = \frac{x_2 + x_1}{2}$ rezultă $x_3 - x_2 = \frac{x_2 + x_1}{2} - x_2$ sau $x_3 - x_2 = \frac{x_1 - x_2}{2}$, deci $|x_3 - x_2| = \frac{|x_2 - x_1|}{2}$.

Presupunem că $|x_k - x_{k-1}| = \frac{|x_2 - x_1|}{2^{k-2}}$. Atunci din $x_{k+1} = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}$ rezultă că $x_{k+1} - x_k = \frac{x_{k-1} - x_k}{2}$ sau $|x_{k+1} - x_k| = \frac{|x_k - x_{k-1}|}{2} = \frac{|x_2 - x_1|}{2^{k-1}}$, conform ipotezei de inducție.

c) Aplicăm relația din ipoteză de n ori consecutiv și obținem $2x_{n+2} + x_{n+1} = 2x_{n+1} + x_n = 2x_n + x_{n-1} = \ldots = 2x_2 + x_1$.

d) Aplicînd relația de la punctul c) avem

$$2x_{n+2} + x_{n+1} = 2x_2 + x_1 \Leftrightarrow 2(x_{n+2} - x_{n+1}) + 3x_{n+1} = 2x_2 + x_1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x_{n+2} = 2x_2 + x_1 - 2(x_{n+2} - x_{n-1}) \Leftrightarrow x_{n+1} = \frac{2x_2 + x_1}{3} - \frac{2(x_{n+2} - x_{n+1})}{3}. \quad (1)$$

Dar, conform punctului b), $|x_{n+2} - x_{n+1}| = \frac{|x_2 - x_1|}{2^n} \xrightarrow{n} 0$, deci șirul $(x_{n+2} - x_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ este convergent la zero. Trecînd la limită după n în relația (1) obținem

$$\lim_{n \to \infty} x_{n+1} = \frac{2x_2 + x_1}{3}.$$

A 65. *Se consideră funcția reală f definită pe intervalul $I = (0, \infty)$ prin relația $f(x) = e^{-x} \sin x$.*

Să se arate că oricare ar fi $x \in I$ avem $|f(x)| < 1$, $|f'(x)| < \sqrt{2}$, $|f''(x)| < 2$ și să se verifice că abscisele punctelor de maxim ale lui f în intervalul I se află în progresie aritmetică, iar ordonatele corespunzătoare acestor puncte în progresie geometrică.

Institutul Politehnic din București, 1976

Soluție. Avem $|f(x)| = |e^{-x} \sin x| = |e^{-x}| \cdot |\sin x| \leqslant |e^{-x}|$, deoarece $|\sin x| \leqslant 1$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$. Însă deoarece $|e^{-x}| = e^{-x} = \frac{1}{e^x}$, iar $e^x > 1$, $(\forall) x \in (0, \infty)$, rezultă că $|e^{-x}| < 1$, $(\forall) x \in (0, \infty)$. În concluzie $|f(x)| < 1$, $(\forall) x \in (0, \infty)$. Avem

$$f'(x) = -e^{-x} \sin x + e^{-x} \cos x = e^{-x} (\cos x - \sin x) =$$

$$= e^{-x} \left[\cos x - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right] = 2 e^{-x} \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \sin \frac{\pi}{4} =$$

$$= \sqrt{2}\, e^{-x} \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right). \text{ Deci,}$$

$$|f'(x)| = \sqrt{2}\, e^{-x} \left|\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right| \leqslant \sqrt{2}\, e^{-x} < \sqrt{2}. \text{ În concluzie, } |f'(x)| < \sqrt{2}.$$

Apoi $f''(x) = -2e^{-x} \sin x$, deci $|f''(x)| = 2 e^{-x} |\sin x| < 2$.

Din prima parte a demonstrației rezultă că $f'(x) = 0$ este echivalent cu $\sqrt{2}\, e^{-x} \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 0$ sau $\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 0$ sau, deoarece $x > 0$, rezultă $\frac{\pi}{4} - x = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}_-$ sau $x = \frac{\pi}{4} - k\pi$, $k \in \mathbf{Z}_-$, sau $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbf{N}^*$. Din studiul semnului funcției f' rezultă că punctele de maxim ale funcției f sînt de abscise $x_k = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{N}^*$, valori care evident sînt în progresie aritmetică cu $x_0 = \frac{\pi}{4}$ și rația $r = 2\pi$. Prin calcul rezultă că $y_k = f(x_k) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{\pi}{4} + 2k\pi}$, $k \in \mathbf{N}^*$, acestea fiind ordonatele punctelor de maxim ale funcției f. Se observă ușor că $f(x_k) \cdot f(x_{k+2}) = f^2(x_{k+1})$, $(\forall)\ k \in \mathbf{N}^*$, deci valorile $\{y_k \mid k \in \mathbf{N}^*\}$ alcătuiesc o progresie geometrică.

A 66. *Să se calculeze* $\lim\limits_{n \to \infty} n^k \left(\sqrt{\frac{n}{n+1}} - \sqrt{\frac{n+2}{n+3}}\right)$, $k \in \mathbf{N}$.

Universitatea din București, Facultatea de Matematică, 1983

Soluție. $n^k\left(\sqrt{\frac{n}{n+1}}-\sqrt{\frac{n+2}{n+3}}\right)=n^k\cdot\frac{\frac{n}{n+1}-\frac{n+2}{n+3}}{\sqrt{\frac{n}{n+1}}+\sqrt{\frac{n+2}{n+3}}}=$

$$=-\frac{2n^k}{\left(\sqrt{\frac{n}{n+1}}+\sqrt{\frac{n+2}{n+3}}\right)(n+1)(n+3)}=$$

$$=-\frac{2}{\sqrt{\frac{n}{n+1}}+\sqrt{\frac{n+2}{n+3}}}\cdot\frac{n^k}{(n+1)(n+3)}.$$

Dar $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{\frac{n}{n+1}}+\sqrt{\frac{n+2}{n+3}}\right)=2$. Pe de altă parte, avem

$$\lim_{n\to\infty}\frac{^kn}{(n+1)(n+3)}=\begin{cases}0 & \text{dacă } k\in\{0,\ 1\},\\ 1 & \text{dacă } k=2,\\ \infty & \text{dacă } k>2.\end{cases}$$

Deci $\lim\limits_{n\to\infty}n^k\left(\sqrt{\frac{n}{n+1}}-\sqrt{\frac{n+2}{n+3}}\right)=\begin{cases}0 & \text{dacă } k\in\{0,\ 1\},\\ -1 & \text{dacă } k=2,\\ -\infty & \text{dacă } k>2.\end{cases}$

Observăm că problema are sens pentru $k\in\mathbf{R}$, obținîndu-se drept limită (cu același raționament) tot 0, respectiv -1, respectiv $-\infty$ după cum $k<2$, $k=2$, $k>2$,

A 67. *Fie* $f:[0,\ \infty]\to\mathbf{R}$, *definită prin* $f(x)=x$, *dacă* $0\leqslant x\leqslant 1$, $f(x)=x-1$, *dacă* $1<x<\infty$. *Să se calculez*

$$\int_0^1\frac{f(e^t)}{f(e^{-t})}\,dt.$$

Universitatea din București, Facultatea de Matematică, 1983

Soluție. Dacă $t\in[0,\ 1]$ atunci $e^t\geqslant 1$, cu egalitate cînd $t=0$ și $0<e^{-t}\leqslant 1$, cu egalitate pentru $t=0$.

Deci, $f(e^t)=\begin{cases}e^t-1, & t\in(0,\ 1]\\ 1, & t=0\end{cases}$, iar $f(e^{-t})=e^{-t}$ Atunci $\frac{f(e^t)}{f(e^{-t})}=\begin{cases}e^t-1/e^{-t}, & t\in(0,1)\\ 1, & t=0\end{cases}$

care are aceeași integrală pe [0,1] ca și funcția continuă $u(t)=e^t-1/e^{-t}$

Rezultă $\int_0^1\frac{f(e^t)}{f(e^{-t})}\,dt=\int_0^1\frac{e^t-1}{e^{-t}}\,dt=\int_0^1(e^{2t}-e^t)\,dt.$

Considerăm funcția $\varphi(t) = e^t$, $\varphi: [0,1] \to [1, e]$ și funcția $g(x) = x - 1$, $g: [1, e] \to \mathbf{R}$. Atunci, $(g \circ \varphi)(t) \cdot \varphi'(t) = e^{2t} - e^t$, deci o primitivă pentru funcția $h(t) = e^{2t} - e^t$, este dată de $F \circ \varphi$, unde F este o primitivă pentru g, fie $F(x) = \frac{x^2}{2} - x$.

Rezultă $(F \circ \varphi)(t) = \frac{e^{2t}}{2} - e^t$, deci,

$$\int_0^1 (e^{2t} - e^t)\, dt = (F \circ \varphi)(1) - (F \circ \varphi)(0) = \frac{e^2}{2} - e - \frac{1}{2} + 1 =$$

$$= \frac{e^2}{2} - e + \frac{1}{2}.$$

În concluzie, $\int_0^1 \frac{f(e^t)}{f(e^{-t})}\, dt = \frac{e^2}{2} - e + \frac{1}{2}$.

A 68. *Fie* $f: [0, \infty) \to \mathbf{R}$ *o funcție derivabilă astfel încît* $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$ *și fie* $a > 0$ *un număr fixat. Aplicînd teorema lui Lagrange funcției* f *pe feicare interval* $[a + n, a + n + 1]$, $n \geqslant 0$ *fiind întreg, să se arate că există un șir* $x_n \to \infty$ *astfel încît* $\lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} f'(x_k) = -f(a)$.

Institutul Politehnic din București, 1980

Soluție. Se alege x_n ca fiind unul din punctele ce aparțin intervalului $(a + n, a + n + 1)$ astfel încît să verifice formula lui Lagrange: $f'(x_n) = \frac{f(a+n+1) - f(a+n)}{a + n + 1 - a - n} = f(a + n + 1) - f(a + n)$. Atunci $\sum_{k=0}^{n} f'(x_k) =$
$= [f(a+1) - f(a)] + [f(a+2) - f(a+1) + \ldots + [f(a+n) - f(a-n-1)] +$
$+ [f(a+n+1) - f(a+n)] = f(a+n+1) - f(a)$.

Dar $\lim_{n \to \infty} f(a + n + 1) = 0$, conform ipotezei, deci,

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} f'(x_k) = \lim_{n \to \infty} [f(a + n + 1) - f(a)] = -f(a).$$

În plus, din $a + n < x_n < a + n + 1$. $(\forall) n \in \mathbf{N}$, rezultă că $\lim_{n \to \infty} x_n \geqslant \lim_{n \to \infty} (a + n) = \infty$, deci $x_n \to \infty$.

A 69. *Să se arate că seria*

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \sum_{n \geqslant 1} \frac{2^n}{n[(-1)^n + 1]\, n! + [(-1)^n - 1]\, 2}$$

este convergentă și să se calculeze suma ei.

Universitatea din București, 1982

Soluție. Fie a_n termenul general al seriei noastre care devine $\frac{1}{\sqrt{2}} + \sum_{n\geqslant 1} a_n$.

Dacă n este par, $n = 2m$, $m \geqslant 1$, avem $a_{2m} = \frac{(\sqrt{2})^{2m}}{2 \cdot (2m)!}$.

Dacă n este impar, $n = 2m - 1$, $m \geqslant 1$, avem $a_{2m-1} = -\frac{1}{\sqrt{2} \cdot 2^m}$.

Suma parțială de ordin $n = 2m$, $m \geqslant 1$ este

$$S_{2m} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \sum_{i=1}^{2m} a_i = \frac{1}{\sqrt{2}} + \sum_{k=1}^{m} a_{2k} + \sum_{k=1}^{m} a_{2k-1} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} + \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2} \cdot \frac{(\sqrt{2})^{2k}}{(2k)!} - \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k. \tag{1}$$

Se știe că pentru orice x real avem $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Aceasta înseamnă că șirul $u_k = \sum_{n=0}^{k} \frac{x^n}{n!}$ are limita e^x.

Punînd $-x$ în loc de x, obținem că șirul $v_k = \sum_{n=0}^{k} \frac{(-x)^n}{n!}$ are limita e^{-x}.

Înseamnă că șirul $u_k + v_k$ are limita $e^x + e^{-x}$.
Avem însă:

$$u_{2m} + v_{2m} = \sum_{k=0}^{m} 2 \cdot \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 2 + 2 \cdot \sum_{k=1}^{m} \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

Pentru $x = \sqrt{2}$ se va obține

$$2 + 2\sum_{k=1}^{m} \frac{(\sqrt{2})^{2k}}{(2k)!} \xrightarrow{m} e^{\sqrt{2}} + e^{-\sqrt{2}}, \text{ de unde}$$

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2} \cdot \frac{(\sqrt{2})^{2k}}{(2k)!} \xrightarrow{m} \frac{1}{2}\left(\frac{e^{\sqrt{2}} + e^{-\sqrt{2}}}{2} - 1\right). \tag{2}$$

Se știe de asemenea că pentru orice $y \in (-1, 1)$ avem $\frac{1}{1-y} = \sum_{n=0}^{\infty} y^n$.

Cu alte cuvinte, șirul $w = \sum_{n=0}^{k} y^n \xrightarrow{k} \frac{1}{1-y}$.

În cazul nostru, luăm $y = \frac{1}{2}$ și obținem că $\sum_{k=0}^{m} \left(\frac{1}{2}\right)^k \xrightarrow{m} 2$.

Atunci $$\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k \xrightarrow{m} \frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{3}$$

Din (1), (2), şi (3) rezultă că

$$S_{2m} \xrightarrow{m} \frac{1}{2}\left(\frac{e^{\sqrt{2}}+e^{-\sqrt{2}}}{2} - 1\right). \tag{4}$$

Suma parţială de ordin $2m + 1$ a seriei noastre este:

$$S_{2m+1} = S_{2m} + a_{2m+1} = S_{2m} - \frac{1}{\sqrt{2} \cdot 2^{m+1}}.$$

Rezultă din (4):

$$S_{2m+1} \xrightarrow{m} \frac{1}{2}\left(\frac{e^{\sqrt{2}} + e^{-\sqrt{2}}}{2} - 1\right). \tag{5}$$

Din (4) şi (5) rezultă că şirul sumelor parţiale ale seriei din enunţ este convergent avînd limita

$$\frac{1}{2}\left(\frac{e^{\sqrt{2}}+e^{-\sqrt{2}}}{2} - 1\right) = \frac{1}{2}(\operatorname{ch}\sqrt{2} - 1).$$

Deci seria este convergentă şi are suma $\frac{1}{2}(\operatorname{ch}\sqrt{2} - 1)$.

Observaţie. Ultimul argument folosit în demonstraţie se poate formula astfel: fiind dat un şir $(x_n)_{n\geqslant 0}$ cu proprietatea că există două subşiruri $(y_{k_n})_{n\geqslant 0}$ şi $(z_{p_n})_{n\geqslant 0}$ astfel încît:

i) $y_{k_n} \xrightarrow{n} l$, $z_{p_n} \xrightarrow{n} l$, $l \in \overline{\mathbf{R}}$;

ii) $\{x_n \mid n \in \mathbf{N}\} = \{y_{k_n} \mid n \in \mathbf{N}\} \cup \{z_{p_n} \mid n \in \mathbf{N}\}$,

atunci şirul $(x_n)_{n\geqslant 0}$ este convergent şi în plus, $x_n \xrightarrow{n} l$. O demonstraţie pentru această afirmaţie este următoarea:

Fie $V \in \mathcal{V}_{\overline{\mathbf{R}}}(l)$ o vecinătate arbitrară a lui l în $\overline{\mathbf{R}}$.
Atunci din i) rezultă că: $(\exists)\ n'_V \in \mathbf{N}$, cu proprietatea că $(\forall)\ n \geqslant n'_V$, avem $y_{k_n} \in V$ şi $(\exists)\ n''_V \in \mathbf{N}$ cu proprietatea că $(\forall)\ n \geqslant n''_V$, avem $z_{p_n} \in V$. Dacă considerăm $n_V = \max\{n'_V, n''_V\}$, rezultă că pentru $(\forall)\ n \geqslant n_V$, avem $y_{k_n} \in V$, $z_{p_n} \in V$, cu alte cuvinte în afara unui număr finit de termeni y_{k_j}, z_{p_j}, restul termenilor aparţin lui V. Aplicînd ii) rezultă că există un rang N_V astfel încît $(\forall)\ n \geqslant N_V$, avem $x_n \in V$.
Cum vecinătatea V a fost considerată arbitrară, rezultă că şirul $(x_n)_{n\geqslant 0}$ este convergent şi că $x_n \xrightarrow{n} l$.

A 70. *Pentru ce valori ale numărului natural n există limita*

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{x\cos x-\sin x}{x^n}\ ?$$

Universitatea din București, 1982

Soluție. Pentru $x=0$ putem scrie.

$$\frac{x\cos x-\sin x}{x^n}=\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}\cdot\frac{1}{x^{n-3}}.$$

Folosind teorema lui l'Hospital rezultă

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{\sin x}{3x}\right)=-\frac{1}{3}.$$

Atunci pentru $n<3$, vom avea $n-3<0$, deci $\frac{1}{x^{n-3}}\longrightarrow 0$, dacă $x\longrightarrow 0$ și **limita dată** există fiind nulă.

Pentru $n>3$, distingem două cazuri:

— **dacă** n **este par,** atu ci $n-3$ **este** număr natural impar și $\frac{1}{x^{n-3}}$ **nu are limită cînd** $x\longrightarrow 0$ (are limite laterale infinite și diferite).

— **dacă** n **este impar,** $\frac{1}{x^{n-3}}\longrightarrow+\infty$, pentru $x\longrightarrow 0$, deoarece $n-3$ **este număr par.**

În concluzie, pentru $n<3$ limita dată este zero. Pentru $n=3$ limita este $-\frac{1}{3}$. Pentru $n>3$, n **impar,** limita este $-\infty$, iar pentru $n>3$, n **par,** limita nu există.

A 71. *Să se studieze derivabilitatea funcției $|f|$ definită prin $|f|(x)=|f(x)|$, pentru $x\in\mathbf{R}$, știind că funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ este derivabilă în orice punct din* **R**. *Aplicații la funcția dată prin $f(x)=\cos x$, $x\in\mathbf{R}$.*

Universitatea din București, Facultatea de Matematică, 1982

Soluție. Facem observația că pentru $a\in\mathbf{R}$, cu $f(a)\neq 0$, funcția $|f|$ este derivabilă în a, deoarece din continuitatea funcției f rezultă că pe o întreagă vecinătate a punctului a funcția f are semn constant; avem atunci pe această vecinătate (de exemplu să presupunem $f(a)>0$), $|f(x)|=-f(x)$ și deoarece funcția $-f$ este derivabilă, iar derivabilitatea este o propietate locală, rezultă că funcția $|f|$ este derivabilă în a.

Să presupunem acum că $a \in \mathbf{R}$ cu $f(a) = 0$. Atunci: $|f|$ este derivabilă în $a \Leftrightarrow f'(a) = 0$. Vom demonstra această echivalență.

Implicația „$\Rightarrow$".

Din $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{x - a}$, folosind definiția limitei rezultă că există o vecinătate $V = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ a lui a astfel încît pentru orice $x \in V$, $x \neq a$, $\dfrac{f(x)}{x - a} > 0$. Luînd $x > a$, $x \in V$ rezultă $f(x) > 0$, deci există

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} \frac{|f|(x) - |f|(a)}{x - a} = \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} \frac{f(x)}{x - a} = f'(a).$$

Luînd $x < a$, $x \in V$ și procedînd analog rezultă că există

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} \frac{|f|(x) - |f|(a)}{x - a} = -f'(a).$$

Din ipoteză $|f|$ este derivabilă, deci cu necesitate va trebui ca $f'(a) = -f'(a)$, adică $f'(a) = 0$.

Implicația „$\Leftarrow$" Pentru orice $x \neq a$ putem scrie:

$$\left| \frac{|f|(x) - |f|(a)}{x - a} \right| = \frac{||f(x)| - |f(a)||}{|x - a|} \leqslant \frac{|f(x) - f(a)|}{|x - a|} =$$

$$= \left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right|.$$

Ultimul raport, din ipoteză, tinde la $|f'(a)| = 0$ deci și primul raport tinde la 0, adică există derivata lui $|f|$ în punctul a și este nulă. Considerînd cazul funcției $f(x) = \cos x$, pentru punctele x pentru care $\cos x \neq 0$ funcția $|f|$ este derivabilă.

Fie $x \in \mathbf{R}$ cu $f(x) = 0$, adică $\cos x = 0$. Atunci $f'(x) \neq 0$, (mai exact pentru $x = \dfrac{\pi}{2} + 2n\pi$ avem $f'(x) = -1$, iar pentru $x = \dfrac{\pi}{2} + (2n + 1)\pi$, avem $f'(x) = 1$), deci conform afirmației demonstrate mai sus, funcția $|f|$ nu este derivabilă în punctul x.

A 72. *Fie* $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *o funcție reală, continuă în* x_0 *și* $\mathbf{R}^+ = \{x \in \mathbf{R} \mid x > 0\}$ *mulțimea numerelor reale strict pozitive.*

a) *Să se arate că există o funcție* $I: \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ *depinzînd de* f *și* x_0 *astfel încît următoarea condiție să fie îndeplinită; Pentru orice* $\xi \in \mathbf{R}^+$ *avem* $|f(x_0 + h) - f(x_0)| > \xi$ *de îndată ce* $|h| > I(\xi)$.

b) *Este funcția I unic determinată (cu proprietatea de mai sus) de f și* x_0?

c) *Există funcții f și puncte* x_0 *pentru care funcția I este constantă?*

d) *Există funcții f și puncte* x_0 *pentru care funcția I este funcția identitate a lui* $\mathbf{R}^+$?

Universitatea din București, Facultatea de Matematică, 1975

Soluție. a) Definiția continuității funcției f în punctul x_0 se scrie: $(\forall)\,\xi > 0$, $(\exists)\ I(\xi) > 0$ astfel încît $|h| < I(\xi) \Rightarrow |f(x_0 + h) - f(x_0)| < \xi$ și existența funcției I este aprobată.

b) Funcția I nu este unică. Într-adevăr, dacă pentru funcția f și punctul x_0 există funcția I cu proprietatea din enunț, atunci și funcția $I_1 : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$, $I_1(\xi) = \dfrac{1}{2}\, I(\xi)$ verifică proprietatea din enunț.

c) Să luăm funcția constantă $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = k$ și un punct oarecare $x_0 \in \mathbf{R}$. Atunci I poate fi orice funcție constantă (pozitivă). Într-adevăr, dacă $I(\xi) = c > 0$ avem:

$$|h| < c = I(\xi) \Rightarrow |f(x_0 + h) - f(x_0)| = |k - k| = 0 < \xi,$$

pentru fiecare $\xi > 0$.

d) Dacă luăm $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x$ și $x_0 \in \mathbf{R}$ arbitrar, putem lua I: $\mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$, $I(\xi) = \xi$. Într-adevăr, pentru $\xi > 0$ avem:

$$|h| < \xi = I(\xi) \Rightarrow |f(x_0 + h) - f(x_0)| = |x_0 + h - x_0| = |h| < \xi.$$

A 73. *Să se arate că curbele* $y = \sin^n x$ *(n număr natural* $\geqslant 2$*) au cîte un punct de inflexiune* $N_n(x_n, y_n)$ *în intervalul* $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$. *Să se calculeze* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ *și* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

Institutul Politehnic din Cluj-Napoca, 1976

Soluție. $y' = n \sin^{n-1} x \cos x$; $y'' = n\,[(n-1)\sin^{n-2} x \cos^2 x - \sin^n x] = n \sin^{n-2} x\,[(n-1)\cos^2 x - \sin^2 x] = n \sin^{n-2} x (n \cos^2 x - 1)$.

Rezultă că $x_n = \arccos \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ este rădăcină pentru y'' în intervalul $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, iar derivata y'' are semne contrare în jurul acestui punct, deci x_n este punct de inflexiune pentru y.

Avem $y_n = y(x_n) = \left[\sin\left(\arccos \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)\right]^n = \left(\sqrt{1 - \dfrac{1}{n}}\right)^n = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}$. Deci, $N_n\left(\arccos \dfrac{1}{\sqrt{n}},\ \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}\right)$. Rezultă ușor $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{\pi}{2}$ și $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = e^{-\frac{1}{2}}$.

A 74. *Fie* $x_1 \leqslant x_2$ *rădăcinile ecuației* $x^2 - (1 - m^2)\, x - m^2 = 0$. *Să se arate că pentru orice* $m \in \mathbf{R}$, *rădăcinile ecuației date sînt reale și este verificată inegalitatea* $f(x_1) \geqslant f(x_2)$, *unde* $f(x) = e^{x^3 - x}$.

Institutul Politehnic din Cluj-Napoca, 1976

Soluție. Discriminantul este $\Delta = (1 + m^2)^2 > 0$. Rezolvînd ecuația se obține: $x_1 = -m^2$, $x_2 = 1$.
Avem $f(x_1) = f(-m^2) = e^{m^2 + m^4} \geqslant e^0 = f(1) = f(x_2)$.

A 75. *Fie* $f\colon [0, 1] \to [0, 1] \cup [2, 3]$ *o funcție continuă astfel încît* $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$. *Să se arate că:*

a) *f nu este surjectivă;*

b) *f nu este strict crescătoare;*

c) *f nu este injectivă.*

Universitatea din București, Facultatea de Matematică, 1977

Soluție. a) Fiind continuă, f are proprietatea lui Darboux; deci $f([0, 1]) = I$, unde I este un interval. Deoarece $f\left(\frac{1}{2}\right) \in [0, 1]$ rezultă că $I \subseteq [0, 1]$, deci f nu poate fi surjectivă deoarece codomeniul mai conține și intervalul $[2, 3]$ unde nu există valori ale lui f.

b) Dacă f ar fi strict crescătoare ar rezulta că $0 = f\left(\frac{1}{2}\right) > f(0)$. Dar f nu ia valori negative, contradicție.

c) Fie, prin absurd, f injectivă și fie $0 \leqslant x_1 < \frac{1}{2} < x_2 \leqslant 1$, iar $a = \min(f(x_1), f(x_2)) > 0$ $\left(\text{deoarece } f\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \text{ și } f \text{ este injectivă}\right)$. Cum f are proprietatea lui Darboux pe $\left[x_1, \frac{1}{2}\right]$ rezultă că există $y_1 \in \left(x_1, \frac{1}{2}\right)$ cu $f(y_1) = \frac{a}{2}$. Analog se găsește că există $y_2 \in \left(\frac{1}{2}, x_2\right)$ cu $f(y_2) = \frac{a}{2}$. Deci $f(y_1) = f(y_2)$ și $y_1 \neq y_2$, contradicție.

A 76. 1. *Fie ecuația* $(\sin x + \cos x) \sin 2x = \sqrt{2}a$, *unde a este un parametru real. Să se arate că:*

a) *Dacă* $|a| > 1$ *ecuația nu are soluții.*

b) *Dacă* $|a| \leqslant 1$ *ecuația are soluții.*

2. *Să se rezolve ecuația dată cînd* $|a| = 1$.

Universitatea din București, 1976

Soluție. *1*. Ecuația dată poate fi scrisă sub forma $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right) \times$ $\times \sin 2x = a$ sau $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\sin 2x = a$. Dacă ecuația admite o soluție x_0 rezultă $a = \sin\left(x_0 + \frac{\pi}{4}\right)\sin 2x_0$. Deoarece $\left|\sin\left(x_0 + \frac{\pi}{4}\right)\sin 2x_0\right| \leqslant 1$ rezultă că dacă ecuația are soluții atunci $|a| \leqslant 1$. Reciproc să arătăm că dacă $|a| \leqslant 1$, deci $a \in [-1, 1]$, există un x_0 astfel ca funcția $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\sin 2x$ să ia valoarea a în punctul x_0. Observăm că pentru $x = \frac{\pi}{4}$ rezultă $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$, iar pentru $x = \frac{5\pi}{4}$ rezultă $f\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -1$. Dar f este continuă și din proprietatea lui Darboux rezultă că ia toate valorile din intervalul $[-1, 1]$, deci există x_0 astfel încît $f(x_0) = a$.

2. Ecuația dată se mai poate scrie astfel:

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\sin 2x = a. \tag{1}$$

Dar $|a| = 1 \Leftrightarrow a = \pm 1$.

a) Dacă $a = 1$, atunci (1) devine

$$\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\sin 2x = 1. \tag{2}$$

Cum $\left|\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right| \leqslant 1$, $|\sin 2x| \leqslant 1$, rezultă că relația (2) este echivalentă cu:

$$\text{(I)} \begin{cases} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \\ \sin 2x = 1 \end{cases} \quad \text{sau} \quad \text{(II)} \begin{cases} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -1 \\ \sin 2x = -1. \end{cases}$$

Mai departe:

$$\text{(I)} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \ k \in \mathbf{Z} \\ 2x = \frac{\pi}{2} + 2l\pi, \ l \in \mathbf{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \ k \in \mathbf{Z} \\ x = \frac{\pi}{4} + l\pi, \ l \in \mathbf{Z} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \ k \in \mathbf{Z}.$$

$$(II) \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \ k \in \mathbf{Z} \\ 2x = \frac{3\pi}{2} + 2l\pi, \ l \in \mathbf{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, \ k \in \mathbf{Z} \\ x = \frac{3\pi}{4} + l\pi, \ l \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Arătăm că $\left\{\frac{5\pi}{4} + 2k\pi \,\middle|\, k \in \mathbf{Z}\right\} \cap \left\{\frac{3\pi}{4} + l\pi \,\middle|\, l \in \mathbf{Z}\right\} = \emptyset$. Într-adevăr, fie $x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi = \frac{3\pi}{4} + l\pi \Rightarrow 1 + 4k = 2l$, absurd. Deci pentru $a = 1$ ecuația dată are numai soluțiile $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \ k \in \mathbf{Z}$.

b) Dacă $a = -1$, atunci (1) devine: $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \sin 2x = -1$ (2). Cu același argument ca la cazul a) rezultă că (2) este echivalentă cu:

$$(I) \begin{cases} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \\ \sin 2x = -1 \end{cases} \text{ sau } (II) \begin{cases} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -1 \\ \sin 2x = 1. \end{cases}$$

Mai departe.

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \ k \in \mathbf{Z} \\ 2x = \frac{3\pi}{2} + 2l\pi, \ l \in \mathbf{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, \ k \in \mathbf{Z} \\ x = \frac{3\pi}{4} + l\pi, \ l \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Intersecția acestor mulțimi este mulțimea vidă.

$$(II) \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \ k \in \mathbf{Z} \\ 2x = \frac{\pi}{2} + 2l\pi, \ l \in \mathbf{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, \ k \in \mathbf{Z} \\ x = \frac{\pi}{4} + l\pi, \ l \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Fie x un element din intersecția celor două mulțimi. Avem atunci: $x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi = \frac{\pi}{4} + l\pi \Leftrightarrow l = 2k + 1$. Deci, $x = \frac{\pi}{4} + (2k + 1)\pi, \ k \in \mathbf{Z}$

Deci pentru $a = -1$, ecuația dată are soluțiile $x = \frac{\pi}{4} + (2k + 1)\pi, \ k \in \mathbf{Z}$.

A 77. *Se consideră șirul cu termenul general:*

$$a_n = ln\,(1 + n) + a\,ln\,(2 + n) + b\,ln\,(3 + n),\ cu\ a,\ b \in \mathbf{R}.$$

a) *Să se determine relația dintre numerele a și b astfel încît șirul* $\{a_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ *să aibă limita zero.*

b) *Presupunînd că* $a + b + 1 = 0$, *să se determine a și b astfel încît șirul cu termenul general:*

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

să fie convergent și să i se afle limita.

Soluție. a) Termenul general al primului șir poate fi scris:

$$a_n = (1 + a + b)\ln n + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + a\ln\left(1 + \frac{2}{n}\right) + b\ln\left(1 + \frac{3}{n}\right).$$

Întrucît:

$$\lim_{n\to\infty} \ln n = +\infty,\ \lim_{n\to\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 0,\ \lim_{n\to\infty} \ln\left(1 + \frac{2}{n}\right) = 0$$

și

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{3}{n}\right) = 0,$$

pentru a avea $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ va trebui ca $1 + a + b = 0$.

b) Termenul general al celui de al doilea șir poate fi scris:

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} \ln(1 + k) + a\sum_{k=1}^{n} \ln(2 + k) + b\sum_{k=1}^{n} \ln(3 + k) = \sum_{k=2}^{n+1} \ln k +$$

$$+ a\sum_{k=3}^{n+2} \ln k + b\sum_{k=4}^{n+3} \ln k = \ln 2 + \ln 3 + a\ln 3 + a\ln(n + 2) +$$

$$+ b\ln(n + 2) + b\ln(n + 3) + (1 + a + b)\sum_{k=4}^{n+1} \ln k$$

și ținînd seamă de condiția $a + b + 1 = 0$ dată în ipoteza din enunț, b_n mai poate fi scris:

$$b_n = \ln 6 + a\ln 3 + (a + 2b)\ln n + (a + b)\ln\left(1 + \frac{2}{n}\right) +$$

$$+ b\,ln\left(1 + \frac{3}{n}\right).$$

Pentru ca șirul $\{b_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ să fie convergent, va trebui ca acesta să aibă limita finită, deci să fie, în plus, satisfăcută și condiția $a + 2b = 0$.

Cele două condiții impuse:

$$\begin{cases} a + b + 1 = 0 \\ a + 2b = 0 \end{cases}$$

conduc la soluția: $a = -2$ și $b = 1$, cu care termenul general al șirului poate fi scris:

$$b_n = \ln 6 - 2 \ln 3 - \ln\left(1 + \frac{2}{n}\right) + \ln\left(1 + \frac{3}{n}\right).$$

În acest caz, șirul este convergent și are limita $b = \ln\left(\frac{2}{3}\right)$.

Capitolul X

PROBLEME DE INFORMATICĂ ȘI MODELARE MATEMATICĂ (I)

Introducere

În planurile de învățămînt în vigoare figurează de mai mulți ani un grup de discipline sub titulatura de: *Matematici aplicate în tehnica de calcul*, care se adresează elevilor de la liceele de matematică-fizică și informatică. Această inițiativă trebuie extinsă și perfecționată, mai ales că au fost elaborate și publicate manuale din care nu lipsesc cele de informatică.

Societatea de Științe Matematice a introdus încă de acum cinci ani în G. M. cîte patru probleme de informatică în fiecare număr. În momentul de față se găsesc publicate peste 200 de astfel de probleme, dar de abia în ultimul an s-au primit soluții la cîteva din ele, deși prin caracterul lor sînt probleme de modelare informatică a unor probleme matematice. Se pare însă că în prezent interesul pentru astfel de probleme este într-o creștere semnificativ, elevii și studenții, ca și unii dintre profesori descoperind că ele pot fi atractive și chiar revelatoare.

Iată de ce, culegerea noastră a consacrat un capitol modelării informatice și matematice, avînd în vedere forța de investigație pe care aceste modelări, mai ales cînd sînt conjugate, o au în cele mai variate probleme aplicative, uneori chiar și teoretice ca în teoria numerelor.

Cele cîteva probleme de modelare informatică rezolvă probleme matematice. În acest scop strategia de rezolvare comportă metode matematice care conduc la algoritmi de rezolvare. Acestea sînt descrise ca în (I1) și apoi reprezentate prin scheme logice. Li se asociază un subprogram, al cărui text sursă

este scris în limbajul FORTRAN IV și însoțit de instrucțiuni de utilizare în care se dau parametrii formali. Un fapt important este precizarea ariei ocupate de programul obiect în memoria calculatorului, 158 cuvinte în problema (I1).

Tematica poate fi foarte variată, de exemplu în (I2) se dă o mulțime finită de puncte din plan și se cere să se determine dreptele frontierei acoperirii convexe a mulțimii. Metoda matematică este destul de laborioasă, întrucît elimină dreptele care nu aparțin frontierei, selecția făcîndu-se cu ajutorul unui cod de identificare a apartenenței la frontieră. Utilizatorii capătă și indicații de folosire a programului, întrucît se pot face și greșeli, dar mai ales se pot alege căi îndelungate, ca urmare a lipsei de experiență sau ingeniozitate.

Considerăm că aprofundarea acestor probleme este deosebit de instructivă pentru oricine, gîndirea algoritmică fiind adusă pe primul plan al actualității în toate problemele de modelare, unde se poate aplica modelarea informatică.

Modelarea matematică este reprezentată prin probleme de mecanică avînd un pronunțat caracter aplicativ. Este impresionant faptul că încă în 1913, G. M. publică sub semnătura lui *Gh. Em. Filipescu* o problemă de circulație pe o linie dublă de tramvai, în care apare un automobilist care vrea să facă o depășire. Întrebarea care se pune este dacă s-a întîmplat vreun accident în condițiile precizate prin enunț și în ipoteza că cel ce conduce automobilul dovedește cea mai mare abilitate, iar răspunsul este că accidentul poate fi evitat, iar autorul încheie cu observația că problema este în realitate mult mai complexă, deci că modelul său este simplificat.

O a doua problemă de mecanică modelează ascensiunile a doi gimnaști care urcă pe cele două părți ale unei frînghii, care trece peste un scripete, cerînd să se arate că ei nu se pot întrece unul pe celălalt. Problema (I10) este semnată de *Al. Stoienescu*, iar o a treia (I12) de *V. Vâlcovici*.

I 1. *Fie* $X = \{x_i\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$ *o mulțime de numere reale. Notăm cu* $a = \min_{1 \leqslant i \leqslant n} x_i$, $b = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} x_i$ *și împărțim intervalul* $[a, b]$ *în* m *intervale de lungime egală cu* $h = (b - a)/m$ *prin punctele de diviziune* $y_i = a + (i - 1)h$ *pentru* $1 \leqslant i \leqslant m + 1$:

$$[a, b] = \bigcup_{i=1}^{m} I_i$$

în care $I_1 = [y_1, y_2]$, $I_i = (y_i, y_{i+1}]$ *cu* $2 \leqslant i \leqslant m$.

Să se întocmească un subprogram care să calculeze probabilitățile p_i *de apartenență a unui punct* $x \in X$ *la fiecare interval* I_i.

Emil Perjeriu vol. LXXXV, 2/1980

Soluție. Se vor calcula întîi valorile extreme a și b ale mulțimii X, apoi pasul $h = (b - a)/n$. În continuare, se stabilesc marginile fiecărui inter-

val I_i: $y1 = a + (i - 1)h$, $y2 = y1 + h$[1] și se numără punctele $x \in X \cap I_i$, adică cele care satisfac dubla inegalitate: $y1 \leqslant x \leqslant y2$ dacă $i = 1$, respectiv $y1 < x \leqslant y2$ dacă $i \geqslant 2$. Frecvențele astfel obținute se împart la n, pentru a obține probabilitățile cerute p_i.

Descrierea algoritmului. Algoritmul de calcul care va furniza șirul probabilităților cerute, se va desfășura în următorii pași.

P a s u l 1: Se inițializează $A = B = X(1)$.

P a s u l 2: Cu o structură repetitivă de ciclare, după indicele I cu valori de la 1 pînă la N, se vor calcula valorile extreme a și b, notate cu A respectiv B, cu ajutorul funcțiilor AMIN1 și AMAX1 din biblioteca științifică a sistemului FELIX, funcții care sînt specializate în calculul valorii minime respectiv maxime dintre mai multe numere reale, prin utilizarea în ciclu ale următoarelor instrucțiuni de atribuire:

$$\text{A} = \text{AMIN1(A, X(I))}$$

$$\text{B} = \text{AMAX1(B, X(I))}$$

P a s u l 3: Se calculează pasul h prin atribuirea: $\text{H} = (\text{B} - \text{A})/\text{M}$.

P a s u l 4: Se vor inițializa cu 0 toate probabilitățile p_i, într-o structură repetitivă de ciclare după I cu valori de la 1 pînă la M, prin utilizarea în ciclu a atribuirii: P(I) = 0., după care valoarea inițială a primei probabilități se va actualiza cu 1, prin atribuirea: P(1) = P(1) + 1.

P a s u l 5: Cu o structură repetitivă de ciclare, după I cu valori de la 1 pînă la M, se vor calcula în interiorul ciclului marginile fiecărui interval al partiției prin atribuirile:

$$\text{Y1} = \text{A} + (\text{I} - 1) * \text{H}$$

$$\text{Y2} = \text{Y1} + \text{H}$$

urmate imediat de o altă structură repetitivă de ciclare, încuibărită în prima, după indicele J cu valori de la 1 pînă la N, în corpul căreia se supune testului de adevăr propoziția logică:

$$\text{PL: (Y1} \cdot \text{LT} \cdot \text{X(J))} \cdot \text{AND} \cdot \text{(X(J)} \cdot \text{LE} \cdot \text{Y2)}$$

— dacă PL ia valoarea de adevăr, atunci se execută atribuirea: P(I) = = P(I) + 1, pentru stabilirea frecvenței din intervalul indexat cu I, apoi se continuă ciclul după J;

— dacă PL este falsă, se continuă ciclul după J.

[1] reprezintă valoare scalară. A nu se confunda cu componenta y_1 a unei variabile indexate.

P a s u l 6. Cu o structură repetitivă de ciclare, după I cu valori de la 1 pînă la M, se vor calcula toate probabilităţile cerute, prin utilizarea în ciclu a instrucţiunii de atribuire: P(I) = P(I)/N.

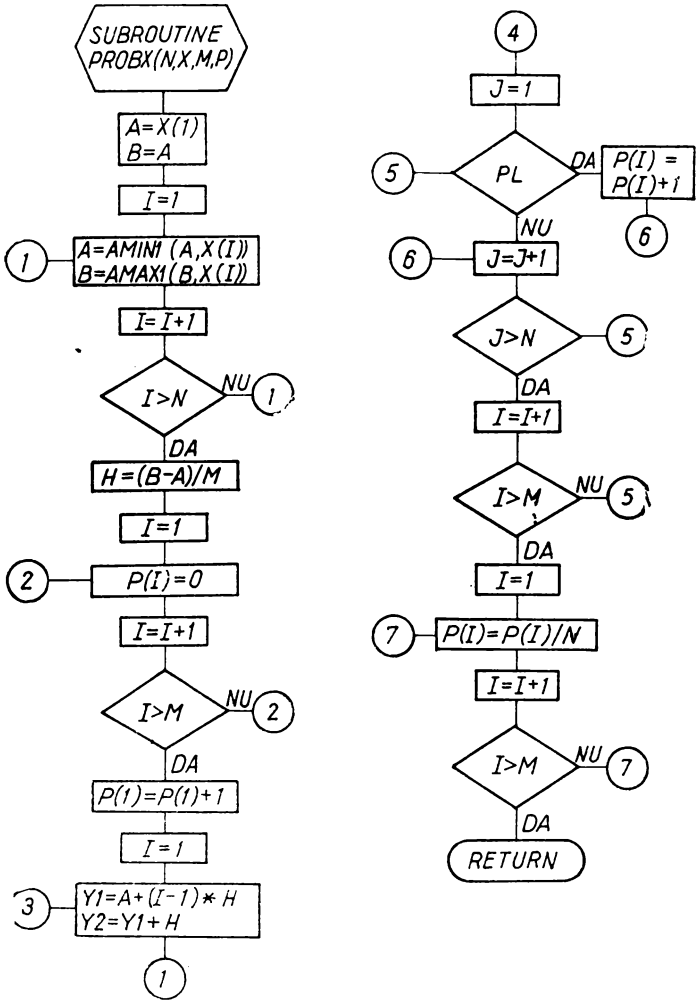


Fig. I.1.

Fie PROBX denumirea subprogramului care furnizează probabilităţile cerute în enunţ. *Schema logică* care descrie algoritmul de mai sus, este redată în fig. I 1.

Textul sursă al subprogramului PROBX, scris în limbajul de programare FORTRAN IV, este cel redat în modelul 1.a.

```
      SUBROUTINE PROBX(N,X,M,P)
      DIMENSION X(N),P(M)
      A=X(1)
      B=A
      DO 1 I=1,N
      A=AMIN1(A,X(I))
    1 B=AMAX1(B,X(I))
      H=(B-A)/M
      DO 2 I=1,M
    2 P(I)=0.
      P(1)=P(1)+1.
      DO 3 I=1,M
      Y1=A+(I-1)*H
      Y2=Y1+H
      DO 3 J=1,N
      IF((Y1.LT.X(J)).AND.(X(J).LE.Y2)) P(I)=P(I)+1
    3 CONTINUE
      DO 4 I=1,M
    4 P(I)=P(I)/N
      RETURN
      END
```

Modelul 1.a.

Utilizarea subprogramului:

CALL PROBX (N, X, M, P)

Parametrii formali sînt următorii:

N: numărul de elemente ale mulțimii X;

X: tablou de dimensiune N avînd drept componente elementele mulțimii X;

M: numărul de intervale egale în care se împarte segmentul [a, b];

P: tablou de dimensiune M avînd drept componente probabilitățile cerute.

Ocuparea memoriei: 158 cuvinte.

```
      DIMENSION X(100),P(10)
      READ(105,1) (X(I),I=1,100)
    1 FORMAT(16F5.1)
      WRITE(108,2) (X(I),I=1,100)
    2 FORMAT('0',5X,'SIRUL X'//('0',5X,10F6.1))
      CALL PROBX(100,X,10,P)
      WRITE(108,3) (P(I),I=1,10)
    3 FORMAT('0',5X,'SIRUL PROBABILITATILOR'/('0',5X,5F6.4))
      END
```

Modelul 1.b.

Textul sursă al programului principal de test l-am prezentat în modelul 1.b, iar rezultatele obținute la imprimantă în urma prelucrării, în modelul 1.c.

```
SIRUL X
   2.0    3.1    2.5   10.3   -4.6     .0     .5   -3.6    4.5  -14.0
   2.5   -7.3     .7    -.7    9.9   42.5  -34.3    1.8   -5.5   -2.6
  13.5   -4.3    8.9   -6.3   10.3   14.5  -31.3    1.7   -4.1    4.8
   6.3  -15.4    1.1    2.2    3.3    4.4    5.5    6.6    7.7    8.8
   0.9   -1.0   -2.0   -3.0   -4.0   -5.0   -6.0   -7.0   -8.0   -9.0
   1.5    2.5    3.5    4.5    6.5    7.5    8.5    9.5   -1.5   -2.5
  -3.5   -4.5   -6.5   -7.5   -8.5   -9.5   10.3   11.4   12.5   13.6
  14.7   15.8   16.9   18.0   19.1  -10.4  -11.5  -12.6  -13.7  -14.8
 -15.9  -17.0  -18.1  -19.2   10.1   11.2   12.3   13.4   14.5   15.6
  16.7   17.8   18.9   20.0  -10.2  -11.3  -12.4  -13.5  -14.6  -15.7
SIRUL PROBABILITATILOR
   .0400   .0100   .1400   .2000   .2500
   .2400   .1000   .0100   .0000   .0100
```

Modelul 1.c.

I 2. *Fie $M_i(x_i, y_i)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, o mulțime de puncte din plan. Să se întocmească un subprogram care să determine dreptele frontierei acoperirii convexe a acestor puncte. (O dreaptă d_{ij}, determinată de punctele M_i și M_j, aparține frontierei acoperirii convexe, dacă toate celelalte puncte ale mulțimii se află de aceeași parte a drepteei d_{ij}).*

Emil Perjeriu, G. M. vol. LXXXV 2/1980

Soluție. Fie $M_i(x_i, y_i)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, cele n puncte din plan date prin coordonatele lor carteziene și punctul $M_b(x_b, y_b)$ un baricentru la lor dat prin formulele:

$$x_b = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)/n, \quad y_b = \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)/n.$$

Funcție de un punct arbitrar din plan, $M(x, y)$, construim expresiile următoare:

$$d_{ij}(M) = d_{ij}(x, y) = A(x - x_i) + B(y - y_i) \tag{1}$$

în care $A = y_i - y_j$ și $B = x_i - x_i$, iar $d_{ij}(M) = 0$ reprezintă ecuația dreptei detefminate de punctele M_i și M_j;

$$d_{ikj}(M) = d_{ikj}(x, y) = B(x - x_k) - A(y - y_k) \tag{2}$$

în care A și B au semnificația de mai sus, iar $d_{ijk}(M) = 0$ reprezintă ecuația dreptei care conține punctul M_k și este perpendiculară pe dreapta d_{ij}.

O dreaptă d_{ij} va aparține frontierei acoperirii convexe a celor n puncte date, dacă:

— nu conține baricentrul M_b, adică: $d_{ij}(M_b) \neq 0$;

— fiecare punct M_k, diferit de M_i și M_j, se află:
fie de aceeași parte cu baricentrul față de dreapta d_{ij}, adică: $d_{ij}(M_b) \cdot d_{ij}(M_k) > 0$;
fie pe dreapta d_{ij}, situat între M_i și M_j, adică: $d_{ij}(M_k) = 0$ și $d_{ikj}(M_i) \cdot d_{ikj}(M_j) < 0$ (punctele M_i și M_j fiind deci separate de către perpendiculara d_{ikj}).

Testul de apartenență se va face prin eliminarea acelor drepte care nu aparțin frontierei acoperirii convexe, deci pentru cele care:
— conțin baricentrul M_b, adică: $d_{ij}(M_b) = 0$, sau:
— separă cel puțin un punct față de baricentru, adică: $d_{ij}(M_b) \cdot d_{ij}(M_k) < 0$, sau:
— conțin cel puțin un punct situat în afara segmentului $|M_iM_j|$, adică: $d_{ij}(M_k) = 0$ și $d_{ikj}(M_i) \cdot d_{ikj}(M_j) > 0$.

Selecția se va face cu ajutorul unui cod de identificare a apartenenței dreptei testate la frontieră, pe care îl vom denumi KOD și îi vom atribui valoarea 0 în cazul în care dreapta testată nu aparține frontierei, sau valoarea 1 dacă aceasta este dreaptă de frontieră.

Descrierea algoritmului. Algoritmul care va stabili dacă o dreaptă d_{ij} determinată de punctele M_i și M_j aparține sau nu frontierei, iar în cazul afirmativ va furniza și coeficienții ei, se va desfășura în următorii pași.

P a s u l 1: Pentru i și j dați, se vor calcula coeficienții A și B ai expresiei (1): $A = y_i - y_j$, $B = x_j - x_i$, apoi valoarea numerică a expresiei (1) pentru $M = M_b(x_b, y_b)$: $DB = A(x_b - x_i) + B(y_b - y_i)$.

P a s u l 2: Se supune testului valoarea obținută pentru DB:
— dacă $DB = 0$, atunci $M_b \in d_{ij}$, deci dreapta d_{ij} nu aparține frontierei; în acest caz, se atribuie codului valoarea 0 și se întoarce controlul din subprogram în programul apelant;
— dacă $DB \neq 0$, se va trece la pasul următor.

P a s u l 3: Cu o structură repetitivă de ciclare, după indicele K cu valori de la 1 pînă la N, se va calcula pentru fiecare $K \neq I$ și $K \neq J$ valoarea numerică a expresiei (1) pentru $M = M(x_k, y_k)$: $DK = A(x_k - x_i) + B(x_k - y_i)$ și se va supune testului semnul produsului DB . DK:
— dacă există cel puțin un indice K pentru care $DB \cdot DK < 0$, atunci dreapta d_{ij} nu aparține frontierei, deoarece ea separă punctele M_b și M_k; în acest caz se va ieși din ciclu, se va atribui codului valoarea 0 după care se va întoarce controlul din subprogram în programul apelant;
— dacă însă $DB \cdot DK \geqslant 0$, se va trece la pasul următor.

P a s u l 4: Se cercetează dacă $DK = 0$, deci cazul pentru care $M_k \in d_{ij}$; în acest scop, se vor calcula valorile numerice ale expresiei (2) pentru $M = M_i$ și $M = M_j$: $DI = B(x_i - x_k) - A(y_i - y_k)$ respectiv $DJ = B(x_j - x_k) - A(y_j - y_k)$, după care se va testa semnul produsului DI . DJ:
— dacă există cel puțin un indice K pentru care să avem $DI \cdot DJ > 0$, atunci dreapta d_{ij} nu aparține frontierei, deoarece punctul M_k este situat pe dreapta d_{ij} în exteriorul segmentului $|M_iM_j|$; în acest caz se va ieși din

ciclu, se va atribui de asemeni codului valoarea 0 după care se va întoarce controlul din subprogram în programul apelant;

— dacă însă $DI \cdot DJ < 0$, se va trece la pasul următor.

P a s u l 5: Se va realiza numai atunci cînd nu sînt îndeplinite condițiile impuse la pașii, 2, 3 și 4 pentru care s-a atribuit codului valoarea 0, adică atunci cînd sînt îndeplinite condițiile în care dreapta d_{ij} aparține frontierei acoperirii convexe a celor n puncte date; în acest caz, se va calcula termenul liber: $C = -A \cdot x_i - B \cdot y_i$ din ecuația dreptei $d_{ij}(M) = 0$ cu membrul stîng scris sub forma:

$$d_{ij}(M) = Ax + By + C \qquad (1')$$

se va atribui codului valoarea 1 apoi se va termina cu întoarcerea controlului în programul apelant.

Fie DFR denumirea subprogramului care are funcțiile descrise mai sus pentru selectarea dreptelor de frontieră ale acoperirii convexe cerute. *Schema logică* care descrie grafic algoritmul prezentat, este redată în fig. I2.

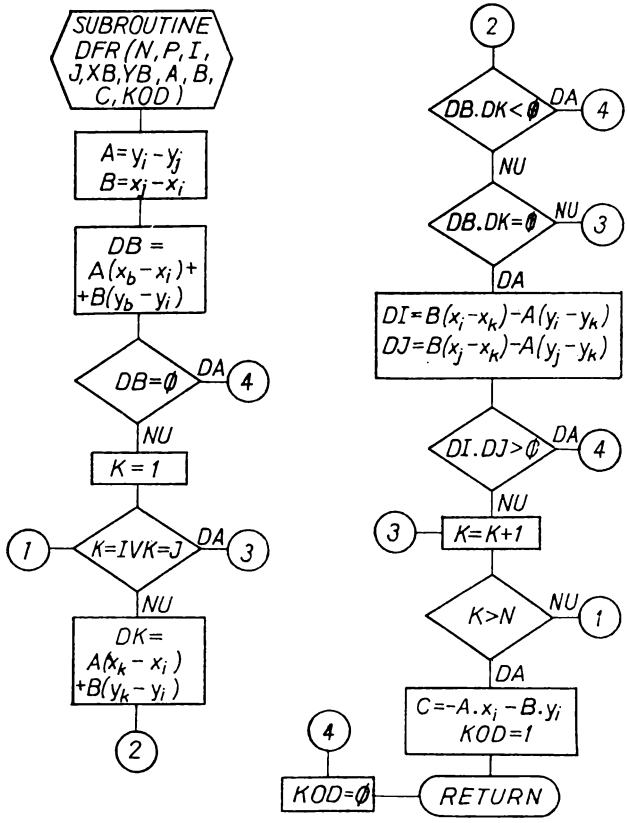


Fig. I.2-

Textul sursă al subprogramului DFR, scris în limbajul de programare FORTRAN IV, este cel redat în modelul 2.a.

Utilizarea subprogramului:

CALL DFR(N, P, I, J, XB, YB, A, B, C, KOD)

Parametrii formali, sînt următorii:

N: numărul de puncte date în plan;

P: tablou real de dimensiuni $N \times 2$, avînd aranjate, pe linii, coordonatele punctelor date astfel: $P(I, 1) = x_i$, $P(I, 2) = y_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$.;

I, J: indicii celor două puncte M_i și M_j care vor determina dreapta d_{ij} supusă textului de apartenență la frontiera acoperirii convexe;

XB, YB: coordonatele baricentrului celor n puncte din plan;

A, B, C: coeficienții din ecuația dreptei de frontieră $d_{ij}(M) = Ax + By + C = 0$;

KOD: cod de identificare a apartenenței;

KOD = 0 dacă dreapta d_{ij} nu aparține frontierei;

KOD = 1 dacă dreapta d_{ij} este dreaptă de frontiefă.

```
      SUBROUTINE DFR(N,P,I,J,XB,YB,A,B,C,KOD)
      DIMENSION P(N,2)
      A=P(I,2)-P(J,2)
      B=P(J,1)-P(I,1)
      DB=A*(XB-P(I,1))+B*(YB-P(I,2))
      IF(DB.EQ.0.) GO TO 3
      DO 2 K=1,N
      IF((K.EQ.I).OR.(K.EQ.J)) GO TO 2
      DK=A*(P(K,1)-P(I,1))+B*(P(K,2)-P(I,2))
      IF(DB*DK) 3,1,2
    1 DI=B*(P(I,1)-P(K,1))-A*(P(I,2)-P(K,2))
      DJ=B*(P(J,1)-P(K,1))-A*(P(J,2)-P(K,2))
      IF((DI*DJ).GT.0.) GO TO 3
    2 CONTINUE
      C=-A*P(I,1)-B*P(I,2)
      KOD=1
      RETURN
    3 KOD=0
      RETURN
      END
```

Modelul 2.a.

Ocuparea memoriei: 240 cuvinte.

```
      DIMENSION P(8,2)
      READ(105,1) P
    1 FORMAT(16F5.1)
      WRITE(108,2) P
    2 FORMAT(' ',5X,8F5.1/' ',5X,8F5.1)
      XB=0.
      YB=0.
      DO 3 I=1,8
      XB=XB+P(I,1)
    3 YB=YB+P(I,2)
      XB=XB/8
      YB=YB/8
      DO 4 I=1,7
      J1=I+1
      DO 4 J=J1,8
      CALL DFR(8,P,I,J,XB,YB,A,B,C,KOD)
      IF(KOD.EQ.0) GO TO 4
      WRITE(108,5)I,J,A,B,C
    5 FORMAT(' ',5X,'I=',I5,2X,'J=',I5,2X,'A=',F5.2,2X,'B=',F5.2,2X,
     .'C=',F5.2)
    4 CONTINUE
      END
```

Modelul 2.b.

Indicații pentru utilizatori. Coordonatele celor n puncte se vor introduce în matricea P, componentele primei coloane fiind ocupate de abscisele punctelor așezate în ordinea crescătoare a indicilor, iar componentele celei de a doua coloane de către ordonatele corespunzătoare.

În programul apelant, se va calcula baricentrul după formulele de medie aritmetică specificate în cadrul metodei matematice, sau dacă se cunoaște un punct interior acoperirii convexe, atunci acel punct poate fi luat ca un baricentru și folosit în calcule ca atare.

Pentru a determina dreptele frontierei, se vor testa toate dreptele determinate de perechi de puncte distincte, în număr de C_n^2, adică fiecare dreaptă d_{ij} cu $1 \leqslant i \leqslant n-1$ și $i+1 \leqslant j \leqslant n$.

După apelul subprogramului DFR se va testa mai întîi codul și numai în cazul în care KOD = 1 se vor lista coeficienții A, B și C ai dreptei de frontieră $d_{ij}(x, y) = 0$.

Textul sursă 1 unității de program de test l-am prezentat în modelul 2.b, iar rezultatele obținute la imprimantă în urma prelucrării, în modelul 2, c, coordonatele punctelor fiind listate pe coloane, iar pentru fiecare dreaptă de frontieră s au listat indicii I și J ai punctelor M_i respectiv M_j urmați de valorile A, B și C ale coeficienților dreptei d_{ij}.

```
  .0   2.0   4.0   4.0   4.0   2.0    .0    .0
  .0    .0    .0   1.0   2.0   2.0   2.0   1.0
I=  1  J=  5  A=   .00  B= 4.00  C=   .00
I=  1  J=  7  A=-2.00  B=  .00  C=   .00
I=  3  J=  5  A=-2.00  B=  .00  C= 8.00
I=  5  J=  7  A=  .00  B=-4.00  C= 8.00
```

Modelul 2.c.

I 3. *Fie m și n două numere naturale, care satisfac condițiilor* $1 \leqslant m \leqslant 2^{31}-1$, $1 \leqslant n \leqslant 2^{31}-1$.

Să se întocmească un subprogram pentru calculul celui mai mare divizor comun $d = (m, n)$ și al celui mai mic multiplu comun $mc = [m, n]$ ai celor două numere, introducînd un cod de selecție KOD prin care:

a) *dacă $mc \leqslant {}^{31} - 1$, atunci subprogramul să furnizeze d, mc și valoarea 0 pentru KOD;*

b) *dacă $mc > {}^{31} - 1$ atunci subprogramul să furnizeze d, $max(m, n)$, $min\ (m, n)/d$ și valoarea 1 pentru KOD.*

Emil Perjeriu vol. LXXXV 4/1980

Soluție. Fie m și n cele două numere date. Pentru a ne fixa ideile, presupunem $m \geqslant n$ (deoarece ori în ce ordine ar fi date numerele, ele se pot ordona descrescător), și notăm:

$$mc = [m, n],\ md = d = (m, n),\ nd = \boldsymbol{min}(m, n)/d = n/\boldsymbol{md},$$

$$ma = \boldsymbol{ma}x(m, n) = m,\ \boldsymbol{mi} = \boldsymbol{min}(m, n) = n.$$

Din $m \geqslant n$, rezultă $m = n \cdot q + r$, cu $1 \leqslant q \leqslant m$ și $0 \leqslant r < n$.
Dacă $r = 0$, atunci $md = n$; dacă însă $r \neq 0$, atunci:

$$md = (m, n) = (n \cdot q + r, n) = (n, r)$$

și cel mai mare divizor comun se calculează folosind algoritmul lui Euclid.

După aflarea acestuia, vom stabili printr-un test magnitudinea celui mai mic multiplu comun *mc*. Întrucît avem:

$$mc = [m, n] = (m \cdot n)/d = (n/md) \cdot m = nd \cdot ma$$

și:

$$2^{31} - 1 = nd \cdot kd + rd, \text{ cu } 0 \leqslant rd < nd,$$

va fi suficient să supunem testului de adevăr propoziția logică:

PL: $ma \leqslant kd$

— dacă PL ia valoarea de adevăr, atunci:

$$mc = ma \cdot nd \leqslant nd \cdot kd \leqslant 2^{31} - 1$$

și în acest caz valoarea lui *mc* poate fi calculată apoi memorată ca număr întreg;

— dacă PL este falsă, atunci din $ma > kd$ rezultă $ma \geqslant kd + 1$, deci:

$$mc = ma \cdot nd \geqslant nd \cdot kd + nd > nd \cdot kd + rd = 2^{31} - 1$$

caz în care nu se poate calcula nici memora valoarea lui *mc* (din cauza depășirii binare).

Descrierea algoritmului. Algoritmul de calcul care va furniza cel mai mare divizor comun, împreună cu celelalte rezultate cerute în enunț, se va desfășura în următorii pași.

Pasul 1: Se ordonează descrescător perechea de valori *m* și *n* date, apoi se atribuie valoarea maximă lui *ma* iar cealaltă lui *mi*.

Pasul 2: Se calculează restul *r* cu ajutorul funcției MOD din biblioteca științifică a sistemului FELIX, prin atribuirea:

IR = MOD (M,N)

Pasul 3: Se supune testului valoarea lui IR:

— dacă IR = 0, se trece la pasul 4;

— dacă IR ≠ 0, se execută atribuirile: M = N și N = IR, după care se reia pasul 2.

Pasul 4: Se atribuie variabilei MD valoarea actuală pe care o ia *N* după ultima parcurgere a pasului 3, apoi se calculează valorile *nd* și *kd*.

Pasul 5: Se supune testului propoziția logică PL:

— dacă PL ia valoarea de adevăr, se va trece la pasul 6;

— dacă PL este falsă, se atribuie codului KOD valoarea 1 și se întoarce controlul în programul apelant.

Pasul 6: Se calculează valoarea lui mc, se atribuie codului KOD valoarea 0, după care se întoarce controlul în programul apelant.

Fie MNDC denumirea subprogramului care soluționează tema propusă în enunțul problemei. *Schema logică* ce descrie algoritmul prezentat mai sus, este redată în fig. I3.

Textul sursă al subprogramului MNDC, scris în limbajul de programare FORTRAN IV, este cel redat în modelul 3.a

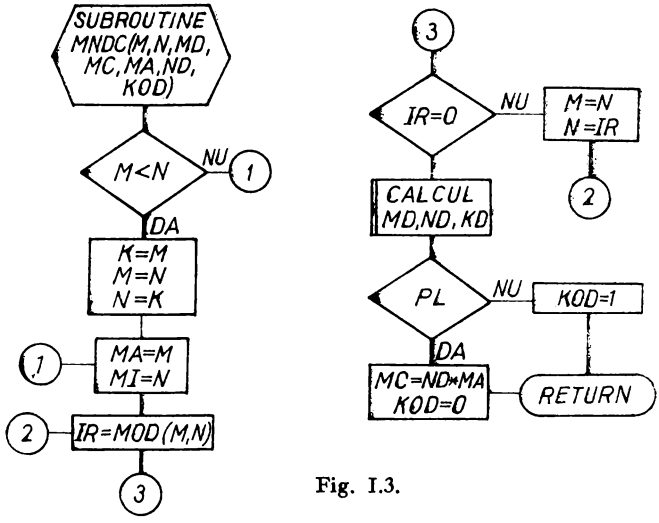


Fig. I.3.

Utilizarea subprogramului.

CALL MNDC (M, N, MD, MC, MA, ND, KOD)

Parametrii formali, sînt următorii:

M, N : cele două numere întregi și pozitive date;

MD : cel mai mare divizor comun al lor;

MC : cel mai mic multiplu comun al lor;

MA : $max(m, n)$;

ND : $min\ (m, n)$/MD

KOD: cod de identificare a soluției:

$$KOD = 0 \quad \text{dacă} \quad MC \leqslant 2^{31} - 1,$$
$$KOD = 1 \quad \text{dacă} \quad MC > 2^{31} - 1.$$

```
      SUBROUTINE MNDC(M,N,MD,MC,MA,ND,KOD)
      IF(M-N) 1,2,2
    1 K=M
      M=N
      N=K
    2 MA=M
      MI=N
    3 IR=MOD(M,N)
      IF(IR.EQ.0) GOTO 4
      M=N
      N=IR
      GO TO 3
    4 MD=N
      ND=MI/MD
      KD=(2**30-1+2**30)/ND
      IF(MA.LE.KD) GO TO 5
      KOD=1
      RETURN
    5 MC=ND*MA
      KOD=0
      RETURN
      END
```

Modelul 3.a.

Ocuparea memoriei: 80 cuvinte.

Indicații pentru utilizatori. Valorile parametrilor M și N sînt distruse prin execuția subprogramului, datorită actualizărilor din algoritmul lui Euclid. După apelul subprogramului, în programul apelant se va testa valoarea codului și se vor solicita valorile MD și MC numai în cazul codului 0; dacă codul ia valoarea 1, se vor solicita valorile MD, MA și ND, valoarea MC nefiind calculată datorită magnitudinei sale.

Textul sursă al unității de program de test l-am prezentat în modelul 3.b, iar rezultatele obținute la imprimantă în urma prelucrării, în modelul 3.c.

```
      DIMENSION IV(10)
      READ(105,1) IV
    1 FORMAT(9I5,I10)
      DO 6 I=1,5
      M=IV(2*I-1)
      N=IV(2*I)
      WRITE(108,2) M,N
    2 FORMAT(' ',5X,'M=',I10,5X,'N=',I10)
      CALL MNDC(M,N,MD,MC,MA,ND,KOD)
      IF(KOD.EQ.0) GO TO 4
      WRITE(108,3) KOD,MD,MA,ND
    3 FORMAT('+',40X,'KOD=',I3,5X,'MD=',I10,5X,'MA=',I10,5X,'ND=',I10)
      GO TO 6
    4 WRITE(108,5) KOD,MD,MC
    5 FORMAT('+',40X,'KOD=',I3,5X,'MD=',I10,5X,'MC=',I10)
    6 CONTINUE
      END
```

Modelul 3.b.

```
M=          26      N=          15      KOD=   0
M=         130      N=         130      KOD=   0
M=          25      N=        1000      KOD=   0
M=         150      N=         500      KOD=   0
M=           4      N=  536870913      KOD=   1

MD=           1      MC=         390
MD=         130      MC=         130
MD=          25      MC=        1000
MD=          50      MC=        1500
MD=           1      MA=  536870913      ND=
```

Modelul 3.c.

14. *Fie a un număr real pozitiv. Să se întocmească un algoritm și să se scrie un subprogram care să furnizeze rădăcina de ordinul n din numărul a, prin localizarea acestuia într-un interval de forma* $[i^n, (i+1)^n)$ *cu* $i = 0, 1, 2, \ldots, \ldots, k, k+1, \ldots$ *În cazul în care există un i astfel încît* $a \in (i^n, (i+1)^n)$, *se va evalua rădăcina* x_0 *cerută mai sus, cu o valoare aproximativă prin lipsă* x_s *și una prin adaos* x_d, *plecînd de la valorile inițiale* $x_s = i$, $x_d = i + 1$, *apoi prin iterații succesive, folosind metoda coardei pentru aproximanta prin lipsă și a tangentei pentru cea prin exces, cu oprirea procesului iterativ acolo unde*

diferența $x_d - x_s$ *este inferioară unui* $\varepsilon > 0$ *aprioric dat, menționînd totodată și numărul de iterații parcurs.*

Emil Perjeriu, G. M. vol. LXXXV, 8/1980

Soluție. Fie $a \in \mathbf{R}_+$ și $n \in \mathbf{N}$, $n > 1$. Definim rădăcina de ordinul n din numărul real și pozitiv a, prin:

$$\sqrt[n]{a} = x \Leftrightarrow x^n = a.$$

Pentru calculul rădăcinii cerute, vom considera funcția:

$$\mathbf{R}_+ \xrightarrow{f} \mathbf{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = x^n - a$$

și graficul acesteia: $G_f = \{(x, y) \mid x \in \mathbf{R}_+, y = f(x)\}$.

Valoarea x_0 a rădăcinii de ordinul n din numărul a, va fi abscisa punctului de intersecție a graficului G_f cu axa Ox. Pentru aproximarea la stînga și la dreapta a valorii x_0, vom utiliza metoda coardei respectiv a tangentei în cadrul unor procese iterative.

Fie $X_s(x_s, 0)$, $X_d(x_d, 0)$ două puncte de pe axa Ox alese astfel încît $f(x_s) < 0$ și $f(x_d) > 0$, iar $Y_s(x_s, f(x_s))$ și $Y_d(x_d, f(x_d))$ punctele în care dreptele $x = x_s$ respectiv $x = x_d$ intersectează graficul G_f. Dacă $X'_s(x'_s, 0)$ este punctul în care coarda ce trece prin punctele Y_s și Y_d intersectează axa Ox, iar $X'_d(x'_d, 0)$ punctul în care tangenta la grafic în Y'_d intersectează axa Ox, atunci avem (fig. I 4a):

$$x_s < x'_s < x_0 < x'_d < x_d$$

de unde rezultă $x'_d - x'_s < x_d - x_s$.

Notînd acum cu $[x_0]$ partea întreagă a rădăcinii x_0, din $[x_0] \leqslant x_0 < [x_0] + 1$, rezultă $[x_0]^n \leqslant x_0^n < ([x_0] + 1)^n$, deci:

$$[x_0]^n \leqslant a < ([x_0] + 1)^n.$$

Dacă $[x_0]^n = a$, atunci $[x_0]$ reprezintă valoarea rădăcinii căutate.

Dacă însă

$$[x_0]^n < a < ([x_0] + 1)^n$$

atunci vom lua ca valori inițiale pe $x_s = [x_0]$, $x_d = [x_0] + 1$ și vom construi prin recurență șirurile de numere reale:

$$x_s^1, x_s^2, \ldots, x_s^i, \ldots$$

$$x_d^1, x_d^2, \ldots, x_d^i, \ldots$$

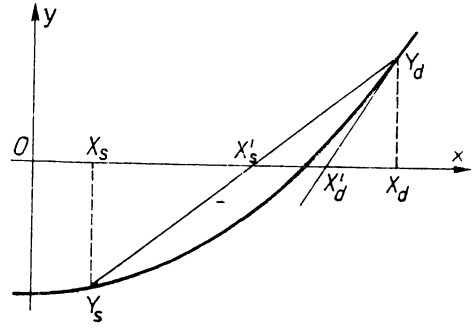


Fig. I 4a

primul șir este crescător și mărginit superior de x_d, iar al doilea descrescător și mărginit inferior de x_s:

$$x_s < x_s^1 < x_s^2 < \ldots < x_s^i < \ldots < x_d^i < \ldots < x_d^2 < x_d^1 < x_d$$

Șirul diferențelor:

$$x_d - x_s > x_d^1 - x_s^1 > \ldots > x_d^i - x_s^i > \ldots > 0$$

fiind monoton descrescător și mărginit inferior de 0, rezultă că ambele șiruri $\{x_s^i\}_{i \in N}$ și $\{x_d^i\}_{i \in N}$ sînt convergente către o aceeași limită x_0, deci pentru o precizie dată $\varepsilon > 0$, există un indice $i \in \mathbf{N}$, astfel încît pentru orice $j \geqslant i$ să avem $x_d^i - x_s^i \leqslant \varepsilon$. Valoarea indicelui i reprezintă totodată numărul minim de iterații care trebuie parcurse, pentru ca diferența dintre cele două valori aproximative la dreapta și la stînga să fie inferioară numărului ε ales.

Fie x_s^i și x_d^i doi termeni de același rang j ai șirurilor $\{x_s^i\}_{i \in N}$ respectiv $\{x_d^i\}_{i \in N}$ cu $x_s^0 = x_s$ și $x_d^0 = x_d$, iar $y_s^i = f(x_s^i)$ și $y_d^i = f(x_d^i)$ valorile funcției în punctele specificate.

Ecuația tangentei la graficul G_f în punctul $Y_d^i(x_d^i, y_d^i)$ fiind:

$$y - y_d^i = f'(x_d^i)\,(x - x_d^i)$$

în care $f'(x_d^i) = n(x_d^i)^{n-1}$, abscisa punctului $X_d^{i+1}(x_d^{i+1}, 0)$ va rezulta din intersecția acestei tangente la grafic cu axa Ox (de ecuație: $y = 0$):

$$-y_d^i = n(x_d^i)^{n-1}\,(x_d^{i+1} - x_d^i)$$

din care rezultă pentru orice $j \in \mathbf{N}$, $j \geqslant 0$:

$$x_d^{i+1} = \frac{(n-1)\,(x_d^i)^n + a}{n(x_d^i)^{n-1}}$$

formulă care ne permite calculul prin recurență ai termenilor șirului $\{x_d^i\}_{i \in \mathbf{N}}$, plecînd de la valoarea inițială $x_d^0 = x_d$.

Ecuația coardei determinată de perechea de puncte $Y_s^i(x_s^i, y_s^i)$ și $Y_d^i(x_d^i, y_d^i)$ fiind dată de:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_s^i & y_s^i & 1 \\ x_d^i & y_d^i & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

abscisa punctului $X_s^{i+1}(x_s^{i+1}, 0)$ va rezulta din intersecția acestei drepte cu axa Ox:

$$\begin{vmatrix} x_s^{i+1} & 0 & 1 \\ x_s^i & y_s^i & 1 \\ x_d^i & y_d^i & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

din care rezultă:

$$x_s^{j+1} = \frac{x_d^j((x_s^j)^n - a) - x_s^j((x_d^j)^n - a)}{(x_s^j)^n - (x_d^j)^n}$$

formulă care ne permite calculul prin recurență ai termenilor șirului $\{x_s^j\}_{j \in N}$ plecînd de la valorile inițiale $x_s^0 = x_s$, $x_d^0 = x_d$ și utilizînd prima formulă de recurență pentru calculul valorii x_d^j.

Descrierea algoritmului. Algoritmul de calcul care va determina valorile aproximative, la stînga și la dreapta, ale rădăcinii de ordinul n din numărul pozitiv real a, cu o precizie dată $\varepsilon > 0$ și un număr maxim de iterații admis n_0, se va desfășura în următorii pași.

P a s u l 1: Se inițializează numărul de iterații NIT ce urmează a fi parcurse prin NIT = 0 și valoarea aproximată la stînga prin $XS = 0$.

P a s u l 2: Se atribuie aproximatei la dreapta valoarea XD = XS + 1 apoi se compară XS^n cu A:

— dacă $XS^n = A$ se va trece la pasul 4;
— dacă $XS^n \neq A$ se trece la pasul următor.

P a s u l 3: Se supune testului de adevăr propoziția logică:

$$PL1: XS^n < A < XD^n$$

— dacă PL1 ia valoarea de adevăr se va trece la pasul 5;
— dacă PL1 este falsă se execută atribuirea XS = XD, după care se reia pasul 2.

P a s u l 4: În acest caz se obține valoarea exactă a rădăcinii, deci se va face atribuirea XD = XS, apoi se va trece la pasul 8.

P a s u l 5: Se majorează cu 1 numărul de iterații parcurs: NIT = = NIT + 1, după care se actualizează valorile XS și XD cu ajutorul formulelor de recurență stabilite.

P a s u l 6: Se supune testului de adevăr propoziția logică:

$$PL2: XD - XS \leqslant EPS$$

— dacă PL2 ia valoarea de adevăr se va trece la pasul 8;
— dacă PL2 este falsă se trece la pasul următor.

P a s u l 7: Se compară NIT cu NO (pragul maxim de iterații tolerate):
— dacă NIT = NO se va trece la pasul 9;
— dacă NIT < NO se va relua pasul 5.

P a s u l 8: Se atribuie unui cod de eroare valoarea 2 (KOD = 2), semnificînd atingerea preciziei dorite după un număr de iterații NIT ⩽ NO, după care se transferă controlul din subprogram în programul apelant.

P a s u l 9: Se atribuie codului de eroare valoarea 1 (KOD = 1), semnificînd situaţia în care precizia dorită nu poate fi atinsă după numărul maxim de iteraţii tolerate, apoi se transferă controlul din subprogram în programul apelant.

Fie RADAC denumirea subprogramului care furnizează valorile aproximative ale rădăcinii de ordinul n din numărul real şi pozitiv dat. *Schema logică* care descrie algoritmul de mai înainte, este redată în fig. I4 b.

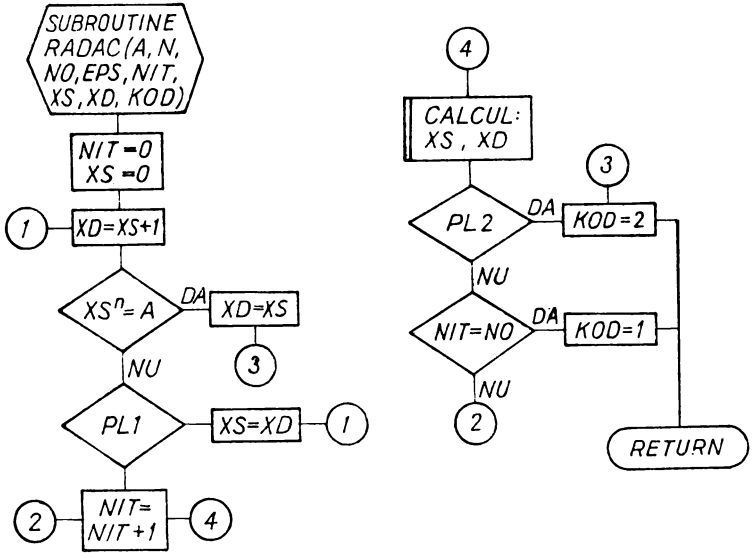


Fig. I4 b

Textul sursă al subprogramului RADAC, scris în limbajul de programare FORTRAN IV, este cel redat în modelul 4.a.

Utilizarea subprogramului:

CALL RADAC (A, N, NO, EPS, NIT, XS, XD, KOD)

Parametrii formali sînt următorii:

A : număr real şi pozitiv din care urmează a se extrage rădăcina de ordinul n;
N : număr natural reprezentînd ordinul radicalului;
NO : numărul maxim de iteraţii tolerate;
EPS : precizia dorită;
NIT : numărul de iteraţii efectiv parcurse;
XS : valoarea rădăcinii aproximată prin lipsă;
XD : valoarea rădăcinii aproximată prin adaos;

KOD : cod de identificare a soluției:

KOD = 1, dacă după NO iterații nu se atinge precizia dorită;

KOD = 2, dacă după un număr NIT de iterații, inferior pragului NO, se atinge precizia cerută.

Ocuparea memoriei: 120 cuvinte.

```
      SUBROUTINE RADAC(A,N,NO,EPS,NIT,XS,XD,KOD)
      NIT=0
      XS=0.
    1 XD=XS+1.
      IF((XS**N).EQ.A) GO TO 2
      IF(((XS**N).LT.A).AND.((XD**N).GT.A)) GO TO 3
      XS=XD
      GO TO 1
    2 XD=XS
      GO TO 4
    3 NIT=NIT+1
      XS=(XD*(XS**N-A)-XS*(XD**N-A))/(XS**N-XD**N)
      XD=((N-1)*(XD**N)+A)/(N*(XD**(N-1)))
      IF((XD-XS).LE.EPS) GO TO 4
      IF(NIT.EQ.NO) GO TO 5
      GO TO 3
    4 KOD=2
      RETURN
    5 KOD=1
      RETURN
      END
```

Modelul 1. a.

Indicații pentru utilizatori. Subprogramul RADAC furnizează valorile aproximative XS (prin lipsă) și XD (prin adaos) ale radicalului de indice N din numărul real și pozitiv A, numărul NIT de iterații parcurse pînă se ajunge la precizia dorită EPS sau pînă se ajunge la marginea superioară NO a numărului maxim de iterații tolerate. Din acest motiv, se recomandă ca după apelarea subprogramului, să se testeze codul, pentru a putea stabili dacă aproximatele obținute ating sau nu precizia dorită.

Textul sursă al unității de program de test l-am prezentat în modelul 4.b, iar rezultatele obținute la imprimantă în urma prelucrării, în modelul 4.c,

Pentru testare, s-a luat EPS = 10^{-5} și NO = 100. Datorită convergenței rapide a celor două șiruri de aproximante $\{x_s^i\}_{i\in N}$ respectiv $\{x_d^i\}_{i\in N}$, se atinge precizia dorită după un număr mic de iterații, așa cum se poate vedea în modelul 4.c, în care NIT nu depășește valoarea 12.

```
      DIMENSION RA(20),NE(20)
      READ(105,1) (RA(I),I=1,20)
    1 FORMAT(10F8.4)
      READ(105,2) NO,EPS,NE
    2 FORMAT(I3,F7.5,2VI2)
      DO 6 I=1,20
      A=RA(I)
      N=NE(I)
      CALL RADAC(A,N,NO,EPS,NIT,XS,XD,KOD)
      WRITE(108,3) A,N,NIT,XS,XD
    3 FORMAT('0',5X,'A=',F10.5,5X,'N=',I3,5X,'NIT=',I3,5X,'XS=',F10.5,
     *5X,'XD=',F10.5)
      GO TO (4,6),KOD
    4 WRITE(108,5)
    5 FORMAT('0',5X,'NU SE AJUNGE LA PRECIZIA DORITA')
    6 CONTINUE
      END
```

Modelul 4.b.

A= .00008	N= 3	NIT= 0	XS= .00000	XD= .00000
A= .62500	N= 4	NIT= 3	XS= .88913	XD= .88914
A= 1.72800	N= 3	NIT= 4	XS= 1.20000	XD= 1.20000
A= 64.00000	N= 6	NIT= 0	XS= 2.00000	XD= 2.00000
A= .43120	N= 8	NIT= 4	XS= .90019	XD= .90019
A= .00010	N= 4	NIT= 11	XS= .10000	XD= .10000
A=1343.26001	N= 10	NIT= 7	XS= 2.05533	XD= 2.05533
A=7543.82031	N= 15	NIT= 5	XS= 1.81345	XD= 1.81345
A= .41300	N= 7	NIT= 4	XS= .88132	XD= .88132
A=1024.00000	N= 10	NIT= 0	XS= 2.00000	XD= 2.00000
A= 3.43200	N= 5	NIT= 5	XS= 1.40279	XD= 1.40279
A=1000.00000	N= 3	NIT= 0	XS= 10.00000	XD= 10.00000
A=1431.54297	N= 11	NIT= 3	XS= 1.93593	XD= 1.93594
A= 635.12012	N= 13	NIT= 6	XS= 1.64287	XD= 1.64287
A= 3.54250	N= 14	NIT= 11	XS= 1.09455	XD= 1.09455
A= 835.13208	N= 16	NIT= 8	XS= 1.52268	XD= 1.52268
A= 101.00000	N= 2	NIT= 3	XS= 10.04988	XD= 10.04987
A=1001.00000	N= 3	NIT= 3	XS= 10.00333	XD= 10.00333
A= 64.25000	N= 6	NIT= 5	XS= 2.00130	XD= 2.00131
A= 501.35010	N= 20	NIT= 11	XS= 1.36461	XD= 1.36460

Modelul 4. c.

I 5. *Fie a un număr complex. Să se întocmească un algoritm și să se scrie un subprogram pentru calculul rădăcinii de ordinul n din numărul a, precum și a rădăcinii primitive de ordinul n din unitatea complexă.*

[*Reamintim că o rădăcină primitivă de ordinul n a unității complexe* $u = (1; 0)$ *este un număr complex* ε *diferit de unitatea complexă u, cu proprietatea că* $\varepsilon^n = u$].

Utilizînd subprogramul elaborat mai sus, să se întocmească un program pentru calculul celor n rădăcini ale ecuației binome $ax^n = b$, *cu coeficienții a și b din corpul numerelor complexe.*

Emil Perjeriu, G. M. vol. LXXXV, 8/1980

Soluție. *Metoda 1 (exponențială).* Fie a numărul complex dat, iar $r = |a|$ modulul acestuia.

O rădăcină de ordinul n din numărul a, va fi un număr complex ra definit în modul următor:

$$ra = \begin{cases} a, & \text{dacă } r = 0 \vee (r \neq 0 \text{ și } n = 1) \\ e^{\text{Log}(a)/n}, & \text{dacă } r \neq 0 \text{ și } n \neq 1 \end{cases}$$

Considerăm acum numărul complex $i = (0; 1)$ şi definim rădăcina primitivă de ordinul n din unitatea complexă u prin:

$$\varepsilon = \begin{cases} u & \text{dacă } n = 1 \\ e^{4\,\mathrm{Log}(i)/n} & \text{dacă } n \neq 1 \end{cases}$$

Avertisment. În formulele de mai sus, am utilizat logaritmul complex şi exponenţiala complexă.

Descrierea algoritmului 1. Algoritmul de calcul care va furniza cele două rădăcini cerute, calculate prin metoda 1, se va desfăşura în următorii paşi.

P a s u l 1: Se calculează $r = |a|$.

P a s u l 2: Se supune testului de adevăr propoziţia logică:

PL: $r = 0 \vee (r \neq 0$ şi $n = 1)$

— dacă PL ia valoarea de adevăr se trece la pasul următor;
— dacă PL este falsă se va trece la pasul 4.

P a s u l 3: Se atribuie rădăcinii ra valoarea a : $ra = a$, după care se va trece la pasul 5.

P a s u l 4: Se calculează valoarea $ra = e^{\mathrm{Log}(a)/n}$ şi se trece la pasul următor.

P a s u l 5: Se supune testului valoarea indicelui n:

— dacă $n = 1$ se trece la pasul 7;
— dacă $n \neq 1$ se trece la pasul următor.

P a s u l 6: Se iniţializează $i = (0, 1)$, apoi se calculează $\varepsilon = e^{\mathrm{Log}(i)/n}$, după care se întoarce controlul din subprogram în programul apelant.

P a s u l 7: Se atribuie lui ε unitatea complexă: $\varepsilon = u$, apoi se întoarce controlul din subprogram în programul apelant.

Fie RCU denumirea subprogramului întocmit pe baza algoritmului de mai sus. *Schema logică* care descrie algoritmul 1, este redată în fig. I5a

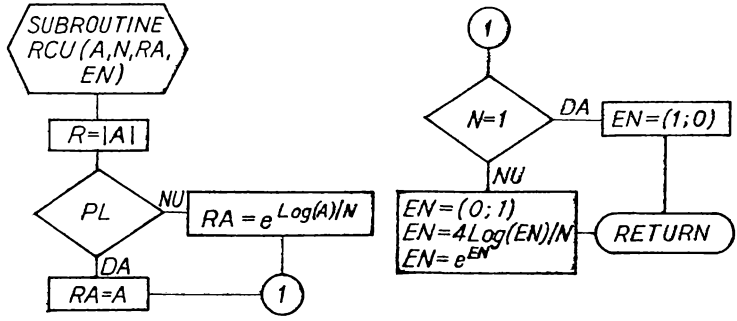


Fig. I 5 a

Textul sursă al subprogramului RCU, scris în limbajul de programare FORTRAN IV, este cel redat în modelul 5.a.

Utilizarea subprogramului:

CALL RCU (A, N, RA, EN)

```
      SUBROUTINE RCU(A,N,RA,EN)
      COMPLEX A,RA,EN
      R=CABS(A)
      IF((R.EQ.0.).OR.((R.NE.0.).AND.(N.EQ.1))) I=1
      IF((R.NE.0.).AND.(N.NE.1)) I=2
      GO TO(1,2),I
    1 RA=A
      GO TO 3
    2 RA=CEXP(CLOG(A)/N)
    3 IF(N-1) 4,4,5
    4 EN=CMPLX(1.,0.)
      RETURN
    5 EN=CMPLX(0.,1.)
      EN=6.28*CLOG(EN)/N
      EN=CEXP(EN)
      RETURN
      END
```

Modelul 5. a.

Parametrii formali sînt următorii:

A : număr complex din care urmează a se extrage rădăcina;

N : număr natural reprezentînd ordinul rădăcinii ce urmează a se extrage din numărul complex A;

RA: valoarea rădăcinii de ordinul N din numărul A;

EN: valoarea rădăcinii primitive de ordinul N din unitatea complexă.

Ocuparea memoriei: 142 cuvinte.

Metoda 2 (trigonometrică). Fie $a = r(\cos t + i \sin t)$ numărul complex dat, reprezentat sub formă trigonometrică, în care $r = |a|$ și $t = arg(a)$ sînt modulul și respectiv argumentul numărului complex a.

O rădăcină de ordinul n din numărul a, va fi un număr complex ra definit în modul următor:

$$ra = \begin{cases} a \text{ dacă } r = 0 \\ r^{1/n}(\cos (t/n) + i. \sin (t/n)), \text{ dacă } r \neq 0 \end{cases}$$

Întrucît $\pi = arg(-u)$, notînd $\theta = 2\, arg(-u)/n$ definim rădăcina primitivă de ordinul n, din unitatea complexă u, prin:

$$\varepsilon = \begin{cases} u & \text{dacă } n = 1 \\ \cos \theta + i \sin \theta & \text{dacă } n \neq 1 \end{cases}$$

Descrierea algoritmului 2. Algoritmul de calcul care va furniza rădăcinile cerute, calculate prin metoda 2, se va desfășura în următorii pași.

Pasul 1: Se calculează $r = |a|$.

P a s u l 2: Se supune testului de adevăr propoziţia logică:

PL: $r = 0 \vee (r \neq 0$ şi $n = 1)$

— dacă PL ia valoarea de adevăr se trece la pasul următor;

— dacă PL este falsă se va trece la pasul 4.

P a s u l 3: Se atribuie rădăcinii *ra* valoarea a: $ra = a$, după care se trece la pasul 5.

P a s u l 4: Se calculează rădăcina ra, prin următoarea secvenţă:

$R = r^{(1./n)}$

$x = \mathrm{Re}(a)$

$y = \mathrm{Im}(a)$

$t = \arg(a)/n$

$X = R \cos(t)$

$Y = R \sin(t)$

$ra = (X; Y)$

după care se trece la pasul următor.

P a s u l 5: Se supune testului valoarea indicelui n:

— dacă $n = 1$ se trece la pasul 7;

— dacă $n \neq 1$ se trece la pasul următor,

P a s u l 6: Se calculează rădăcina primitivă de ordinul n din unitatea complexă, prin următoarea secvenţă:

$t_n = \arg(-u)/n$

$X = \cos(2 * t_n)$

$Y = \sin(2 * t_n)$

$\varepsilon = (X; Y)$

după care se întoarce controlul din subprogram în programul apelant.

P a s u l 7.: Se atribuie lui ε unitatea complexă: $\varepsilon = u$, apoi se întoarce controlul din subprogram în programul apelant.

Fie RCUE denumirea subprogramului întocmit pe baza algoritmului de mai sus. *Schema logică* care descrie algoritmul 2 este redată în fig. I5 b.

Textul sursă al subprogramului RCUE, scris în limbajul de programare FORTRAN IV este cel redat în modelul 5.b.

Utilitarea subprogramului:

CALL RCUE (A, N, RA, EN)

Parametrii formali, sînt următorii:

A : număr complex din care urmează a se extrage rădăcina;
N : număr natural reprezentînd ordinul rădăcinii ce urmează a se extrage din numărul complex A;
RA : valoarea rădăcinii de ordinul N din numărul A;
EN : valoarea rădăcinii primitive de ordinul N din unitatea complexă.

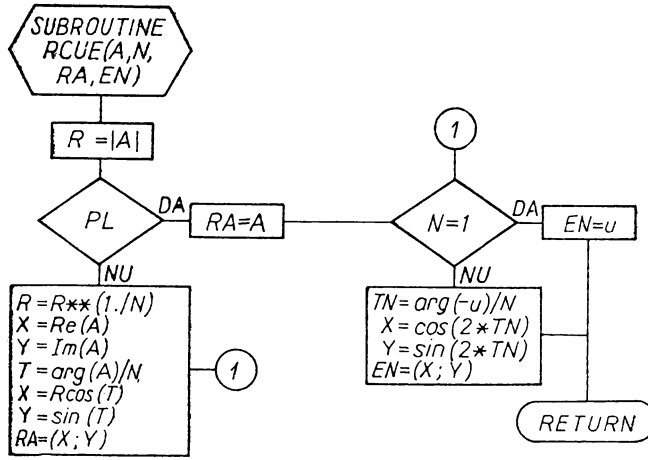


Fig. I 5b.

Ocuparea memoriei: 146 cuvinte.

Indicații pentru utilizatori. După apelul oricăruia dintre subprogramele RCU sau RCUE, pentru valorile actuale ale parametrilor A și N, rădăcinile $z_k (1 \leqslant k \leqslant n)$ se vor calcula astfel:

Se inițializează $z_1 = \text{RA} * \text{EN}$ și apoi se folosește formula de recurență $z_k = z_{k-1} * \text{EN}$, pentru $2 \leqslant k \leqslant n$.

```
      SUBROUTINE RCUE(A,N,RA,EN)
      COMPLEX A,RA,EN
      R=CABS(A)
      IF((R.EQ.0.).OR.((R.NE.0.).AND.(N.EQ.1))) I=1
      IF((R.NE.0.).AND.(N.NE.1)) I=2
      GO TO(1,2),I
1     RA=A
      GO TO 3
2     R=R**(1./N)
      X=REAL(A)
      Y=AIMAG(A)
      T=ATAN2(Y,X)/N
      X=R*COS(T)
      Y=R*SIN(T)
      RA=CMPLX(X,Y)
3     IF(N-1) 4,4,5
4     EN=CMPLX(1.,0.)
      RETURN
5     TN=ATAN2(0.,-1.)/N
      X=COS(2*TN)
      Y=SIN(2*TN)
      EN=CMPLX(X,Y)
      RETURN
      END
```

Modelul 5.b.

```
      COMPLEX V(6),S(10),S1(10),A,A1,RA,RA1,EN,EN1
      DIMENSION NE(3)
      READ(105,1)V,NE
    1 FORMAT(12F5.2,3I1)
      DO 4 I=1,3
      WRITE(108,2) V(2*I-1),V(2*I)
    2 FORMAT('0',5X,'A=(',F10.2,',',F10.2,')',2X,'B=(',F10.2,',',F10.2,
     *')')
      A=V(2*I)/V(2*I-1)
      N=NE(I)
      CALL RCU(A,N,RA,EN)
      DO 4 J=1,N
      S(J)=RA*EN
      RA=S(J)
      WRITE(108,3) J,S(J)
    3 FORMAT('0',5X,'Z=(',I1,')=(',F10.2,',',F10.2,')')
    4 CONTINUE
      DO 5 I=1,3
      WRITE(108,2) V(2*I-1),V(2*I)
      A1=V(2*I)/V(2*I-1)
      N1=NE(I)
      CALL RCUE(A1,N1,RA1,EN1)
      DO 5 J=1,N1
      S1(J)=RA1*EN1
      RA1=S1(J)
      WRITE(108,3) J,S1(J)
    5 CONTINUE
      END
```

Modelul 5.c.

```
A=(      4.00,      5.10)  B=(       .00,       .00)
Z=(1)=(       .00,       .00)
Z=(2)=(       .00,       .00)
Z=(3)=(       .00,       .00)
A=(      3.10,     -2.15)  B=(      4.31,      1.20)
Z=(1)=(       .76,       .91)
A=(     -3.15,      7.34)  B=(     10.51,     -2.30)
Z=(1)=(       .73,       .77)
Z=(2)=(      7.51,       .93)
Z=(3)=(     -1.04,      -.20)
Z=(4)=(      -.13,     -1.05)
Z=(5)=(       .96,      -.45)
A=(      4.00,      5.10)  B=(       .00,       .00)
Z=(1)=(       .00,       .00)
Z=(2)=(       .00,       .00)
Z=(3)=(       .00,       .00)
A=(      3.10,     -2.15)  B=(      4.31,      1.20)
Z=(1)=(       .76,       .91)
A=(     -3.15,      7.34)  B=(     10.51,     -2.30)
Z=(1)=(       .73,       .77)
Z=(2)=(      7.51,       .93)
Z=(3)=(     -1.04,      -.20)
Z=(4)=(      -.13,     -1.05)
Z=(5)=(       .96,      -.45)
```

Modelul 5.d.

Textul sursă al programului principal de test, pentru ambele subprograme, l-am prezentat în modelul 5.c, în care se rezolvă un şir de m ecuaţii cu coeficienţi complecşi de tipul:

$$v_{2i-1}z^{n_i} = v_{2i}, \text{ pentru } 1 \leqslant i \leqslant m$$

apelînd, pe rînd, cîte unul din cele două subprograme cu parametrii de intrare $A = v_{2i}/v_{2i-1}$ şi $N = n_i$, după care se listează cele n rădăcini calculate prin recurenţă aşa cum s-a indicat mai sus. Rezultatele obţinute la imprimantă în urma prelucrării, sînt cele redate în modelul 5.d.

I 6. *Fie $M_i(x_i, y_i)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, n puncte date prin coordonatele lor carteziene, situate în vîrfurile unui poligon (convex sau concav) şi luate în sensul direct de parcurgere a frontierei poligonale Γ care mărgineşte domeniul poligonal D, iar $\bar{D} = D \cup \Gamma$ mulţimea punctelor situate în interiorul sau pe frontiera domeniului D. Să se elaboreze un algoritm care să stabilească dacă un punct $M_i(x_i, y_i)$ aparţine mulţimii $\bar{D}$ sau este exterior acesteia şi să se scrie un subprogram în limbajul de programare FORTRAN IV care să furnizeze rezultatul testului de apartenenţă stabilit mai sus.*

Emil Perjeriu, G. M. vol. LXXXV, 10/1980

Soluţie. Fie $M_i(x_i, y_i)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, cele n puncte din plan situate în vîrfurile conturului poligonal Γ (convex sau concav), care mărgineşte domeniul poligonal plan simplu conex D, luate în sensul direct de parcurgere a frontierei Γ şi $M(x, y)$ un punct arbitrar din planul domeniului D, care va face obiectul testării.

Problema decidabilităţii formulată în enunţ se va desfăşura pe parcursul a trei etape.

În prima etapă se va stabili, pe rînd, distanţa de la punctul M la fiecare din segmentele:

$$|M_nM_1|, \ |M_iM_{i+1}| \ (1 \leqslant i \leqslant n-1)$$

şi se va alege de pe segmentul situat la distanţă minimă de punctul M, cea mai apropiată extremitate a sa de acel punct, prin procedeul de minimizare descris mai jos.

Fie vectorii:

$$\mathbf{m}_i = (X_i, Y_i), \ \mathbf{m}_j = (X_j, Y_j), \ \mathbf{m}_{ij} = (X_i - X_j, Y_i - Y_j), \ \mathbf{m}_{ji} = -\mathbf{m}_{ij}$$

în care:

$$X_i = x - x_i, \ Y_i = y - y_i \text{ cu } 1 \leqslant i \leqslant n$$

$$X_i = x - x_j, \ Y_j = y - y_j \text{ cu } j = \begin{cases} i+1 & \text{dacă } 1 \leqslant i \leqslant n-1 \\ 1 & \text{dacă } i = n \end{cases}$$

produsele scalare:

$$s_k = < \mathbf{m}_j, \ \mathbf{m}_{ij} > , \ s_{k1} = < \mathbf{m}_j, \ \mathbf{m}_{ji} >$$

d_k distanța de la punctul M la segmentul $|M_iM_j|$ și M_o cea mai apropiată extremitate a segmentului de punctul M:

— dacă $s_k < 0$, atunci $d_k = \| \mathbf{m}_i \|$ și se alege punctul $M_o = M_i$ (fig. I6.a);

— dacă $s_{k1} < 0$, atunci $d_k = \| \mathbf{m}_j \|$ și se alege puncul $M_o = M_j$ (fig. I6.b);

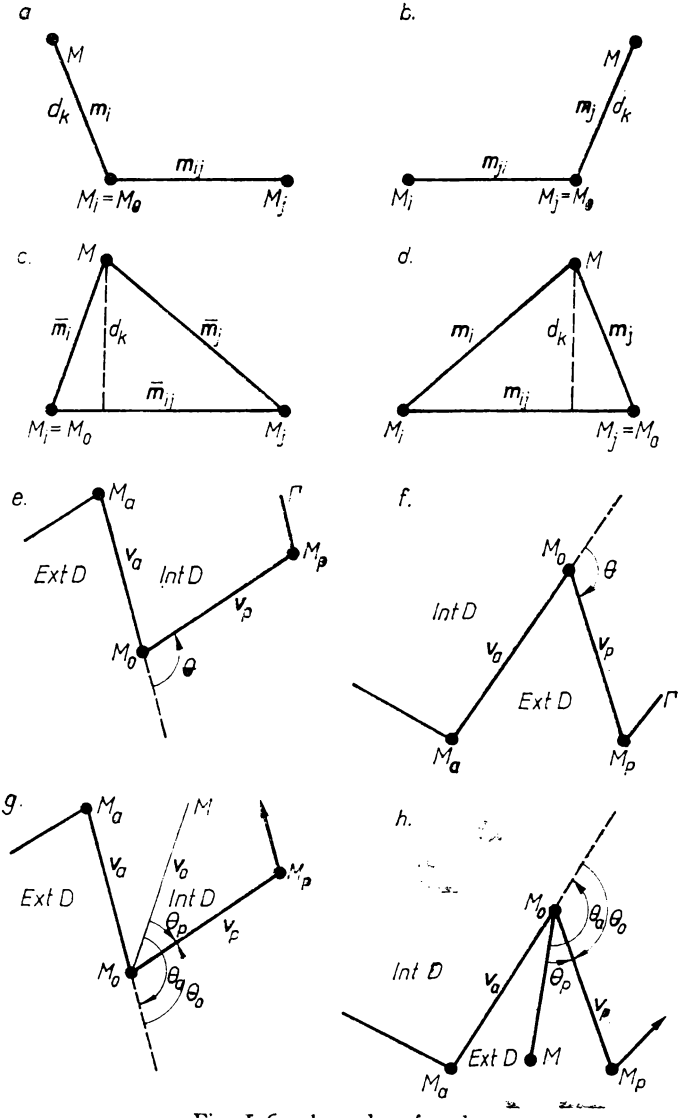


Fig. I 6 a, b, c, d, e, f, g, h

— dacă $s_k \geq 0$ și $s_{k1} \geq 0$, atunci $d_k = \| \mathbf{m}_i \times \mathbf{m}_j \| / \| \mathbf{m}_{ij} \|$ și:

— dacă $s_k \leq s_{k1}$ se ia $M_c = M_i$ (fig. I6.c);

— dacă $s_k > s_{k1}$ se ia $M_c = M_j$ (fig. I6.d).

În final, se va alege cea mai mică distanță d_k și punctul M_c corespunzător acesteia.

În etapa a doua, vom studia natura vîrfului determinat de punctul M_c ales în prima etapă: convex (fig. I6.e), sau concav (fig. I6.f).

Fie $M_a(x_a, y_a)$ și $M_p(x_p, y_p)$ punctul anterior, respectiv cel posterior punctului M_0 de pe conturul Γ. Vom considera vectorii $v_a = M_aM_c$, $v_p = M_cM_p$ și produsul lor vectorial dat de:

$$v_{ap} = \| \mathbf{v}_a \times \mathbf{v}_p \| = \| \mathbf{v}_a \| \cdot \| \mathbf{v}_p \| \sin \theta.$$

unghiul θ fiind pozitiv dacă este măsurat în sens direct sau negativ dacă este măsurat în sens invers (fig. 6.e și 6.f).

Din aceste considerente, deducem că punctul M_0 se află într-un vîrf convex dacă $v_{ap} \geq 0$, sau într-unul concav dacă $v_{ap} < 0$.

În etapa a treia, pentru a stabili poziția punctului M față de închiderea lui D, vom considera vectorul $\mathbf{v}_c = \mathbf{M_cM}$, precum și produsele vectoriale:

$$v_{ca} = \| \mathbf{v}_c \times \mathbf{v}_a \| = \| \mathbf{v}_c \| \cdot \| \mathbf{v}_a \| \sin \theta_a$$

$$v_{cp} = \| \mathbf{v}_c \times \mathbf{v}_p \| = \| \mathbf{v}_c \| \cdot \| \mathbf{v}_p \| \sin \theta_p$$

— dacă M_c se află într-un vîrf convex al conturului, deci $v_{ap} \geq 0$ (fig. I6.g), atunci punctul M va aparține închiderii domeniului D dacă θ_a și θ_p sînt situate în intervalul $[-\pi, 0]$, deci dacă avem simultan $v_{ca} \leq 0$ și $v_{cp} \leq 0$;

— dacă M_c se află într-un vîrf concav al conturului, deci $v_{ap} < 0$ (fig. I.6.h) atunci punctul M va aparține exteriorului domeniului D dacă θ_a și θ_p sînt ambele situate în intervalul $(0, \pi)$, deci dacă avem simultan $v_{ca} > 0$ și $v_{cp} > 0$.

Descrierea algoritmului. Algoritmul de calcul care va decide dacă un punct M aparține sau nu unui domeniu poligonal plan dat se va desfășura în următorii pași.

Pasul 1: Se inițializează distanța minimă de la punctul testat pînă la cel mai apropiat segment al conturului cu o valoare suficient de mare (de exemplu $D = 10^{10}$) și $I = 1$.

Pasul 2: Se atribuie lui J valoarea $J = I + 1$ și se supune testului valoarea lui I:

— dacă $I = N$, se atribuie lui J valoarea $J = 1$, apoi se trece la pasul următor;

— dacă $I < N$, se trece la pasul următor.

Pasul 3: Se calculează valorile $XI = X_i$, $XJ = X_j$, $YI = Y_i$, $YJ = Y_j$ și $SK = XI * (XI - XJ) + YI * (YI - YJ)$.

Pasul 4: Se supune testului valoarea lui SK:

— dacă $SK < 0$, se calculează DK după formula:

$$DK = (XI * XI + YI * YI)^{1/2}$$

se reţine valoarea indicelui I într-o variabilă întreagă L: $L = I$, după care se trece la pasul 7;

— dacă $SK \geqslant 0$, se calculează SK1 după formula:

$$SK1 = XJ * (XJ - XI) - YJ * (YJ - YI)$$

şi se trece la pasul următor.

Pasul 5: Se supune testului valoarea lui SK1:

— dacă $SK1 < 0$, se calculează DK după formula:

$$DK = (XJ * XJ + YJ * YJ)^{1/2}$$

se reţine valoarea indicelui J în variabila L : $L = J$, după care se trece la pasul 7;

— dacă $SK1 \geqslant 0$, se calculează DK după formula:

$$DK = XI * YJ - XJ * YI/((XI - XJ)^2 + (YI - YJ)^2)^{1/2}$$

apoi se trece la pasul următor.

Pasul 6: Se compară SK cu SK1:

— dacă $SK \leqslant SK1$, se reţine valoarea indicelui I în variabila L : $L = I$, după care se trece la pasul următor;

— dacă $SK > SK1$, se reţine valoarea indicelui J în variabila L : $L = J$, şi se trece la pasul următor.

Pasul 7: Se compară valoarea distanţei minime reţinută în variabila D, cu valoarea actuală a distanţei DK faţă de segmentul cu originea în punctul M_i:

— dacă $D \leqslant DK$, se trece la pasul 8;

— dacă $D > DK$, se reţine valoarea lui L într-o variabilă întreagă K : $K = L$, se atribuie variabilei D valoarea lui DK : $D = DK$, după care se trece la pasul următor.

Pasul 8: Se majorează valoarea indicelui I cu o unitate: $I = I + 1$ şi se supune testului valoarea lui I astfel majorată:

— dacă $I > N$, se trece la pasul următor;

— dacă $I \leqslant N$, se reiau calculele de la pasul 2.

Pasul 9: Indicele K al punctului căutat M_0 fiind stabilit, vom iniţializa indicele punctului anterior M_a prin $IA = K - 1$ şi cel al punctului posterior prin $IP = K + 1$, apoi vom supune testului valoarea lui K:

— dacă $K = 1$, se va lua $IA = N$, apoi se va trece la pasul 10;

— dacă $K = N$, se va lua $IP = 1$, după care se va trece la pasul 10;

— dacă $1 < K < N$, se trece la pasul următor.

Pasul 10: Se calculează valorile VAP, VOA şi VOP după formulele stabilite pentru calculul produselor vectoriale v_{ap}, v_{oa} respectiv v_{op} şi se supune testului de adevăr propoziţia logică:

$$PL : (v_{ap} < 0 \;\&\; v_{oa} \leqslant 0) \vee (v_{ap} < 0 \;\&\; v_{op} \leqslant 0) \vee (v_{ap} \geqslant 0 \;\&\; v_{oa} \leqslant 0 \;\&\; v_{op} \leqslant 0)$$

— dacă PL ia valoarea de adevăr, atunci punctul testat se află în interiorul închiderii domeniului poligonal şi vom indica aceasta prin atribuirea unei variabile întregi KOD valoarea zero: KOD = 0, după care se întoarce controlul din subprogram în programul apelant;

— dacă PL este falsă, punctul este exterior domeniului, vom lua KOD = 1 şi vom întoarce controlul în programul apelant.

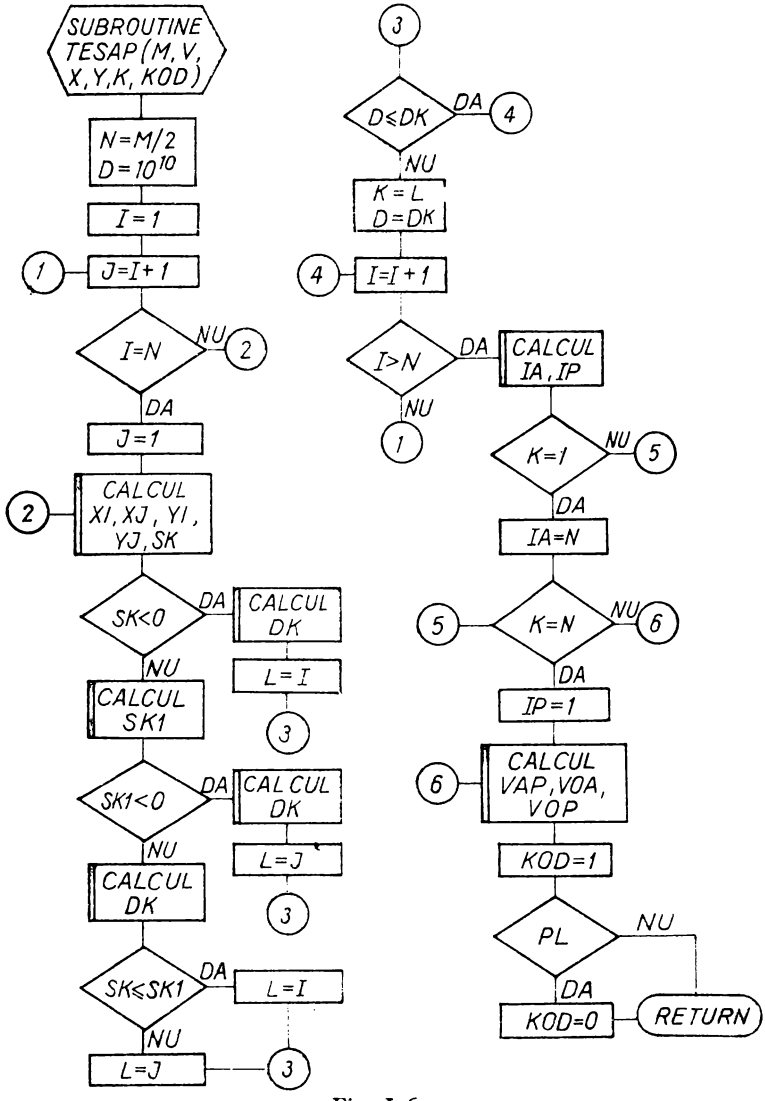


Fig. I 6

Fie TESAP denumirea subprogramului care realizează testul de apartenență a punctului la domeniul poligonal dat. *Schema logică* care descrie algoritmul prezentat mai sus, este cea redată în fig. 6/I.

Textul sursă al subprogramului TESAP, scris în limbajul FORTRAN IV, este cel redat în modelul 6.a.

```
      SUBROUTINE TESAP(M,V,X,Y,K,KOD)
      DIMENSION V(M)
      N=M/2
      D=1.E+10
      DO 1 I=1,N
      J=I+1
      IF(I.EQ.N) J=1
      XI=X-V(I+I-1)
      XJ=X-V(J+J-1)
      YI=Y-V(I+I)
      YJ=Y-V(J+J)
      SK=XI*(XI-XJ)+YI*(YI-YJ)
      IF(SK.LT.0) GO TO 10
      SK1=XJ*(XJ-XI)+YJ*(YJ-YI)
      IF(SK1.LT.0.) GO TO 20
      DK=ABS(XI*YJ-XJ*YI)/SQRT((XI-XJ)**2+(YI-YJ)**2)
      IF(SK.LE.SK1) GO TO 30
      L=J
      GO TO 40
   30 L=I
      GO TO 40
   20 DK=SQRT(XJ*XJ+YJ*YJ)
      L=J
      GO TO 40
   10 DK=SQRT(XI*XI+YI*YI)
      L=I
   40 IF(D.LE.DK) GO TO 1
      K=L
      D=DK
    1 CONTINUE
      IA=K-1
      IP=K+1
      IF(K.EQ.1) IA=N
      IF(K.EQ.N) IP=1
      VAP=(V(K+K-1)-V(IA+IA-1))*(V(IP+IP)-V(K+K))-(V(IP+IP-1)-V(K+K-1))*
     *(V(K+K)-V(IA+IA))
      VUA=(X-V(K+K-1))*(V(K+K)-V(IA+IA))-(V(K+K-1)-V(IA+IA-1))*(Y-V(K+K)
     *)
      VOP=(X-V(K+K-1))*(V(IP+IP)-V(K+K))-(V(IP+IP-1)-V(K+K-1))*(Y-V(K+K)
     *)
      KOD=1
      IF(((VAP.LT.0.).AND.(VUA.LE.0.)).OR.((VAP.LT.0.).AND.(VOP.LE.0.)).
     *OR.((VAP.GE.0.).AND.(VUA.LE.0.).AND.(VOP.LE.0.))) KOD=0
      RETURN
      END
```

Modelul 6.a.

Utilizarea subprogramului:

CALL TESAP (M, V, X, Y, K, KOD)

Parametrii formali, sînt următorii:

M : numărul total al coordonatelor celor n puncte ($M = 2n$);

V : tablou real de dimensiune M, în care se aranjează în perechi, coordonatele celor n puncte date;

X, Y : coordonatele punctului care urmează a fi supus testului;

K : indicele vîrfului de pe contur ce aparține segmentului situat la distanța minimă de punctul testat;

KOD : cod de identificare a apartenenței;

KOD = 0 dacă punctul testat este interior domeniului;

KOD = 1 dacă punctul testat este exterior.

Ocuparea memoriei: 334 cuvinte.

Indicații pentru utilizatori. Coordonatele celor n puncte se vor introduce în tabloul V astfel: componentele de ordin impar fiind ocupate de abscise, iar cele de ordin par de ordonatele corespunzătoare celor n puncte date, luate în sensul direct de parcurgere a conturului poligonal.

Textul sursă al unității de program de test l-am prezentat în modelul 6.b, iar rezultatele obținute la imprimantă în urma prelucrării, în modelul 6.c, în care pentru fiecare caz, am listat mai întîi coordonatele punctelor de pe contur, apoi pentru fiecare punct testat, valoarea indicelui K al vîrfului de pe contur față de care se realizează distanța minimă, coordonatele X și Y ale punctului testat și valoarea codului de identificare a apartenenței.

```
      DIMENSION V1(6),V2(8),V3(12),U1(4),U2(24)
      READ(105,1) V1,V2,V3,U1,U2
    1 FORMAT(20F4.1/20F4.1/14F4.1)
      WRITE(108,2) (V1(I),I=1,6)
    2 FORMAT('0',5X,14F5.1)
      CALL TESAP(6,V1,U1(1),U1(2),K,KOD)
      WRITE(108,3) K,U1(1),U1(2),KOD
    3 FORMAT('0',5X,'K=',I3,2X,'X=',F5.1,2X,'Y=',F5.1,2X,'KOD=',I1)
      CALL TESAP(6,V1,U1(3),U1(4),K,KOD)
      WRITE(108,3) K,U1(3),U1(4),KOD
      WRITE(108,2) (V2(I),I=1,8)
      CALL TESAP(8,V2,U1(1),U1(2),K,KOD)
      WRITE(108,3) K,U1(1),U1(2),KOD
      CALL TESAP(8,V2,U1(3),U1(4),K,KOD)
      WRITE(108,3) K,U1(3),U1(4),KOD
      WRITE(108,2) (V3(I),I=1,12)
      DO 4 I=1,12
      X=U2(I+I-1)
      Y=U2(I+I)
      CALL TESAP(12,V3,X,Y,K,KOD)
    4 WRITE(108,3) K,X,Y,KOD
      END
```

Modelul 6.b.

```
 47.2 89.6 42.5 79.4 57.9 60.7

K=  3  X= 53.5  Y= 77.2  KOD=1

K=  1  X= 51.7  Y= 81.1  KOD=1

 47.2 89.6 42.5 79.4 48.7 73.6 57.9 60.7

K=  4  X= 53.5  Y= 77.2  KOD=1

K=  1  X= 51.7  Y= 81.1  KOD=1

   .0   .0  3.0   .0  5.0   .0  3.5  1.0  2.0  2.0   .0  3.0

K=  4  X=  3.5  Y=  1.0  KOD=0

K=  5  X=  2.0  Y=  2.0  KOD=0

K=  5  X=  1.0  Y=  3.5  KOD=0

K=  6  X=   .0  Y=  5.0  KOD=0

K=  2  X=  3.5  Y=   .0  KOD=0

K=  2  X=  3.0  Y=   .0  KOD=0

K=  2  X=  3.0  Y= -1.0  KOD=1

K=  5  X=  2.0  Y=  1.5  KOD=0

K=  4  X=  4.0  Y=  1.0  KOD=1

K=  5  X=  2.0  Y=  2.5  KOD=1

K=  1  X= -1.0  Y= -1.0  KOD=1

K=  4  X=  3.5  Y=   .5  KOD=0
```

Modelul 6.c.

I 7. *Fie* $M = \{M_i(x_i, y_i) \mid 1 \leqslant i \leqslant n\}$ *o mulțime de puncte din plan date prin coordonatele lor carteziene și* $M_0(x, y)$ *un punct fixat în acel plan. Să se elaboreze un algoritm prin care să se determine distanța* $d = \min_{1 \leqslant i \leqslant n} d(M_i, M_0)$ *de la punctul* M_0 *la mulțimea* M, *precum și primul punct* $M_k \in M$ *pentru care* $d(M, M_0) = d(M_k, M_0)$, *apoi să se scrie un subprogram FORTRAN care să furnizeze distanța* d *și indicele* k *al punctului* M_k, *valori stabilite prin algoritmul de mai sus.*

Emil Perjeriu, G. M. vol. LXXXVI, nr. 1/1981

Soluție. Fie $M_i(x_i, y_i)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, cele n puncte ale mulțimii M și $M_0(x, y)$ punctul fixat în plan. Pătratul distanței de la un punct oarecare $M_i \in M$ la punctul M_0 fiind dat de:

$$d_i^2 = (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2$$

vom căuta elementul minim $d^2 = \min_{1 \leqslant i \leqslant n} d_i^2$ al mulțimii $D = \{d_i^2 \mid 1 \leqslant i \leqslant n\}$ și vom reține primul indice k pentru care acest minim are loc.

Descrierea algoritmului. Algoritmul de calcul care va furniza distanța minimă cerută și indicele k al punctului din mulțimea M care realizează acest minim, se va desfășura în următorii pași.

Pasul 1: Se inițializează pătratul distanței minime $d_* = d^2$ cu o valoare suficient de mare (spre exemplu $d_* = 10^{10}$).

Pasul 2: Cu o structură repetitivă de ciclare, după indicele i cu valori de la 1 pînă la n, se calculează pentru fiecare punct $M_i \in M$ pătratul distanței $dk = d_i^2$ și se compară cu d_*:

— dacă $d_* \leqslant dk$, se trece la pasul 3;

— dacă $d_* > dk$, se operează mai întîi atribuirile $k = i$ și $d_* = dk$, apoi se trece la pasul următor.

Pasul 3: Se majorează indicele i cu o unitate și se testează:

— dacă $i < n$, se continuă ciclul de la pasul 2;

— dacă $i = n + 1$, se calculează distanța minimă găsită: $d = d_*^{1/2}$, și se transferă controlul unității de program apelantă.

Fie DVF denumirea subprogramului care furnizează distanța minimă cerută și indicele k al punctului față de care se realizează acest minim. *Schema logică* care descrie algoritmul de calcul prezentat, este redată în fig. I7.

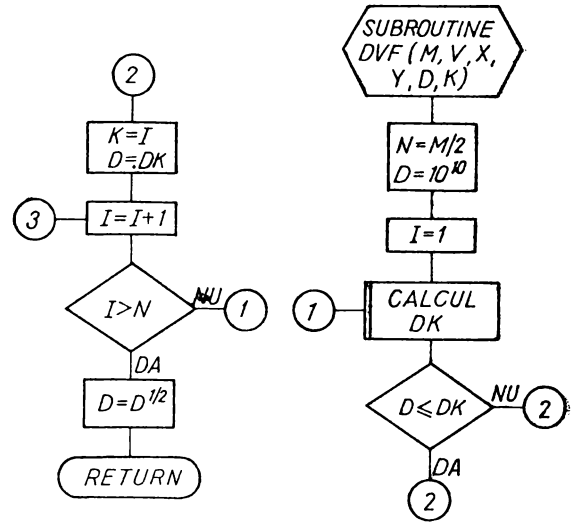


Fig. I7.

Textul sursă al subprogramului DVF, scris în limbajul de programare FORTRAN IV, este cel redat în modelul 7.a.

```
      SUBROUTINE DVF(M,V,X,Y,D,K)
      DIMENSION V(M)
      N=M/2
      D=1.E+10
      DO 1 I=1,N
      DK=(V(I+I-1)-X)**2+(V(I+I)-Y)**2
      IF(D.LE.DK) GO TO 1
      K=I
      D=DK
    1 CONTINUE
      D=SQRT(D)
      RETURN
      END
```

Modelul 7. a.

Utilizarea subprogramului:

CALL DVF (M, V, X, Y, D, K)

Parametrii formali, sînt următorii:

M : dimensiunea tabloului V, egală cu dublul numărului de puncte ale mulțimii date ($M = 2n$);
V : tablou real de dimensiune M, ale cărui componente sînt ocupate de coordonatele (luate în perechi) ale celor n puncte date;
X, Y: coordonatele carteziene ale punctului M_0 fixat în plan;
D : distanța minimă de la punctul M_0 la mulțimea de puncte dată;
K : indicele primului punct al mulțimii, aflat la distanța D de punctul M_0.

Ocuparea memoriei: 76 cuvinte.

Indicații pentru utilizatori. Coordonatele celor n puncte se vor introduce în tabloul V astfel: componentele de ordin impar vor fi ocupate de abscise, iar cele de ordin par de ordonatele corespunzătoare punctelor date.

Textul sursă al unității de program de test l-am prezentat în modelul 7.**b.**

```
      DIMENSION V(22),U(10)
      READ(105,1) V,U
    1 FORMAT(32F2.1)
      M=22
      DO 3 I=1,5
      X=U(I+I-1)
      Y=U(I+I)
      CALL DVF(M,V,X,Y,D,K)
      WRITE(108,2) K,X,Y,D
    2 FORMAT('0',5X,'K=',I3,2X,'X=',F4.1,2X,'Y=',F4.1,2X,'D=',F8.3)
    3 CONTINUE
      END
```

Modelul 7. b.

Pentru test, s-a luat mulțimea M constituită din următoarele puncte: $M_1(1; 1)$, $M_2(3; 1)$, $M_3(2; 3)$, $M_4(4; 3)$, $M_5(5; 1)$, $M_6(6; 1)$, $M_7(7; 2)$, $M_8(6; 4)$, $M_9(7; 5)$, $M_{10}(4; 6)$ și $M_{11}(2; 5)$, iar drept punct fixat M_0 cîte unul din următoarele puncte: $P_1(1; 1)$, $P_2(1; 0)$, $P_3(2; 1)$, $P_4(2; 0)$ și $P_5(3, 5; 2)$. Rezultatele obți-

nute la imprimantă în urma prelucrării le-am prezentat în modelul 7.c, în care am listat pentru fiecare punct P_i testat: indicele k al primului punct M_k aflat la distanță minimă de P_i, coordonatele punctului $P_i(x, y)$, precum și distanța minimă $d = d(P_i, M_k)$.

```
K=  1  X=  1.0  Y=  1.0  D=    .000
K=  1  X=  1.0  Y=   .0  D=   1.000
K=  1  X=  2.0  Y=  1.0  D=   1.000
K=  1  X=  2.0  Y=   .0  D=   1.414
K=  2  X=  3.5  Y=  2.0  D=   1.118
```

Modelul 7. c.

I 8. *Pe o stradă îngustă este instalată o linie dublă, pe care circulă tramvaie în cele două sensuri. Pe o linie, un tramvai merge cu 12 km/h; din partea opusă, vine un altul cu 18 km/h, iar în urma acestuia, un automobil cu 38 km/h. La un moment dat conducătorul automobilului se decide să o ia înaintea tramvaiului, în urma căruia se găsea, ca să se strecoare printre cele două tramvaie. În acest moment, distanța liberă între cele două tramvaie era de 30 m, iar între automobil și cel de al doilea tramvai, 40 m. Știind că lungimea tramvaiului este de 9 m, a automobilului 6 m și că distanța liberă între tramvaie, cînd ele se încrucișează, este de 50 cm, iar lățimea celor trei vehicule 2 m. Se cere:*

a) *Cît timp a durat între decizia conducătorului automobilului și întîlnirea celor trei vehicule, presupunînd că vitezele rămîn constante și sînt cele indicate mai sus?*

b) *Dacă s-a întîmplat vre-un accident, presupunînd că, conducătorul automobilului a condus cu cea mai mare abilitate?*

Gh. Em. Filipescu, G. M. vol. XIX, 1913

Soluție. Vom studia mișcarea automobilului în raport cu tramvaiul T_1 situat în fața sa. Pentru simplificare, vom considera acest tramvai în stare de repaus luînd în schimb în calcul în locul vitezei absolute a automobilului $V_a = 38$ km/h, viteza sa relativă în raport cu tramvaiul.

Pozițiile succesive pe care le ocupă automobilul în mișcarea sa relativă cea mai favorabilă sînt notate în fig. I 8 cu numerele 1—4, poziția 1 corespunzînd momentului $t = 0$, cînd conducătorul său ia decizia de întrecere în poziția 5, cînd automobilul depășind tramvaiul T_1 se află în siguranță.

Viteza relativă pe porțiunea 1—2 o determinăm ținînd seama de relația vectorială $\mathbf{v}_r = \mathbf{v}_a - \mathbf{v}_{T_1}$ și observînd că $\mathbf{v}_r$ are direcția 1—2. Putem astfel construi triunghiul ABC de unde

$$v_a^2 = v_{T_1}^2 + v_r^2 + 2v_{T_1}v_r \cos \alpha.$$

Dar $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{2}{40} = 0{,}05$ $\alpha = 2°51'$ $\cos \alpha \simeq 1$

$v_a = 38$ km/h $= 10{,}555$ *m/s*, $v_{T_1} = 18$ km/h $= 5$ m/s. Rezultă $v_r \approx 5{,}555$ m/s.

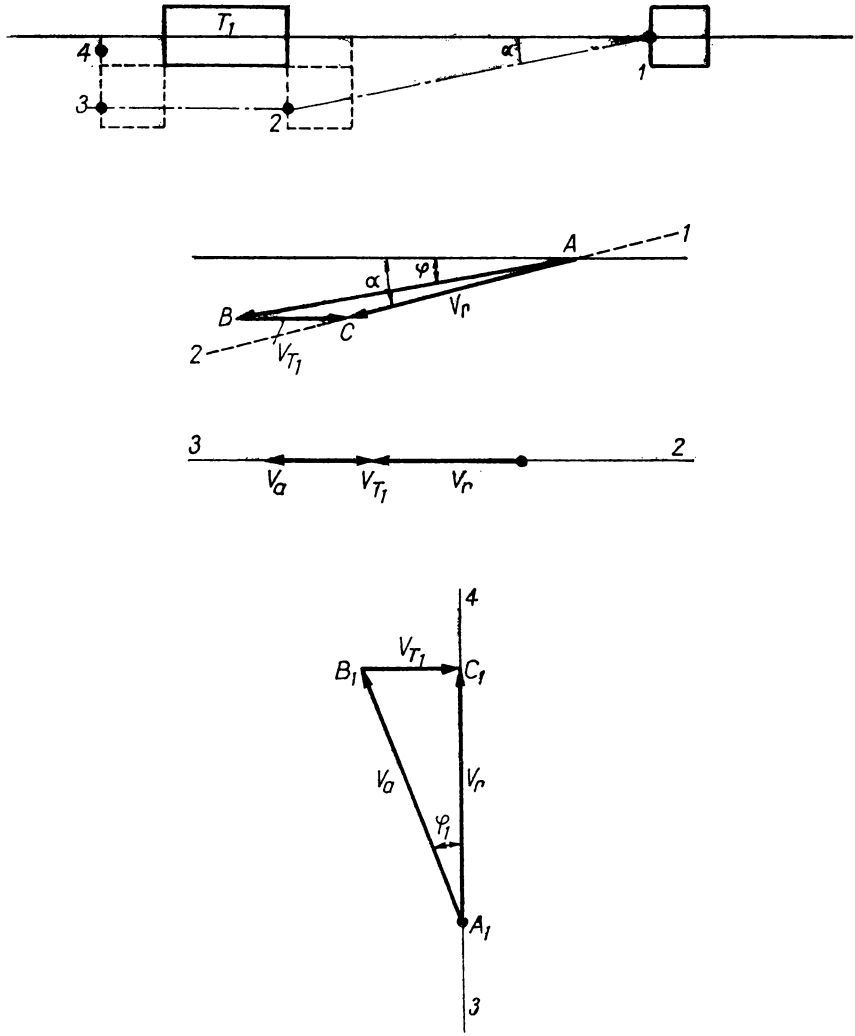


Fig. I 8

Timpul t_{1-2} necesar trecerii automobilului dela poziția 1 la poziția 2 este prin urmare:

$$t_{1-2} = \frac{\sqrt{40^2 + 2^2}}{5{,}555} = 7{,}21 \text{ s}.$$

Viteza relativă pe porțiunea 2—3 se obține imediat: $v_r = v_a - v_{T_1} = 5{,}555$ m/s.

Timpul t_{2-3} necesar trecerii automobilului dela poziţia 2 la poziţia 3 este prin urmare: $t_{2-3} = \frac{15}{5{,}555} = 2{,}7$ s.

În mod analog putem determina viteza relativă pe porţiunea 3—4 prin construcţia triunghiului $A_1B_1C_1$. Obţinem astfel:

$$v_r = \sqrt{v_a^2 - v_{T_1}^2} = 9{,}29 \text{ m/s.}$$

Timpul $t_{3-4} = 0$, 16 s. Timpul total dela 1 la 4 este: $t = t_{1-2} + t_{2-3} + t_{3-4} = 10{,}07$ s.

În acest timp tramvaiele s-au apropiat între ele cu distanţa:

$$d = t(v_{T_1} + v_{T_2}),\ v_{T_2} = 12 \text{ km/h} = 3{,}333 \text{ m/s.}$$

Deci: $d = 10{,}07 \cdot 8{,}333 = 83{,}91$ m.

Distanţa iniţială fiind de 90 m, va rămîne liber între tramvaie la timpul t: $90 - 83{,}91 = 6{,}09$ m $> 6{,}00$ m, adică aproape strict locul ocupat de automobil

Rezultă deci că accidentul poate fi evitat printr-o conducere abilă a automobilului.

Este important de observat că în mişcarea sa absolută automobilul merge cu înclinarea $\varphi = 1°21'$ faţă de axul şoselei pe porţiunea 1—2, paralel cu acest ax pe porţiunea 2—3 şi înclinat cu unghiul $\varphi_1 = 61°43'$ pe porţiunea 3—4. Valorile unghiurilor φ şi φ_1 se obţin uşor prin consideraţii trigonometrice în triunghiurile ABC şi $A_1B_1C_1$ $\sin \varphi = \frac{v_{T_1}}{v_a} \sin \alpha = \frac{5}{10{,}555} \sin 2°51'$; $\cos \varphi_1 = \frac{v_{T_1}}{v_a} = \frac{5}{10{,}555}$.

Întîlnirea dintre automobil şi tramvaiul opus are loc după circa 10,07 *s*, iar dintre tramvaie după 10,80 s.

Problema în realitate este mult mai complexă.

I 9. *Două bare AB şi AC de lungime l, de greutate G, situate în acelaşi plan vertical P, sînt articulate între ele într-un punct fix A şi au capetele B şi C prinse cu un fir de lungime a. Presupunînd că planul P se roteşte cu viteză constantă, în jurul verticalei punctului A, să se determine minimul acestei viteze astfel încît firul să fie întins.*

În cazul unei viteze superioare celei determinate mai sus, să se calculeze tensiunea în fir, reacţiunea în bare şi reacţiunea din A.

Gabriela Ţiţeica, vol. XLVI, 1939

Soluţie (fig. I 9). Studiem echilibrul barei AB, atît din punct de vedere al forţelor cît şi al poziţiei, simetrică cu AC, faţă de axa de rotaţie verticală Oy. Asupra barei AB acţionează:

a) greutatea sa G, la mijlocul barei;
b) reacţiunea R între bare în A, orizontală;

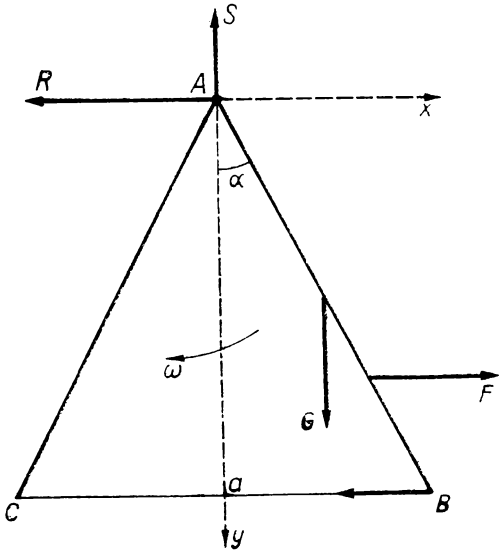


Fig. 19

c) reacțiunea S de sprijin în A, verticală;

d) tensiunea T, a firului BC, care este în direcția de la B;

e) **forța centrifugă** F, orizontală.

Pentru a afla valoarea lui F, facem suma tuturor forțelor centrifuge elementare a tuturor punctelor barei:

$$F = \Sigma\, dF = \Sigma \mu ds \cdot s \sin\alpha\omega^2 =$$

$$= \int_0^l \mu\omega^2 \sin\alpha \cdot s\, ds = \frac{\mu l^2}{2}\,\omega^2 \sin\alpha,$$

μ fiind masa unei unități de lungime $\mu l = \frac{G}{g}$, deci $F = \frac{Gl}{2g}\omega^2 \sin 2h$.

Pentru aflarea punctului de aplicare a forței centrifuge, facem suma tuturor momentelor elementare față de A: $\mu \sin\alpha \cos\alpha\omega^2 \int_0^l s^2\, ds = \frac{Gl}{2g}\,\omega^2 \sin\alpha\, d \cos\alpha$; găsim $d = \frac{21}{3}$. Scriind suma tuturor proiecțiilor forțelor pe axa Ox, găsim:

$$-R - T + \frac{Gl}{2g}\,\omega^2 \sin\alpha = 0.$$

Proiecțiile pe axa Oy: $S - G = 0$. Suma momentelor față de A

$$-\frac{G}{2}\, l \sin\alpha + \frac{G}{2g}\,\omega^2 l \sin\alpha \frac{2 \cdot l}{3} \cos\alpha - Tl \cos\alpha = 0.$$

De aici:

$$T = G \sin\alpha \left[\frac{\omega^2 l}{3g} - \frac{1}{2\cos\alpha}\right], \quad R = \frac{G}{2} \sin\alpha \left[\frac{\omega^2 l}{3g} - \frac{1}{2\cos\alpha}\right]$$

ω_{minim} este dat de $T = 0$, adică $\omega_{min} = \frac{3g}{21 \cos\alpha}$.

Pentru $\omega > \omega_{min}$, reacțiunile, printre care și tensiunile firului, **sînt cele** găsite mai sus.

Pentru a avea datele problemei, înlocuim

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{\sqrt{4l^2 - a^2}}.$$

I 10. *Doi gimnaşti de aceeaşi greutate G se atîrnă de capetele unei funii trecute peste un scripete vertical de rază r, mobil în jurul centrului său. La un moment dat, ei încep să se urce respectiv cu vitezele* v_1 *şi* $v_2 (v_1 > v_2)$ *în raport cu funia. Să se arate că la această competiţie, gimnaştii nu se pot întrece unul pe altul, dacă greutatea scripetelui este neglijabilă. Ce se va întîmpla însă, dacă scripetele este considerat disc plin de greutate Q? Frecarea pe axul scripetelui şi rezistenţa aerului se vor neglija.*

Al. Stoenescu, G. M. vol XLI, 1935.

Soluţie. Să notăm cu ω viteza unghiulară a scripetelui. Vitezele absolute ale gimnaştilor vor fi respectiv:

$$zu_1 = v_1 - \omega r, \quad u_2 = v_2 + \omega r$$

iar cantitatea de mişcare corespunzătoare:

$$mu_1 = \frac{G}{g}(v_1 - \omega r), \quad mu_2 = \frac{G}{g}(v_2 + \omega r)$$

Aplicînd teorema variaţiei cantităţilor de mişcare în raport cu axul fix O şi ţinînd seama că la momentul iniţial toate vitezele sînt nule, avem:

$$\frac{G}{g}(v_1 - \omega r)\, r - \frac{G}{g}(v_2 + \omega r)\, r = 0$$

Rezultă: $\omega = \dfrac{v_1 - v_2}{2r}$.

Vitezele absolute ale gimnaştilor sînt deci:

$$u_1 = v_1 - \omega r = \frac{v_1 + v_2}{2}; \quad u_2 = v_2 + \omega r = \frac{v_1 + v_2}{2},$$

iar viteza relativă $v_r = u_1 - u_2 = 0$.
Rezultă că gimnaşti se vor găsi în fiecare moment la acelaşi nivel deasupra solului.
În cazul în care scripetele este greu, va interveni şi momentul de mişcare al scripetelui I, în care I reprezintă momentul de inerţie al scripetelui faţă de axul O.
Vom avea:

$$\frac{G}{g}(v_1 - \omega r)\, r - \frac{G}{g}(v_2 + \omega r)\, r - I\omega = 0.$$

De unde:

$$\omega = \frac{\frac{G}{g}(v_1 - v_2)\, r}{I + 2\frac{G}{g} r^2}.$$

Şi ţinînd seama că $I = \frac{Qr^2}{2g}$, obţinem: $\omega = \frac{2G(v_1 - v_2)}{(4G + Q)r}$.

Vitezele absolute ale gimnaştilor sînt în acest caz:

$$u_1 = v_1 - \omega r = \frac{2G(v_1 + v_2) + Qv_1}{4G + Q},$$

$$u_2 = v_2 + \omega r = \frac{2G(v_1 + v_2) + Qv_2}{4G + Q},$$

iar viteza relativă:

$$v_r = u_1 - u_2 = \frac{Q(v_1 - v_2)}{4G + q} > 0.$$

Rezultă deci că în acest caz gimnastul cu viteza v_1 (faţă de funie) întrece pe cel cu viteza v_2.

I 11. *Două bare AOB şi A'OB'(AC = A'O = a, OB = OB' = b) de masă neglijabilă şi perpendiculare una pe alta se rotesc în propriul lor plan în jurul lui O cu viteza unghiulară constantă. În capetele A şi A' ale barelor se aşează cîte o masă M, iar în capetele B şi B' cîte o masă m. Să se determine poziţia unde trebuie aşezată o masă m_1, astfel ca axa O să nu fie acţionată de forţele de inerţie. Masele M, m, m_1 se vor considera punctuale.*

Al. Stoenescu, G. M. vol. XLVIII, 1942

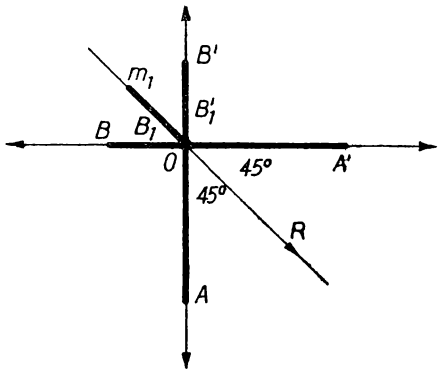


Fig. I 11

Soluţie. (fig. I 11). Să presupunem pentru fixarea ideilor $Ma > mb$.
Mişcarea circulară fiind uniformă, singurele forţe de inerţie sînt cele patru forţe de inerţie centrifugale date în figură, a căror rezultantă este îndreptată după bisectoarea unghiului AOA', mărimea sa fiind: $R = \sqrt{2}\,(Ma - mb)^2$ în care ω este viteza unghiulară constantă a sistemului.

Această rezultantă trebuie să fie echilibrată de forţa de inerţie datorată masei m_1. Rezultă deci că această forţă va trebui să acţioneze după direcţia bisec-

toarei unghiului AOA', în sensul opus rezultantei R şi să aibe aceeaşi mărime.

Notînd cu x distanţa de la masa m_1 la centrul O, va trebui să avem

$$m_1 x\omega^2 = R = \sqrt{2}(Ma - mb)\omega^2,$$

de unde: $x = \sqrt{2}\,\dfrac{Ma - mb}{m_1}$.

Se observă că se poate obţine de asemenea o echilibrare a maselor date aşezîndu-se pe barele OB şi OB' în B_1 şi B_1' cîte o masă m_1 la distanţa: $OB_1 = OB_1' = x\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{Ma - bm}{m_1}$.

I 12. *Un pătrat omogen greu din care s-a scos un disc circular de rază r, avînd centrul aşezat pe una din diagonale OA, poate oscila fără frecare în jurul axei orizontale, perpendiculară pe planul pătratului în vîrful său O. Să se determine poziţia punctului P şi valoarea lui r aşa fel ca lungimea pendulului simplu sincron să fie egală cu lungimea pendulului simplu sincron al pătratului întreg oscilînd în jurul aceleiaşi axe. Discuţie.*

V. Vâlcovici, G. M. vol. XLVIII, 1942

Soluţie. Lungimea l' a pendulului simplu sincron referitor la un pendul fizic este dată de formula $l' = \dfrac{I}{Ml}$, unde am însemnat cu M masa pendulului fizic, cu l distanţa centrului de greutate la axa de suspensie şi cu I momentul de inerţie faţă de axă. Dacă notăm cu indicele 1 mărimile privind pendulului constituit din pătratul întreg şi cu indicele 2 pe acelea privind pendulul format din pătratul perforat, enunţul ne spune: $I_1/M_1 l_1 = I_2/M_2 l_2$. Avem însă: $I_2 = I_1 - I_c$, $M_2 I_2 = M_1 l_1 - \pi r^2 x$, $\dfrac{I_1}{M_1 l_1} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}\,a$,

unde: I_c este momentul de inerţie al cercului din enunţ; a = latura pătratului considerat; $x = OP$. Am considerat masa specifică egală cu unitatea. Ţinînd seama de valoarea $\pi r_2\left(x^2 + \dfrac{r_2}{2}\right)$ a momentului de inerţie I_c precum şi de şirul, condiţia din enunţ devine

$$\frac{2\sqrt{2}}{3} r^2 ax = r^2\left(x^2 + \frac{r^2}{2}\right)$$

sau, neglijînd soluţia banală $r = 0$,

$$x^2 - \frac{2\sqrt{2}}{3} ax + \frac{r^2}{2} = 0.$$

Formula precedentă ne dă pe r cînd cunoaştem pe x:

$$r = \sqrt{\frac{4\sqrt{2}}{3} ax - 2x^2}.$$

Discuţie. Pentru ca valoarea lui r să fie reală trebuie să avem $x \leqslant \frac{2\sqrt{2}}{3} a$. Pe de altă parte, r nu poate întrece distanţa dela P la cea mai apropiată latură a pătratului. Aşadar;

a) pentru $x \in \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2} a\right)$ va trebui să avem $r \leqslant \frac{x}{\sqrt{2}}$

b) pentru $x \in \left(\frac{\sqrt{2}}{2} a, \frac{2\sqrt{2}}{3} a\right)$ va trebui să avem $r \leqslant a - \frac{x}{\sqrt{2}}$.

În cazul a) înlocuind pe r prin limita sa superioară $\frac{x}{2}$ vom obţine:

$$\frac{5x^2}{4} - \frac{2\sqrt{2}}{3} ax \geqslant 0, \text{ adică } \frac{a\sqrt{2}}{15} a \leqslant x,$$

ceea ce este imposibil, dat fiindcă limita superioară a lui x în cazul a) este $\frac{\sqrt{2}}{2} a < \frac{a\sqrt{2}}{15} a$. Deci cazul a) nu ne dă nici o soluţie. În cazul b) înlocuind pe r prin limita sa superioară $a - \frac{x}{\sqrt{2}}$ vom obţine: $\left(x - \frac{3\sqrt{2}}{5} a\right)\left(x - \frac{\sqrt{2}}{3} a\right) \geqslant 0$.

Deducem, sau $x \leqslant \frac{\sqrt{2}}{3} a$, ceea ce este imposibil, deoarece $\frac{\sqrt{2}}{3} a$ este mai mic decît limita inferioară $\frac{\sqrt{2}}{2} a$ a lui x, sau $x \geqslant \frac{3\sqrt{2}}{5} a$, ceea ce este posibil Cazul b) ne dă deci soluţii. Problema propusă are soluţii, dar numai pentru $x \in \left(\frac{3\sqrt{2}}{5} a, \frac{2\sqrt{2}}{3} a\right)$. Intervalul de variaţie al lui r va fi: $r \in \left(\frac{2}{5} a, 0\right)$.

Se poate verifica imediat că în intervalul pentru care problema are soluţii, r descreşte monoton de la $\frac{2}{5} a$ pînă la 0.

Partea a II-a

PROBLEME DIN REVISTE DE MATEMATICĂ DIN STRĂINĂTATE

Introducere

Lucrarea fiind concepută ca o culegere selectivă de probleme din Gazeta Matematică — așa cum am subliniat de mai multe ori în comentariile făcute — am urmărit, pe de o parte, să punem la dispoziția cititorilor un fond deosebit de valoros de probleme ce reprezintă contribuția generațiilor succesive de matematicieni și alți specialiști iubitori de matematică la patrimoniul spiritual al poporului nostru, iar pe de altă parte să evocăm numele multora dintre personalitățile științifice, din învățămînt și din producție, care au îmbogățit acest fond. Este o datorie de recunoștință patriotică în același timp profitabilă și instructivă pentru cei ce cultivă astăzi matematica.

Această prezentare retrospectivă dezvăluie o evoluție prețioasă a gîndirii matematice românești concretizată în probleme pline de conținut, originalitate și profunzime cărora li s-au adus soluții sugestive, ingenioase și bazate pe tehnici și metode originale. Acesta este cîștigul pe care îl poate realiza oricine parcurge cu creionul în mînă și cu atenția concentrată capitolele ordonate metodologic începînd de la cele pregătitoare și ajungînd la cele desăvîrșitoare.

Gazeta Matematică se bucură pe plan internațional de un frumos prestigiu, fiind citită și folosită de numeroși pasionați de rezolvarea de probleme, ca și de profesori care urmăresc să pregătească echipele naționale respective pentru confruntarea fairplay a olimpiadelor internaționale anuale. Ea ajunge și în mîinile unor profesori, redactori și editori de reviste de matematici de pretutindeni, cu care Gazeta Matematică are schimburi organizate. Astfel de schimburi sînt deosebit de prețioase prin posibilitatea pe care o dau de a se cunoaște natura, conținutul și orientarea generală a problemelor în diverse țări; de asemenea ele dezvăluie adesea metode originale sau cel puțin inedite pentru cititorul dintr-o țară, cînd ia contact cu problemele propuse în alte țări. De aceea, considerăm ca un sprijin deosebit de adecvat consacrarea părții a II-a unei selecții din problemele publicate în diverse reviste științifice din alte țări. Am ales în special reviste care ne vin în schimb la Gazeta Matematică, mai puțin cunoscute matematicienilor și în general celor care

cultivă probleme elementare de matematică. În țară s-au tradus mai multe culegeri de probleme din reviste sovietice de mare prestigiu cum este Kvant; în particular există traduceri de culegeri de probleme date la olimpiade, de aceea am evitat să preluăm lucrările existente. Revistele străine cultivă cu predilecție aplicațiile matematicii, publicînd probleme de modelare mateamtică în diverse domenii ale științei. Am ținut să punem pe cititor în cunoștință de acest aspect mai puțin cultivat la noi, în ultimele decenii, dar care era promovat cu competență și simpatie în Gazeta Matematică din primele decenii ale secolului nostru. Modelarea matematică este o ramură de excepțional interes și de o indiscutabilă actualitate și considerăm că ea trebuie dezvoltată odată cu etapele succesive ale învățămîntului matematic, îndeosebi în țara noastră, unde liceele au caracter de specialitate industrială, economică, sanitară sau artistică, alături de cele de matematică. De aceea, am considerat instructiv să reunim într-un capitol special, cap. XI, problemele cu caracter aplicativ, cap. XII fiind rezervat problemelor cu caracter teoretic.

Capitolul **XI**

PROBLEME INTERDISCIPLINARE CU SOLUȚII APLICATIVE (SA)

Introducere

O incursiune în textul acestei părți ne conduce imediat la secțiunea de teoria numerelor care însă este completată cu probleme ale căror soluții folosesc celebrul „principiu al lui *Dirichlet*", sau „principiul cutiei", altele, o extensiune a acestuia sub titulatura de „principiu extremal". Le vom găsi, de exemplu în (SA7.) cu caracter teoretic, în (SA8.) cu caracter aplicativ la organizarea unui concurs de șah, în (SA10.) unde principiul cutiei se aplică unui șir infinit de numere naturale, apoi în (SA6.) unde principiul extremal este aplicat unei probleme de organizare a unei rețele de drumuri între mai multe gospodării, în (SA9.), unde principiul extremal rezolvă o problemă cu caracter topologic.

Ecuații diofantice apar în (SA1.) și (SA2.) sub formă teoretică, în (SA12.) sub formă aplicativă. Problema (SA16.) este concepută de noi ca generalizare a unei probleme în care se aplică principiul cutiei pentru $x = 100$ și $q = 10$, publicate într-una din revistele străine.

O atenție specială s-a acordat problemelor de teoria mulțimilor sub forma elementară și cu caracter aplicativ, toate selecționate din proiectul britanic de reformă a învățământului secundar, publicate în 1962 în manuale ale elevului, cu indicații sumare de rezolvare în manualele profesorului. Este remarcabil faptul că prin raționamente și reprezentări elementare se pot rezolva probleme atractive ca (SA20.), care cer procentul locuitorilor unui oraș care vorbesc ambele limbi, franceză și germană. De asemenea (SA17) cere numărul femeilor care merg la teatru dintr-un grup de 120 persoane de ambele sexe, iar (SA18.) extrage din „Alice în țara minunilor" o amuzantă statistică a combatanților unei bătălii în care s-au pierdut ochi, brațe, picioare și dinți.

În secțiunea consacrată teoriei probabilităților și matematicilor aplicate, problema(SA19) arată cum observații elementare pot evita elaborări anevoioase, ceea ce permite extensiuni la cazuri cu numeroase evenimente; (SA20) este o problemă de societate. Interesantă este (SA28) care privește, de asemenea, relații sociale și (SA30.) referitoare la o competiție sportivă. Problema (SA32) a lui Gnedenko ca și (SA24), arată cît de importantă este gîndirea probabilistă în problemele vieții cotidiene și în același timp valoarea investigativă a acestei gîndiri.

Problema (SA26) studiază mișcarea unei particule de-a lungul unei linii l, sub acțiunea unei forțe îndreptate spre un punct 0 al lui l. În aparență ușoare, cerințele enunțului ne conduc în planul fazelor, unde perioada implică folosirea unei integrale euleriene, iar discuția cazurilor frontale implică folosirea valorii principale Cauchy. Problema (SA27), de cîntărire a unor monezi, dintre care una este falsă, impune folosirea unei logici bivalente foarte severă în lipsa unei formalizări, care ea însăși este o problemă.

SA 1. *Să se determine toate triunghiurile cu lungimile laturilor numere naturale, al căror perimetru este un număr egal cu numărul ce reprezintă dublul ariei triunghiului.*

R. R. Phelps, A. M. M., vol. 63, nr. 1, 1956

Soluție. Fie A aria unui astfel de triunghi dată prin formula lui Heron:

$$A^2 = p(p-a)(p-b)(p-c) \tag{1}$$

unde $a \leqslant b \leqslant c$ sînt lungimile laturilor triunghiului, iar p semiperimetrul său. Din ipoteză avem

$$2p = a + b + c = 2A, \text{ deci } p = A. \tag{2}$$

Ținînd cont de relația (2), relația (1) devine

$$A = (A-a)(A-b)(A-c) = xyz, \text{ unde } x = A-a, \quad y = A-b,$$
$$z = A-c \text{ și } x \geqslant y \geqslant z > 0. \tag{3}$$

Rezultă deci

$$x + y + z = xyz \tag{4}$$

sau

$$y(yz-1) \leqslant x(yz-1) = y + z \leqslant 2y.$$

Din prima și din ultima inegalitate rezultă

$$yz \leqslant 3, \text{ deci } z^2 \leqslant yz \leqslant 3, \text{ adică } z = 1.$$

Din (4) avem

$$y(x-1) = 1 + x \text{ sau } y = 1 + \frac{2}{(x-1)}.$$

Pentru ca y să fie număr natural nenul trebuie ca $x - 1 = 1$ sau $x - 1 = 2$, adică $x = 2$ sau $x = 3$. Pentru $x = 2$ rezultă $y = 3$. Pentru $x = 3$ avem $y = 2$. Soluția care satisface și inegalitatea (3) este $x = 3$, $y = 2$ și $z = 1$. Cum $A = 6$ rezultă $a = 6 - 3 = 3$, $b = 6 - 2 = 4$ și $c = 6 - 1 = 5$. Condiția cerută de problemă este satisfăcută deci numai de triunghiul cu laturile 3, 4 și 5.

Observație. În enunțul inițial al autorului triunghiul care îndeplinește condiția de mai înainte este numit triunghi perfect datorită analogiei cu numerele perfecte, care au suma divizorilor egală cu numărul dat.

SA 2. *Să se determine toate soluțiile în numere întregi nenule ale ecuației diofantice* $(x^2 + y)(x + y^2) = (x - y)^3$.

R. J. Stroeker, Nieuw Archief voor Wiskunde, vol. 28, nr. 1/1980

Soluție. Ecuația dată se mai poate scrie

$$2y^2 + (x^2 - 3x)y + 3x^2 + x = 0 \tag{1}$$

(s-a simplificat prin $y \neq 0$).

Pentru ca ecuația (1) să aibă soluții numere întregi, trebuie ca discriminantul ei $x(x + 1)^2 (x - 8)$ să fie pătratul unui număr întreg. Acest lucru se întîmplă cînd

$$x(x - 8) = z^2 \quad (z \text{ număr întreg nenul}) \quad \text{sau} \quad (x - 4)^2 = z^2 + 16.$$

Urmează deci că $z = 0$ sau $z = 3$ sau $z = -3$. Prin urmare $x \in \{8, -1, 9\}$. Deci ecuația dată va avea următoarele soluții (x, y):

$$(-1, -1), (8, -10), (9, -6) \text{ și } (9, -21).$$

SA 3. *Fie* $A_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} k(k + 1)$ *și* $B_n = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{i} k$, *unden,* $k, i \in \mathbf{N}^*$.

a) *Să se determine valorile lui* n *pentru care* $2A_n$ *este un pătrat perfect.*

b) *Să se determine valorile lui* n *pentru care* $|A_n|/2$ *este produsul a două numere naturale consecutive nenule.*

c) *Pentru ce valori naturale nenule ale lui* n, $|A_n|$ *divide* B_n?

H. T. Freitag, Fib. Quart, vol. 21, nr. 1/1983

Soluție. Să calculăm pe A_n în funcție de paritatea lui n. Fie deci $n = 2m$, $m \in \mathbf{N}^*$. Atunci rezultă

$$A_{2m} = \sum_{k=1}^{2m} (-1)^{k-1} k(k + 1) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ par}=2p}}^{2m} (-1)^{k-1} k(k + 1) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impar}=2p-1}}^{2m} (-1)^{k-1} k(k + 1) =$$

$$= \sum_{p=1}^{m} (-1)^{2p-1} 2p(2p + 1) + \sum_{p=1}^{m} (-1)^{2p-2} (2p - 1) 2p = -4 \sum_{p=1}^{m} p^2 - 2 \sum_{p=1}^{m} p +$$

$$+ 4 \sum_{p=1}^{m} p^2 - 2 \sum_{p=1}^{m} p = -4 \sum_{p=1}^{m} p = -4 \frac{m(m + 1)}{2} = -2m(m + 1). \tag{1}$$

Asemănător rezultă

$$A_{2m-1} = 2m^2. \tag{2}$$

Calculînd pe B_n, rezultă

$$B_n = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{i} k = \sum_{i=1}^{n} \frac{i(i+1)}{2} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} i =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{1}{2} \frac{n(n+1)}{2} =$$

$$= \frac{1}{4} n(n+1)\left(\frac{2n+1}{3} + 1\right) = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}. \tag{3}$$

a) Rezultă că $2A_n$ este un pătrat perfect, cînd n este un număr natural impar (a se vedea (1) şi (2)).

b) $|A_n|/2$ este produsul a doi întregi pozitivi consecutivi, cînd n este un număr natural par.

c) Din relaţiile (2) şi (3) rezultă că A_{2m-1} nu divide B_{2m-1} pentru $m > 1$. Pentru n număr natural par avem $B_{2m} = 2m(2m+1)/3$.

Observăm că B_{2m} este divizibil prin $A_{2m} = 2m(m+1)$ dacă $(2m+1)/3$ este un număr întreg, deci cînd $m \equiv 1 \pmod 3$ sau echivalent, atunci cînd $n \equiv 2 \pmod 6$.

SA 4. *Să se determine explicit termenul general al şirului dat de formula de recurenţă*

$$a_{n+2} = a_{n+1}\sqrt{1 - a_n^2} + a_n \sqrt{1 - a_{n+1}^2}, \quad (n \in \mathbb{N}^*),$$

unde $a_1, a_2 \in (0, 1)$, *folosind numerele lui Fibonacci.*

M. Benoze, Fib. Quart., vol. 21, nr. 1/1983

Soluţie. Fie $a_1 = \sin A$, $a_2 = \sin B$, unde $A, B \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ Urmează, deci

$$a_3 = \sin(A + B) = \sin(AF_1 + BF_2)$$

şi

$$a_4 = \sin(A + 2B)] = \sin(AF_2 + BF_3),$$

$F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 2$, fiind considerate ca numere din şirul Fibonacci. Să arătăm prin inducţie că pentru $n > 1$ avem următoarea egalitate ce depinde de n:

$$a_{n+2} = \sin(AF_n + BF_{n+1}).$$

În ipoteza că relația este adevărată pentru n, vom avea

$$a_{n+3} = a_{n+2}\sqrt{1-a_{n+2}^2} + a_{n+1}\sqrt{1-a_{n+2}^2} = \sin(AF_n + BF_{n+1})\cos(AF_{n-1} + BF_n) + \sin(AF_{n-1} + BF_n)\cos(AF_n + BF_{n+1}) =$$
$$= \sin[A(F_n + F_{n-1}) + B(F_n + F_{n+1})] = \sin(AF_{n+1} + BF_{n+2}).$$

Deci proprietatea presupusă se păstrează pentru $n+1$ și în baza inducției matematice este adevărată pentfu orice $n < 1$.

SA 5. *Fie $p \geqslant 3$ un număr prim. Pentru fiecare $k \in \{1, 2, ..., p-1\}$ se notează cu a_k restul împărțirii lui k^p prin p^2. Să se arate că $a_1 + a_2 + ... + a_{p-1} = \frac{p^3 - p^2}{2}$.*

Kvant, nr. 2/1978

Soluție. Fie $k \in \{1, 2, ..., p-1\}$ fixat. Din teorema împărțirii cu rest avem

$$k^p = \mathcal{M}p^2 + a_k \text{ unde } 0 \leqslant a_k < p^2. \tag{1}$$

Dar nu putem avea $a_k = 0$, căci atunci ar rezulta $k^p = \mathcal{M}p^2$, deci p ar divide k^p; cum p este prim, rezultă că p ar divide k, contradicție. Așadar,

$$0 < a_k < p^2. \tag{2}$$

În mod analog vom avea

$$(p-k)^p = \mathcal{M}p^2 + a_{p-k}, \tag{3}$$

unde
$$0 < a_{p-k} > p^2. \tag{4}$$

Avem $(p-k)^p = p^p - C_p^1 p^{p-1}k + ... + (-1)^{p-1}C_p^{p-1}pk^{p-1} + (-1)^p k^p =$
$= \mathcal{M}p^2 - k^p$, deci $k^p + (p-k)^p = \mathcal{M}p^2$.

Atunci, adunînd egalitățile (1) și (3), obținem

$$\mathcal{M}p^2 = \mathcal{M}p^2 + a_k + a_{p-k}, \text{ deci } a_k + k_{p-k} = \mathcal{M}p^2. \tag{5}$$

Adunînd (2) și (4) obținem $0 < a_p + a_{p-k} < 2p^2$ și atunci pentru ca (5) să fie satisfăcută, trebuie ca

$$a_k + a_{p-k} = p^2. \tag{6}$$

Scriind relația (6) pentru $k = 1, 2, ..., p-1$ și însumînd egalitățile găsite, obținem $2(a_1 + a_2 + ... + a_{p-1}) = p^2(p-1)$, adică tocmai relația din enunțul problemei.

SA 6. *Pe un teritoriu plan sînt fixate $2n$ puncte, dintre care nu există 3 coliniare. Punctele mulțimii $G = \{G_1, G_2, ..., G_n\}$ reprezintă gospodării, iar punctele mulțimii $F = \{F_1, F_2, ..., F_n\}$, fîntîni. De la fiecare gospodărie trebuie*

să se construiască un drum drept pînă la una dintre fîntîni. Să se arate că oricum ar fi așezate gospodăriile și fîntînile, se pot determina drumurile în așa fel încît două oarecare să nu se intersecteze.

M. U. Vol. 25, nr. 1/1979

Soluție. În fond, problema cere să se realizeze o bijecție $\varphi: G \to F$ cu proprietatea ca segmentele $|G_i\varphi(G_i)|$ să nu se intersecteze două cîte două. Mulțimea $\{|G_i\varphi(G_i)|,\ i = 1, 2, ..., n\}$ constituie un sistem de drumuri. Permutînd în toate modurile imaginile $\varphi(G_i)$ obținem $n!$ bijecții posibile, fiecare determinînd un sistem posibil de drumuri. Dacă dintre acestea alegem unul pentru care suma tuturor celor n distanțe $\|G_iF_k\|$ este minimă (ceea ce este posibil, deoarece există un număr finit de bijecții), acesta corespunde cerinței din enunț. Într-adevăr, fie $|G_iF_j|$ și $|G_kF_l|$ două drumuri din sistemul minimal. Printre cele patru puncte nefiind trei coliniare, deducem că $G_iG_kF_jF_i$ este un patrulater care poate fi convex sau concav. Dacă acesta este concav, oricum ar fi așezate vîrfurile, diagonalele nu se intersectează, deci oricare două din cele patru vîrfuri pot fi G_i, G_k și celelalte două F_j, F_l. Unind G_i cu F_j și G_k cu F_l avem două drumuri care nu se intersectează. Dacă $G_iG_kF_jF_i$ este convex și $|G_iF_j|$, $|G_kF_l|$ sînt laturi, avem din nou două drumuri care nu se intersectează. Dacă însă $|G_iF_j|$ și $|G_kF_l|$ sînt diagonale, ele se vor intersecta. Însă într-un patrulater convex suma lungimilor celor două diagonale este mai mare decît suma lungimilor a două laturi opuse (rezultă imediat luînd punctul O de intersecție al diagonalelor ca vîrf comun a două triunghiuri formate cu segmentele de diagonale și cele două laturi opuse). În consecință, dacă unim G_i cu F_l și G_k cu F_j, avem un drum total mai scurt decît cel presupus minimal și aceasta contrazice caracterul minimal al sistemului considerat. Deci în acest sistem minimal nu pot exista două drumuri ce se intersectează.

Comentarii. a) În rezolvare s-a aplicat principiul extremal (a se vedea problema SA 9), soluția noastră luînd în considerație și cazul patrulaterelor concave, care pot apărea într-o configurație generală. De asemenea, s-a ținut seama de caracterul aleator al distribuției gospodăriilor și fîntînilor. La prima vedere s-ar impune criteriul de minimalitate a distanțelor gospodărie — fîntînă, dar configurația pe teren poate infirma criteriul, de exemplu, dacă $n - 1$ perechi de puncte pot fi unite prin segmente paralele de lungimi egale, iar ultima pereche poate fi unită numai printr-un segment, care intersectează cel puțin unul din aceste drumuri.

b) Problema poate fi rezolvată și prin inducție completă prin același procedeu al înlocuirii a două drumuri care se intersectează ca diagonale ale unui patrulater convex prin două laturi ale acestuia, permutînd imaginile fîntînilor.

c) De aceeași natură este și următoarea problemă pe care o încredințăm cititorilor.

Să se arate că fiecare poliedru convex are cel puțin două fețe cu același număr de muchii.

SA 7. *Fie* $0 < n_i \leqslant 100$, $i = 1, 2, ..., 10$, *zece numere naturale diferite. Să se demonstreze că mulțimea* $S = \{n_1, n_2, ..., n_{10}\}$ *conține două submulțimi disjuncte ale căror elemente au aceeași sumă.*

Ontario Math. Bull, vol. 15, nr. 1/197

Soluție. Numărul submulțimilor nevide ale lui S este $2^{10} - 1 = 1023$. Elementele acestei submulțimi fiind numere de la 1 la 100 și submulțimile avînd cel puțin un element și cel mult 10, suma acestor elemente variază de la 1 la $91 + 92 + ... + 99 + 100 = 995 < 1023$. Prin urmare, aplicînd principiul cutiei vor exista cel puțin două submulțimi avînd același număr ca sumă a elementelor. Fie A și B două astfel de mulțimi. Ele nu sînt însă în general disjuncte, dar dacă luăm $A \setminus (A \cap B)$ și $B \setminus (A \cap B)$ acestea vor fi disjuncte și vor avea din nou aceeași sumă a elementelor.

Comentarii. Problema este o aplicație a principiului cutiei. Putem chiar estima numărul submulțimilor care au aceeași sumă a elementelor aplicînd o bijecție între $\{1, 2, ..., 955\}$ și $\mathcal{P}(S)$. Rămîn $1023 - 955 = 68$ submulțimi care nu sînt imagini și care deci au aceeași sumă a elementelor ca unele dintre submulțimile codomeniului bijecției.

Problema poate fi generalizată.

SA 8. *Un maestru de șah are încă 77 zile pentru a se pregăti în vederea unui concurs. De aceea își propune să joace în fiecare zi cel puțin o partidă, dar în total cel mult 132 partide. Să se arate că există un șir de zile consecutive în care va juca în total 21 partide.*

M. U. vol. 25, nr. 1/1979

Soluție. Notăm cu a_i numărul de partide jucate pînă în cea de a i zi inclusiv. În conformitate cu condițiile autoimpuse vom avea inegalitățile $1 \leqslant a_1 < a_2 ... < a_{77} \leqslant 132$.

Adăugînd peste tot 21, șirul de inegalități devine $22 \leqslant a_1 + 21 < a_2 + 21 < ... < a_{77} + 21 \leqslant 153$.

Șirul $a_1, a_2, ..., a_{77}, a_1 + 21, a_2 + 21, ..., a_{77} + 21$ conține 154 numere naturale cuprinse între 1 și 153. În consecință, cel puțin două dintre ele trebuie să fie egale. Acestea trebuie să se găsească primul în prima jumătate, cel de al doilea, în cea de a doua jumătate a șirului complet, din cauză că fiecare semișir este monoton crescător, deci nu ar putea conține două elemente egale. Există deci doi indici i și j astfel încît $a_i = a_j + 21$, numerele a_i și a_j fiind din primul semișir. În consecință, din ziua $j + 1$ și pînă în ziua i inclusiv va juca în total 21 partide.

Comentarii. În rezolvarea acestei probleme s-a aplicat așa numitul „principiu al cutiei" formulat de *Dirichlet* și aplicat în teoria numerelor. Într-o formă concretă modelatoare și sugestivă principiul poate fi ilustrat prin faptul că „dacă $n + 1$ perle sînt puse în n cutii, atunci cel puțin una dintre cutii va conține mai mult decît o perlă". Articolul semnat de prof. *A. Engel* și *H. Sewerin* îi acordă calitatea de a conduce la rezolvarea unui număr neașteptat

tat de mare de probleme și de a fi o afirmație implicită de existență, dar nu dă nici un ajutor pentru a se găsi un sertar cu un conținut multiplu. De exemplu, în cazul problemei rezolvate s-a procedat în așa fel încît să existe 154 numere naturale cuprinse între 1 și 153, în 153 sertare, deci cel puțin într-un sertar trebuie să existe două numere egale. Construcția șirului este astfel făcută încît unul dintre numere face parte din prima categorie, pe cînd celălalt, din cea de a doua categorie, ceea ce permite ca aducîndu-l și pe al doilea în șirul inițial să se pună în evidență diferența de 21 partide, care au fost jucate între ziua dată de primul și ziua dată de cel de al doilea număr. Evident că procedeul poate fi imitat și extins în diverse moduri, la dispoziția și imaginația cititorului, care i-a desprins tehnica și semnificația.

SA 9. *Într-un plan P sînt date n puncte. Fiecare trei puncte dintre acestea formează un triunghi cu aria $\leqslant 1$. Să se arate că toate cele n puncte sînt cuprinse într-un triunghi cu aria $\leqslant 4$.*

M. U. vol. 25, nr. 1/1979

Soluție. Se pot forma C_n^3 triunghiuri, unele eventual de arie nulă. Fie ABC unul din triunghiurile cu aria maximă $S \leqslant 1$. Ducînd prin A, B, C paralele la laturile lui ABC se formează triunghiul $A_1B_1C_1$ cu aria $S_1 = 4S \leqslant 4$. Acest triunghi conține toate cele n puncte. Într-adevăr, dacă un punct P din cele n puncte ar fi exterior lui $A_1B_1C_1$, el s-ar găsi cel puțin într-unul dintre semiplanele determinate de dreptele-suport ale laturilor acestuia care nu include triunghiul ABC.

Fie, de exemplu, B_1C_1 această dreaptă; atunci ținem cont că $BC \| B_1C_1$ și triunghiul PBC are vîrful P în afara lui $A_1B_1C_1$. În aceste conditii aria lui PBC este mai mare ca S, fiindcă toate triunghiurile cu baza $|BC|$ și de arie S au vîrful pe B_1C_1. Această constatare contrazice faptul că S este aria maximă a triunghiurilor formate cu 3 din cele n puncte.

Comentarii. Problema are caracter topologic și calitativ. Măsura ariilor este folosită numai pentru a se stabili apartenența întregului sistem de puncte la o mulțime definită printr-un triunghi. Rezolvarea ei face apel, cum atrage atenția prof. *A. Engel*, autorul articolului *„Principiul extremal ca principiu euristic în rezolvarea problemelor"*, la acest principiu, care recomandă luarea în considerație a unui element extremal al mulțimii, care formează obiectul problemei. Aici, fiindcă triunghiurile erau caracterizate prin ariile lor, principiul indica alegerea celui de arie maximă, întrucît cerința era ca punctele să fie cuprinse într-un triunghi de arie cel mult egală cu o arie dată. În cazul în care apar mai multe elemente extremale, nu se poate indica alegerea unuia anumit și, în general, este tot atît de potrivit să se aleagă oricare dintre ele pentru desfășurarea strategiilor de rezolvare. Caracterul euristic al acestui principiu se manifestă în faptul că nu este justificat decît de eficiența lui, care se dovedește în practică adesea în probleme, care prezintă o complexitate, care împiedică orice posibilitate de a discerne un drum cu un punct de

plecare determinat şi cu etape ce pot fi stabilite în mod unic, sau cel puţin prin eliminarea justificată a unor variante fără perspective. Principiul extremal conduce de obicei la rezolvări de probleme spectaculoase, care la prima vedere par inabordabile.

SA 10. *Se construieşte un şir* $\{a_n\}$ *pornind de la un întreg pozitiv iniţial* a_0 *şi se efectuează alternativ următoarele două operaţii:*

a) se face suma cifrelor termenului a_i;

b) se ridică la puterea $k \geqslant 2$, *unde* k *este un întreg dat, începîndu-se fie cu operaţia a), fie cu b). Să se arate că orice astfel de şir* $\{a_n\}$ *este ciclic.*

Ontario Math. Bull, vol. 15, nr. 1/1979

Soluţie. Avînd dreptul de a începe cu oricare dintre operaţiile a) sau b), vom porni cu b), fără a impieta asupra generalităţii, fiindcă dacă aplicăm iniţial a), formînd pe a_1, vom putea începe cu acesta ca iniţial, fiind de data aceasta obligaţi să aplicăm b). Fie $m > 0$ un întreg astfel încît $a_0 < 10^m$ şi $9k < \frac{10^m}{m}$. Un astfel de întreg există pentru orice $a_0 > 0$ şi orice $k > 0$, oricît de mare ar fi a_0 şi k, fiindcă $\frac{10^p}{p}$ este funcţie crescătoare de p şi $\lim_{p\to\infty} \frac{10^p}{p} = \infty$.

Vom arăta că pentru orice $p \geqslant 0$ vom avea $a_{2p} < 10^m$. Într-adevăr, pentru $p = 0$, $a_0 < 10^m$ prin alegerea lui m. Vom raţiona prin inducţie: să presupunem $a_{2p} < 10^m$. Cum $2p$ este par, pentru formarea lui a_{2p+2} vom aplica b), deci $a_{2p+1} = (a_{2p})^k < 10^{km}$. Pentru a forma pe a_{2p+2} va trebui să aplicăm lui a_{2p+1} operaţia a), deci să efectuăm suma cifrelor lui a_{2p+1}. Scriindu-l în baza 10, va avea cel mult km cifre, fiecare dintre acestea fiind cel mult egală cu 9. Deci, notînd cu l_i. $0 \leqslant i \leqslant km - 1$ cifrele acestei scrieri (unele pot fi nule), avem $a_{2p+1} = \sum_{i=0}^{km-1} l_i\, 10^i \leqslant 9 \sum_{i=1}^{km-1} 10^i = \underbrace{99 \ldots 99}_{km \text{ cifre.}}$

Vom avea aşadar: $a_{2p+1} \leqslant \underbrace{9 + 9 + \ldots + 9}_{km \text{ ori}} = 9\ km \leqslant 10^m$, deci proprietatea este generală. Şirul $\{a_n\}$ fiind infinit prin modul în care este construit şi fiind format din numere naturale toate mărginite superior de 10^m, prin aplicarea principiului cutiei rezultă că trebuie să existe cel puţin doi indici $p_1 < p_2$ astfel încît $a_{2p_1} = a_{2p_2}$. Dar aceasta arată că operaţia b) va acţiona asupra ambilor termeni, conducînd la aceleaşi rezultate, deci şirul va deveni ciclic cu perioada $2(p_2 - p_1)$.

Comentarii. Problema este o aplicaţie a principiului cutiei asupra unui *şir infinit* în care termenii sînt numere naturale şi orice secţiune în şir este considerată ca mulţime a valorilor termenilor, finită. Deci prin stabilirea unei margini superioare a termenilor obţinem o submulţime finită, căreia i se poate aplica principiul cutiei.

SA 11. *Fiind date n numere întregi a_1, a_2, ... nu în mod necesar diferite există totdeauna o submulțime a acestei mulțimi de numere, cu proprietatea că suma elementelor sale este divizibilă prin n.*

P. Erdős M. U. vol. 25, nr. 1

Soluție. Considerăm numerele întregi $s_k = a_1 + a_2 + \ldots + v_k (k = 1, \ldots, n)$. Dacă unul dintre ele este divizibil prin n, problema este rezolvată. Dacă nu, resturile împărțirii lor prin n sînt toate nenule. Ori, există numai $n - 1$ resturi (mod n) diferite de zero. În acest caz două dintre numerele s_k trebuie să dea resturi egale.

Fie s_p și s_q cu $p < q$ cele două numere. Avem

$s_q \equiv s_p \pmod{n}$, de unde $s_q - s_p = a_{p+1} + \ldots + a_q \equiv 0 \pmod{n}$.

Ori, aceasta arată că $\{a_{p+1}, a_{p+2}, \ldots, a_n\}$ este o parte nevidă a șirului dat, cu proprietatea cerută.

Comentarii. S-a aplicat principiul cutiei construindu-se o mulțime cu n elemente dintre care numai $n-1$ pot fi distincte, de unde concluzia că există două egale, în speță două resturi (mod n).

Demonstrația pune în lumină o remarcabilă proprietate cu numeroase posibilități de aplicații în teoria numerelor, în teoria grupurilor, ca și în alte domenii în care intervin mulțimi finite. Ea este în plus susceptibilă de generalizări fecunde, de exemplu, la cazuri în care din n elemente numai $n - m$ pot fi diferite.

SA 12. *Într-un magazin, în U.R.S.S., un cumpărător face cumpărături de* **190** *ruble și are pentru achitat această sumă numai hîrtii de 30 ruble, iar casierul nu are, pentru rest, decît hîrtii de 50 ruble. Cum se poate achita suma, în cîte moduri și care este soluția?*

Mathématique et pédagogie, nr. 38/1982

Soluție. Notăm cu x numărul de hîrtii de 30 ruble pe care intenționează cumpărătorul să le dea casierului și cu y numărul de hîrtii de 50 ruble pe care le poate da casierul ca rest. Vom avea

$$30x - 50y = 190 \Rightarrow x = \frac{19 + 5y}{3} = 6 + y + \frac{1 + 2y}{3}.$$

Cum x trebuie să fie întreg pozitiv notăm $\frac{1 + 2y}{3} = t$ și deci $y = \frac{3t - 1}{3} =$ $= t + \frac{t - 1}{2}$ cu $t =$ întreg. Punem $\frac{t - 1}{2} = u$, deci $t = 2u + 1$ cu $u =$ $=$ întreg. Deducem imediat $y = 1 + 3u$, $x = 8 + 5u$ cu $1 + 3u \geqslant 0{,}8 +$ $+ 5u > 0$, de unde $u \geqslant -\frac{1}{3}$, $u > -\frac{8}{5}$ și cum $u =$ întreg, valorile lui u

acceptabile vor fi $u = 0, 1, 2, \ldots,$. Acestora le corespund o infinitate de moduri de plată:

$$x = 8,\ y = 1 \quad \text{sau} \quad x = 13,\ y = 4 \quad \text{sau} \quad x = 18,\ y = 7, \ldots, .$$

Deci plata se poate face, iar soluția optimă este cea în care se folosește cel mai mic număr de hîrtii de 30 și 50 ruble, adică $x = 8$, $y = 1$.

Comentarii. Problema este evident o aplicație a rezolvării ecuației diofantice $ax + by = c$ cu a, b, c numere întregi, care admite o infinitate de soluții cînd a și b sînt prime între ele sau, în general, cînd c.m.m.d.c. al lui a și b divide pe c. Ecuațiile diofantice ridică probleme delicate, putînd avea sau nu soluții, în număr finit sau infinit, cînd au soluții. Exemplul următor din aceeași revistă este instructiv:

Dimensiunile unui dreptunghi sînt măsurate în numere naturale. Există astfel de dreptunghiuri în care perimetrul și aria să aibă ca măsuri același număr ξ

Dacă x și y sînt dimensiunile dreptunghiului, ecuația problemei va fi $2(x + y) = xy$, de unde $x = \dfrac{2y}{y-2} = 2 + \dfrac{4}{y-2}$ cu $y - 2 > 0$ divizor al lui 4. Rezultă ușor că $y = 3$, $x = 6$; $y = 4$, $x = 4$ și $y = 6$, $x = 3$ sînt singurele soluții admisibile. Din punct de vedere geometric, avem două dreptunghiuri cu aceleași dimensiuni permutate între ele și un pătrat, ceea ce se explică prin simetria ecuației.

SA 13. *Fie a_1, a_2, ... un șir infinit crescător de numere naturale. Să se arate că o infinitate de numere a_m din acest șir pot fi puse sub forma $a_m = xa_p + ya_q$ cu x, y numere naturale determinate și $p \neq q$.*

A XVII-a Olimpiadă internațională de matematică/1975 M. U. vol. 25, nr. 1

Soluție. Putem presupune oricînd $a_1 \geqslant 1$, deci $a_2 \geqslant 2$ etc. Fie a_j cu $j > 1$ un element al șirului. Împărțind ceilalți termeni prin a_j. vor exista $a_j - 1$ resturi mod a_j. Cum șirul are o infinitate de termeni, va exista cel puțin o astfel de clasă de resturi în care se cuprinde o infinitate de termeni a_m. Cum șirul este mărginit inferior de a_1, va exista în această clasă un cel mai mic număr a_p. Scriind $a_m \equiv a_p \pmod{a_j}$, această relație este echivalentă cu $a_m = a_p + ya_j = 1 \cdot a_p + ya_j = xa_p + ya_j$ cu $x = 1$, $y \geqslant 1$.
Astfel toate condițiile sînt îndeplinite și problema este rezolvată.

Comentarii. În soluția prezentată în M.U. se alege $a_j = a_2$ ca fiind cel mai mic termen al șirului, sigur diferit de 1. Această precauție nu este indispensabilă, fiindcă neglijînd o secțiune inițială finită din șir, raționamentul rămîne valabil.

Observăm că metoda de rezolvare implică aplicarea principiului cutiei unei mulțimi infinite, care trebuie să intre într-un număr finit de cutii.

SA 14. *Să se calculeze suma tuturor numerelor mai mari decît 10 000, formate numai cu cifre impare şi fără ca una din cifre să se repete într-unul din numere.*

Ontario Sec. School Math. Bull. vol. 19, nr. 3/1983

Soluţie. Un astfel de număr este 13 579 şi toate celelalte se obţin prin permutarea tuturor acestor cifre. Ori, numărul permutărilor de 5 obiecte este $5! = 120$, iar fiecare cifră va apărea în fiecare număr în diferite poziţii. Fie $C \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$ una din aceste cifre. Cînd se află în poziţia întîi contribuţia ei la sumă va fi de forma $C0000$. Dar în această poziţie C se va găsi în $4! = 24$ numere, fiindcă celelalte ocupă permutări de 4 obiecte ca locuri. Deci, contribuţia lui C în prima poziţie va fi $24 \times C0000$. În a doua poziţie, un raţionament analog conduce la contribuţia $24 \times 0C000$ etc. În total contribuţia lui C la sumă va fi:

$$24(C0000 + C000 + C00 + C0 + C) = 24\,C(11111).$$

Dînd lui C valorile 1, 3, 5, 7, 9 şi însumînd, vom avea ca sumă

$$24(1 + 3 + 5 + 7 + 9) \times 11111 = 600 \times 11111 = 6\,666\,600.$$

Comentarii. Problema este de aritmetică elementară, folosind totuşi noţiuni de combinatorică. Ea poate fi folosită ca sursă pentru numeroase alte probleme.

SA 15. *Fiind dat numărul 4444^{4444} în baza 10, fie A suma tuturor cifrelor sale şi B suma cifrelor lui A. Să se determine suma cifrelor lui B.*

Parabola, vol. 14, nr. 3/1978

Soluţie. Strategia de rezolvare se bazează pe faptul că suma cifrelor unui număr este congruentă cu numărul însuşi mod 9. Cu alte cuvinte, împărţind pe A cu 9 vom avea acelaşi rest ca şi în împărţirea lui B cu 9. Deci, dacă C este suma cifrelor lui B, vom avea

$$N = 4444^{4444} \equiv A \equiv B \equiv C \pmod 9. \tag{1}$$

Pentru evaluarea lui A este necesar să estimăm întîi numărul de cifre ale numărului dat:

$$N = 4444^{4444} < 10\,000^{4444} = (10^4)^{4444} = 10^{17\,776}.$$

Acesta va avea mai puţin de 17 777 cifre. Cum maximul numerelor de o cifră este 9, o estimare va fi

$$A < 9 \times 17\,776 < 199\,999 \text{ şi deci } B < 46.$$

Pentru o mai bună evaluare, observăm că $4444 \equiv 7 \pmod 9$, deci

$$N = 4444^{4444} \equiv 7^{4444} \equiv 7^{3 \times 1481 + 1} \equiv (7^3)^{1481} \cdot 7 \pmod 9;$$

dar cum $7^3 = 343 \equiv 1 \pmod 9$, vom scrie în continuare

$$N \equiv 1^{1481} \cdot 7 \equiv 7 \pmod 9.$$

Astfel în baza relațiilor (1):

$$N \equiv A \equiv B \equiv C \equiv 7 \pmod 9$$

și cum $B < 46$, vom avea $\max C = 12$, corespunzător lui $B = 39$, a cărui sumă a cifrelor este cea mai mare. Cum însă $C \equiv 7 \pmod 9$, va trebui să avem $C = 7$.

Comentarii. Raționamentul urmat în problemă este susceptibil de generalizări. Teoretic se poate aplica unui număr de forma n, dacă se cunoaște numărul de cifre și restul împărțirii cu 9. De asemenea, se pot concepe diverse variații pe aceeași temă. În orice caz este un raționament elegant aplicat unei probleme în care o tratare directă ar însemna o simplă înșirare de calcule uriașe cu un rezultat modest față de efortul făcut, efort, dealtfel, lipsit de merite deosebite.

SA.16. *Fie $\{1, 2, ..., n\}$ mulțimea primelor n numere naturale. Să se arate că se poate determina un număr natural $q \leqslant n$ minimal, astfel încît orice parte $S = \{p_1, p_2, ..., p_q\}$ a acesteia, avînd q elemente distincte $0 < p_i \leqslant n$, să conțină două submulțimi disjuncte ale căror elemente să aibă aceeași sumă.*

Acad. *Nicolae Teodorescu,*

Soluție. Evident $q > 2$, fiindcă orice mulțime $\{p_i, p_j\}$ cu două elemente are trei submulțimi nevide: $\{p_i\}$, $\{p_j\}$ și $\{p_i, p_j\}$ dacă $p_i \neq p_j$, și se vede că $p_i + p_j \neq p_i$, iar $p_i + p_j \neq p_j$ (fiindcă $p_i, p_j \neq 0$). Pentru $q = 3$ se pot da exemple de mulțimi $\{p_i, p_j, p_k\}$ având $p_i \neq p_j \neq p_k \neq p_i$ și conținînd submulțimi de elemente cu aceeași sumă. De exemplu $\{1, 3, 4\}$ are $\{1, 3\}$ și $\{4\}$ ca submulțimi disjuncte ale căror elemente au aceeași sumă. Însă se pot da numeroase exemple de submulțimi cu trei elemente, dacă $n > 3$, în care nu vor exista astfel de submulțimi. Este suficient să luăm $\{1, 3, 5\}$ ca exemplu, care nu are două părți cu elemente având aceeași sumă. Semnificația termenului *„minimal"* este: cel mai mic cardinal astfel încît orice mulțime $\{p_1, p_2, ..., p_q\}$ extrasă din $\{1, 2, ..., n\}$ să aibă proprietatea cerută. Într-adevăr, dacă un q a fost determinat și $q < n$, este suficient să adăugăm un element p_{q+1} mulțimii $\{p_1, p_2, ..., p_q\}$ pentru a avea o mulțime $\{p_1, p_2, ..., p_q, p_{q+1}\}$ care conține două submulțimi cu proprietatea cerută.

Într-adevăr, cele două submulțimi găsite anterior sînt incluse și în noua mulțime $\{p_1, p_2, ..., p_q, p_{q+1}\}$. Astfel se precizează semnificația termenului „minimal" ca atribut al cardinalului q: trebuie ca *în orice* mulțime $S = \{p_1, p_2, ..., p_q\}$ cu q elemente, extrasă din $\{1, 2, ..., n\}$, să existe cel puțin două submulțimi disjuncte având aceeași sumă a elementelor și această proprietate să nu aibă loc în mulțimi cu $q - 1$ elemente.

Dacă mulțimea S are q elemente, ea va avea $2^q - 1$ submulțimi cu $1, 2, ..., q$ elemente. Considerînd toate mulțimile de tip S ce pot fi extrase din $\{1, 2, ..., n\}$.

părțile acestora vor avea ca sume ale elementelor lor numerele naturale cuprinse între 1 și $(n-q+1)+(n-q+2)+\ldots+(n-q+q)=\sum_{i=1}^{n} i-\sum_{j=1}^{n-q} j=$ $=\frac{n(n+1)}{2}-\frac{(n-q)(n-q+1)}{2}=\frac{q(2n-q+1)}{2}$. Această ultimă sumă este cea mai mare care se poate realiza în cele 2^q-1 submulțimi. Prin urmare vom avea ca sume posibile, *cel mult*, toate numerele naturale cuprinse între 1 și $\frac{q(2n-q+1)}{2}=qn-\frac{q(q-1)}{2}$. Dacă numărul părților lui S va fi mai mare decît $qn-\frac{q(q-1)}{2}$, vom putea aplica principiul cutiei și vor exista cel puțin două submulțimi avînd aceeași sumă a elementelor. În realitate vor exista, desigur, atîtea mulțimi avînd două cîte două aceeași sumă a elementelor, sumele putînd apărea de mai multe ori, cît va fi diferența:

$$2^q-1-\left(qn-\frac{q(q-1)}{2}\right)>0. \tag{1}$$

Problema revine la rezolvarea inegalității (1) în raport cu $q\leqslant n$. Aceasta se pune sub forma

$$\frac{2^q}{q}+\frac{q-1}{2}-\frac{1}{q}>n \tag{1'}$$

Funcția $y=\frac{2^x}{x}$, definită în $[1,\infty)$, are un minim pentru $x=\frac{1}{\ln 2}$, derivata sa $y'=2^x\cdot\frac{x\ln 2-1}{x^2}$, anulîndu-se în acest punct și trecînd de la valori negative la valori pozitive; funcția devine crescătoare în intervalul $\left[\frac{1}{\ln 2},\infty\right)$, iar minimul său este e ln 2. Pentru $q=2$, inegalitatea devine $2>n$, deci nu satisface condiția $n\geqslant q=2$. Pentru $q=3$, ea devine $\frac{10}{3}>n$, deci este satisfăcută pentru $n=3$, care satisface condiția $q\leqslant n$, deci în $\{1,2,3\}$ trebuie să existe părți cu proprietatea din enunț. Într-adevăr, avem ca părți $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{2,3\}$, $\{1,2,3\}$. Dintre acestea $\{3\}$ și $\{1,2\}$ au aceeași sumă a elementelor și sînt și disjuncte. Întrucît $y=2^x/x$ este crescătoare pentru $x\geqslant 1/\ln 2$ și $\lim_{x\to\infty} 2^x/x=\infty$, ecuația $2^x/x=n$ admite o singură rădăcină x_0, funcția y avînd proprietatea lui Darboux. Vom avea $x_0\leqslant n$, începînd de la $n=4$. Într-adevăr, scriind $2^n/n\geqslant n$, deci $2^n\geqslant n^2$, pentru $n=2$ avem egalitate, pe cînd pentru $n=3$ inegalitatea este verificată. Pentru $n=4$, avem din nou egalitate, iar pentru $n=5$, $32>25$ și deci inegalitatea

este verificată. Cum funcția exponențială crește mai repede decît orice putere întreagă a variabilei, vom avea $2^n > n^2$ pentru $n \geqslant 5$, (ceea ce se poate dovedi și prin inducție), deci rădăcina x_0 a ecuației $2^x/x = n$ va fi mai mică decît n, pentru $n \geqslant 5$.

Să notăm $r - 1 = [x_0]$= partea întreagă a lui x_0, ceea ce ne permite să scriem inegalitatea

$$\frac{2^{r-1}}{r-1} \leqslant n < \frac{2^r}{r} \tag{2}$$

și să punem (1') sub forma

$$\frac{2^q}{q} + \frac{q-1}{2} - \frac{1}{q} > \frac{2^r}{r} > n. \tag{2'}$$

Inegalitatea (2') este satisfăcută pentru $n = 3$ de $r = 4$. Luînd $q = r = 4$. inegalitatea (2') este satisfăcută, dar nu și $q \leqslant n$. Luînd însă $q = r - 1 = 3$, inegalitatea (2') este încă satisfăcută, așa cum am observat mai înainte. Aceeași situație se regăsește pentru $n = 4 = \frac{2^4}{4}$, unde $r - 1 = 4$, $r = 5$.

Inegalitatea (2') este satisfăcută desigur pentru $q = 5$, dar, cum $5 > 4$, avem $q > n$, ceea ce este inadmisibil. Dacă luăm $q = r - 1 = 4$, inegalitatea este încă satisfăcută și $q = n = 4$. Este ușor de verificat existența unor perechi de părți disjuncte ale lui $\{1, 2, 3, 4\}$ ale căror elemente au aceeași sumă, pe lîngă cele obținute pentru $n = 3$, de exemplu $\{1, 3\}$ și $\{4\}$ apoi $\{1, 4\}$ și $\{2, 3\}$. În cazul general, unde $n > 4$, vom ține seama de (2') distingînd două cazuri.

$$\frac{2^r}{r} > n > \frac{2^{r-1}}{r-1} + \frac{r-2}{2} - \frac{1}{r-1} > \frac{2^{r-1}}{r-1} \tag{3}$$

sau

$$\frac{2^r}{r} > \frac{2^{r-1}}{r-1} + \frac{r-2}{r} - \frac{1}{r-1} > n \geqslant \frac{2^{r-1}}{r-1}. \tag{3'}$$

În cazul (3) vom folosi inegalitatea (2') scriind

$$\frac{2^q}{q} + \frac{q-1}{2} - \frac{1}{q} > \frac{2^r}{r} > n > \frac{2^{r-1}}{r-1} + \frac{r-2}{2} - \frac{1}{r-2} > \frac{2^{r-1}}{r-1}$$

satisfăcînd-o, luînd $q = r$. Nu putem lua $q = r - 1$ fiindcă am ajunge la o contradicție, deci $q = r$ este cardinalul minimal pentru mulțimea S. Rămîne de verificat însă inegalitatea:

$$\frac{2^r}{r} > \frac{2^{r-1}}{r-1} + \frac{r-2}{2} - \frac{1}{r-1} \quad \text{pentru} \quad r > 3,$$

de unde

$$2^{r-1}\cdot\frac{r-2}{r(r-1)}>\frac{r(r-3)}{2(r-1)} \quad \text{sau} \quad \frac{2^r}{r^2}>\frac{r(r-3)}{r-2}, \tag{4}$$

Cum membrul întîi este supraunitar pentru $r>4$, iar membrul al doilea subunitar, inegalitatea (4) este verificată și deci soluția $q=r$ este considerată ca minimală.

În cazul (3') vom scrie inegalitatea (2') sub forma

$$\frac{2^q}{q}+\frac{q-1}{2}-\frac{1}{q}>\frac{2^{r-1}}{r-1}+\frac{r-2}{2}-\frac{1}{r-1}>n\geqslant\frac{2^{r-1}}{r-1}$$

și o vom putea satisface luînd $q=r-1$. Nu vom putea lua $q=r-2$, deoarece ar trebui să satisfacem inegalitatea:

$$\frac{2^{r-2}}{r-2}+\frac{r-3}{2}-\frac{1}{r-2}\geqslant\frac{2^{r-1}}{r-1} \quad \text{sau} \quad \frac{2^{r-1}}{(r-1)^2}\leqslant\frac{r-4}{r-3}, \tag{4'}$$

ceea ce este în contradicție cu relația (4). În consecință, cardinalul minimal pentru mulțimea S va fi $q=r-1$. După cum am văzut, rădăcina x_0 a ecuației $\frac{2^x}{x}=n$ fiind mai mică decît n, pentru $n\geqslant 5$, soluțiile $q=r$, respectiv $q=r-1$, vor conduce la părți cu proprietatea ca suma elementelor să fie aceeași în cel puțin două dintre ele.

În fiecare parte a lui $\{1, 2, ..., n\}$ avînd $q=r$, respectiv $q=r-1$ elemente, vor exista deci cel puțin cîte două submulțimi ale acestora ale căror elemente au aceeași sumă. Fie A și B două astfel de mulțimi. Dacă ele nu sînt disjuncte putem forma cu ele mulțimile $A\setminus(A\cap B)$ și $B\setminus(A\cap B)$ care sînt disjuncte și au aceeași sumă a elementelor. În definitiv am demonstrat următoarea teoremă:

Fiind dată mulțimea $\Sigma=\{1, 2, ..., n\}$ *a primelor n numere naturale, dacă*

$$\frac{2^{r-1}}{r-1}\leqslant n<\frac{2^r}{r}$$

orice par e $S_r=\{p_1, p_2, ..., p_r\}$ *cu r elemente,* $0<p_i\leqslant n$, respectiv $S_{r-1}=\{p_1, p_2, ..., p_{r-1}\}$ cu $r-1$ *elemente, după cum*

$$\frac{2^r}{r}>n>\frac{2^{r-1}}{r-1}+\frac{r-2}{2}-\frac{1}{r-1}>\frac{2^{r-1}}{r-1}$$

sau

$$\frac{2^r}{r}>\frac{2^{r-1}}{r-1}+\frac{r-2}{2}-\frac{1}{r-1}>n\geqslant\frac{2^{r-1}}{r-1},$$

conține cel puțin două submulțimi disjuncte ale căror elemente au aceeași sumă, dacă $n\geqslant 4$.

Comentariu. Problema este generalizarea problemei din Ontario Math. Bull, vol. 15 nr. 1/1979: *Fie S mulțimea a 10 numere naturale mai mici sau cel mult egale cu 100. Să se arate că S conține două submulțimi disjuncte ale căror elemente au aceeași sumă* (*vezi SA.7*).

SA 17. *Un sondaj de opinie asupra unui grup de 120 persoane, jumătate bărbați, jumătate femei, arată că dintre bărbați jumătate merg la spectacole, iar numărul total al persoanelor care merg la spectacole este egal cu cel al femeilor care nu merg la spectacole. Cîte femei din acest grup merg la spectacole?*

Sch. Mat. Pr. BT, Cambridge, 1967

Soluție. Notăm cu B mulțimea bărbaților care merg la spectacole, cu F mulțimea femeilor din grup și cu S mulțimea tuturor persoanelor ce merg la spectacole. Aplicînd diagrama Venn mulțimilor B și $S \cap F$, vom avea:

$$\text{Card } [(S \cap F) \cup B] = \text{Card } (S) = \text{Card } (S \cap F) +$$
$$+ \text{Card}(B) - \text{Card } [(S \cap F) \cap B)]$$

deci

$$\text{Card}(S) = \text{Card } (S \cap F) + \text{Card } (B) = \text{Card } (S \cap F) + 30,$$

fiindcă $(S \cap F) \cap B = \varnothing$. Scriind condiția din enunț,

$$\text{Card}(S) = \text{Card}(F) - \text{Card}(S \cap F) = 60 - \text{Card}(S \cap F),$$

din cele două ecuații deducem $\text{Card}(S) = 45$ și $\text{Card } (S \cap F) = 15$, deci numărul femeilor care merg la spectacole este 15.

Comentarii. Problema se reduce la un sistem liniar de două ecuații cu două necunoscute. Punînd $x =$ numărul femeilor care merg la spectacole și $y =$ numărul persoanelor care merg la spectacole avem $y = 30 + x$ și $y = 60 - x$, de unde $x = 15$, $y = 45$, fără a mai folosi diagrama Venn, care în cazul de față este oarecum artificială, datorită celei de a doua relații de condiție, care nu revine la o astfel de diagramă.

SA 18. *După o bătălie s-a constatat că cel puțin 90% din combatanți au pierdut un ochi, cel puțin 95% un dinte, cel puțin 80% un braț și cel puțin 75% un picior. Cîți dintre aceștia au pierdut cel puțin toate cele patru organe?*

Sch. Math. Pr. Teacher's Guide BT, Cambridge, 1967

Soluție. Necunoscînd numărul combatanților vom folosi procente, totalul combatanților fiind de 100%. În diagrama Venn vom figura prin T mulțimea combatanților procentual, deci $\text{Card } (T) = 100$. Întrucît celelalte procente sînt afectate de calificativul *„cel puțin"*, este preferabil să figurăm complementarele și anume: $O' = \{$cei care nu au pierdut un ochi$\}$, $D' = \{$cei care nu au pierdut un dinte$\}$, $B' = \{$cei care nu au pierdut un braț$\}$, $P' = \{$cei care nu au pierdut un picior$\}$. Mulțimea $T \setminus (O' \cup D' \cup B' \cup P')$ corespunde

celor care au pierdut toate cele patru organe. Să observăm că dacă există intersecții nevide între O', D', B', P' această ultimă mulțime crește, deci crește și cardinalul ei, ceea ce corespunde cu calificativul *„cel puțin"* atribuit celor patru organe pierdute. Or,

$$\text{Card}(O') = 10, \text{Card}(D') = 5, \text{Card}(B') = 20, \text{Card}(P') = 25 \quad \text{și}$$

$$\text{Card}(T \setminus (O' \cup D' \cup B' \cup P')) = \text{Card}(T) - \text{Card}(O') -$$

$$- \text{Card}(D') - \text{Card}(B') - \text{Card}(P')$$

în ipoteza că O', D', B', P' sînt disjuncte două cîte două. Ipoteza este indispensabilă și rezultă din analiza enunțului, fiindcă nimic nu prevede categorii de invalizi numai de două, trei organe. Aceasta ne permite să le reprezentăm în diagrama Venn, fiindcă reuniunea lor nu acoperă mulțimea T.
În aceste condiții

$$\text{Card}(T \setminus (O' \cup D' \cup B' \cup P')) = 100 - 10 - 5 - 20 - 25 = 40,$$

cu alte cuvinte procentul cuadruplurilor invalizi este de 40. În ipoteza unor intersecții nevide, acest 40% crește și dă satisfacție calificativului de *„cel puțin"* 40%.

SA 19. *Într-un chestionar adresat la 1000 locatari de imobile, statistica a arătat că 502 folosesc gaze naturale, 454 electricitate și 444 păcură pentru încălzire. Dintre aceștia 158 folosesc gaze și electricitate, 160 gaze și păcură și* **134** *electricitate și păcură pentru luminat și încălzit. Cîți dintre locatari folosesc toate trei sursele energetice?*

Sch. Math. Pr. Teacher's Guide BT, Cambridge, 1967

Soluție. Notăm cu G = {utilizatorii de gaze}, E = {utilizatorii de electricitate} și P = {utilizatorii de păcură} și figurăm într-o diagramă Venn cele trei mulțimi. Vom avea, extinzînd formula care dă cardinalul reuniunii de la două la trei mulțimi:

$$\text{Card}(E \cup G \cup P) = \text{Card}(E) + \text{Card}(G) + \text{Card}(P) - \text{Card}(E \cap G) -$$

$$- \text{Card}(G \cap P) - \text{Card}(P \cap E) + \text{Card}(E \cap G \cap P). \qquad (1)$$

Urmărind enunțul, vom ține seama că $\text{Card}(E \cup G \cup P) = 1000$, $\text{Card}(E) = 454$, $\text{Card}(G) = 502$, $\text{Card}(P) = 448$, $\text{Card}(E \cap G) = 158$, $\text{Card}(G \cap P) = 160$, $\text{Card}(P \cap E) = 134$, de unde $\text{Card}(E \cap G \cap P) = 48$.

Comentarii. Formula (1) se poate obține și direct, folosind diagrama și observînd că adunînd cardinalele $\text{Card}(E) + \text{Card}(G) + \text{Card}(P)$ și comparînd suma cu $\text{Card}(E \cup G \cup P)$, cardinalele $\text{Card}(E \cap G)$, $\text{Card}(G \cap P)$, $\text{Card}(P \cap E)$ trebuie scăzute, dar atunci se pierde și $\text{Card}(E \cap G \cap P)$. Atunci dacă efectuăm scăderea și adăugăm apoi $\text{Card}(E \cap G \cap P)$, vom obține formula (1). Un raționament aritmetic în cazul numeric conduce la același

rezultat, dacă evaluăm Card (E), din care scădem Card ($E \cap G$) și Card ($E \cap P$) adăugînd Card ($E \cap G \cap P$), scăzut de două ori etc.

SA 20. *Următoarele reguli se aplică elevilor unor școli:*
a) *Orice elev slab la învățătură nu are drept să canoteze;*
b) *Orice elev care joacă hockey trebuie să aibă crosă;*
c) *Orice, elev sau joacă hockey, sau canotează, sau participă la ambele sporturi;*
d) *Niciun elev, care are o crosă, nu poate să joace tenis.*
Ce concluzie se poate trage din aceste reguli?

Sch. Math. Pr. Teacher's Guide BT, Cambridge/1967

Soluție. Prin concluzie trebuie să înțelegem implicație; vom folosi relații de incluziune între diversele mulțimi, care intervin în cele patru reguli. Vom nota:

E = {elevii din școală}; B = {elevii care canotează};
C = {elevii care au crosă}; S = {elevii silitori};
H = {elevii care joacă hockey}; T = {elevii care joacă tenis}.

Cu B', C', S', H', T' vom nota complementarele față de E. Din condiția a) rezultă $S' \subset B' \Leftrightarrow B \subset S$. Apoi din b) deducem $H \subset C \Leftrightarrow C' \subset H'$. Din c) se va obține în primul rînd că $H \cup B = E$, ceea ce implică $H' \subset B$ și $B' \subset H$. În sfîrșit regula d) exclude din T pe elevii care nu au crosă, deci cei ce joacă tenis sînt în C', adică $T \subset C'$. Din aceste variate incluziuni, formăm următorul șir:

$$T \subset C' \subset H' \subset B \subset S$$

care constituie concluzia celor patru reguli: *orice elev care joacă tenis este silitor.* Mai corect din punct de vedere etic: *„numai elevii silitori pot juca tenis în școala respectivă".*

Comentarii. Soluția prezentată se încadrează în teoria mulțimilor, dar poate fi tratată și ca o problemă de logică, substituind incluziunii stricte implicația. De exemplu, condiția a) se traduce: dacă elevul este slab la învățătură, atunci nu va face canotaj, deci $S' \Rightarrow B'$ sau $B \Rightarrow S$. În aceste condiții concluzia celor patru reguli este $T \Rightarrow S$, adică „elevul care joacă tenis, este în mod obligatoriu un elev silitor, iar $S' \Rightarrow T'$ se traduce prin „elevul slab la învățătură nu are drept să joace tenis". Astfel regula a) se transferă și la dreptul de a juca tenis.

SA 21. *Toți locuitorii dintr-un oraș vorbesc fie franceza, fie germana. Dacă 64% vorbesc franceza și 58% germana, cîți vorbesc ambele limbi?*

Sch. Math. Pr. Teacher's Guide BT, Cambridge, 1967

Soluție. Nu se cunoaște numărul locuitorilor orașului, iar datele sînt procentuale. Se impune deci a lua ca număr de locuitori ai orașului 100 și rezultatul va fi tot un procent. Se poate aplica diagrama Venn. Notăm

F = {locuitorilor de limbă franceză}, G = {locuitorilor de limbă germană}, E = {locuitorilor orașului}. Atunci cardinalele mulțimilor date sînt respectiv Card $(F) = 64$, Card $(G) = 58$, Card $(E) = 100$. Conform cu diagrama Venn, vom avea

$$\text{Card}\,(F \cup G) = \text{Card}\,(F) + \text{Card}\,(G) - \text{Card}\,(F \cap G)$$

deci

$$\text{Card}\,(F \cap G) = 64 + 58 - 100 = 22.$$

Astfel, 22% din locuitori sînt bilingvi.

Comentarii. Problema este simplă în sine, dar instructivă ca model matematic, metoda fiind aplicabilă și în alte cazuri, aparent distincte. De exemplu: *Toți membrii unei formații joacă tenis sau handbal: 21 joacă handbal, 23 joacă tenis și 18 joacă ambele jocuri. Cîți membri sînt în formație?* Card $(T \cup H) =$ Card $(T) +$ Card $(H) -$ Card $(T \cap H) = 23 + 21 - 18 = 26$. Se poate aplica și în alte cazuri similare.

SA 22. *Fie A o mulțime nevidă și $f:\mathcal{P}(A) \Rightarrow \mathcal{P}(A)$ o funcție crescătoare, adică*

$$(\forall)\, X, Y \in \mathcal{P}(A),\ X \subset Y \Rightarrow f(X) \subset f(Y).$$

Să se arate că există o submulțime T a mulțimii A, pentru care avem $f(T) = T$.

Kőzepiskolai matematikai lapok, vol. 60, 1980

Soluție. Să considerăm familia de mulțimi.

$$H = \{K \in \mathcal{P}(A) \mid f(K) \subset K\}.$$

Deoarece $f(A) \subset A$ deducem că $A \in H$, deci H este nevidă. Fie T intersecția tuturor mulțimilor din familia H. Vom arăta că $f(T) = T$. Fie într-adevăr, $K \in H$; deoarece $T \subset K$ și f este crescătoare va rezulta $f(T) \subset f(K)$, iar din definiția familiei H avem $f(K) \subset K$, astfel că în final rezultă $f(T) \subset K$. Cum K a fost o mulțime arbitrară din H, rezultă

$$f(T) \subset \bigcap_{K \in H} K = T. \text{ Așadar } f(T) \subset T. \tag{1}$$

Aplicînd în incluziunea (1) funcția crescătoare f, deducem $f(f(T)) \subset f(T)$, ceea ce arată că $f(T) \in H$. Cum T este inclusă în fiecare mulțime din familia H, va rezulta în particular

$$T \subset f(T). \tag{2}$$

Din (1) și (2) rezultă egalitatea cerută $f(T) = T$.

SA 23. *Două zaruri în formă de teatraedru regulat au fețele numerotate de la 1 la 4. Care este probabilitatea ca aruncate deodată să dea două numere al căror produs este 12?*

School Mathematics Project Book 3, Cambridge, 1970

Soluţie. Cele patru feţe pot apărea în următoarele cupluri:

$$(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4),$$

$$(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4)$$

constituind mulţimea cazurilor posibile. Dintre acestea numai cuplurile (3, 4) şi (4, 3) dau produsul 12, deci probabilitatea este $2/16 = 1/8$.

Comentarii. Scrierea explicită a listei evenimentelor elementare poate fi evitată, întrucît nu trebuie examinate unul cîte unul. Este suficient să observăm că numărul acestora este egal cu cel al aranjamentelor de 4 obiecte cîte 2, deci $A_4^2 = 4 \cdot 3 = 12$, plus cel al cuplurilor obiectelor repetate (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), adică în total 16. De asemenea se pot stabili imediat cuplurile al căror produs al elementelor este 12, respectiv (3, 4) şi (4, 3) de unde probabilitatea 1/8. Metoda poate fi deci aplicată şi în alte probleme, unde formarea şi enumerarea cazurilor ar pune în joc numere mari.

SA 24. *Numele lui Andrei, Betty, Cristina şi David sînt puse într-o pălărie pentru a se alege doi reprezentanţi într-o competiţie culturală. Să se alcătuiască o listă cu toate perechile posibile de nume care ar putea fi extrase din pălărie. Să se stabilească probabilităţile de a extrage cuplurile:*

a) *Andrei şi David;*
b) *un băiat şi o fată;*
c) *un cuplu în care să fie Betty;*
d) *un cuplu care să nu conţină pe David.*

Sch. Math. Pr. Teacher's Book BT, Cambridge, 1967

Soluţie. Folosind iniţialele numelor se formează următoarele cupluri: (A, B), (A, C), (A, D), (B, A), (B, C), (B, D), (C, A), (C, B,) (C, D), (A, B), (A, C), (A, D), (B, A), (B, C), (B, D), (C, A), (C, B), (C, D), (D, A), (sD, B), (D, C), în număr de 12. Pentru punctul a), cuplul (A, D) apare şi sub forma (D, A) deci probabilitatea este de $2/12 = 1/6$. Pentru b) cuplurile favorabile sînt (A, C), (B, D), (A, B), (C, D) şi permutările lor (C, A), (D, B) etc, deci probabilitatea este $8/12 = 2/3$. La punctul c), Betty este în cupluri cu fiecare dintre ceilalţi, deci de 3 ori şi cu permutările respective, de 6 ori, cu probabilitatea $6/12 = 1/2$. În ce priveşte punctul d), folosim punctul c) substituind lui Betty pe David, apoi eliminăm toate cele 6 cupluri, în care ar intra David şi obţinem probabilitatea $6/12 = 1/2$.

Comentarii. Lista se putea elimina, calculînd numai numărul cazurilor posibile, care este $A_4^2 = 12$ şi continuînd apoi raţionamentul, aşa cum a fost prezentat.

SA 25. *În fiecare din n saci se găseşte acelaşi număr de mere. În prima zi se scoate un măr dintr-un sac. În a doua zi se scoate cîte un măr din 2 saci şi aşa mai departe, pînă în a n — a zi, cînd se scoate cîte un măr din fiecare sac. În acest mod toţi sacii sînt goliţi.*

Pentru ce valoare ale lui n este această succesiune de operații posibilă și cum trebuie făcută ξ.

Parabola, vol..14, nr. 3/1078

Soluție. Fiindcă din cei n saci se scot succesiv $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ mere și sînt n saci, fiecare avînd același număr de mere, în fiecare sac vor fi $\frac{n+1}{2}$ mere. Pentru a fi posibil, n trebuie să fie impar, $n = 2m + 1$, și atunci în fiecare sac vor fi $m + 1$ mere. Scoaterea merelor trebuie să nu golească nici un sac pînă în ultima zi. Dacă imaginăm merele așezate în $m + 1$ straturi, va trebui să se extragă succesiv strat cu strat, astfel încît în ultima zi să rămînă ultimul strat. În consecință, în prima zi se va scoate un măr din primul sac, a doua zi cîte un măr din al doilea și al treilea sac și așa mai departe, revenindu-se la primul sac cînd primul strat s-a epuizat. Ca regulă generală, la fiecare moment în nici un sac nu trebuie să se găsească mai mult de un măr în plus decît în ceilalți. Cu această regulă se pot efectua operațiile în orice ordine.

Comentarii. Problema este de logică aplicată în aritmetică. Ea necesită o imagine geometrico-aritmetică a operațiilor succesive de scădere și nu necesită decît cunoștințe elementare de aritmetică.

SA 26. *O particulă P de masă egală cu unitatea se mișcă de-a lungul unei linii curbe l. Forța aplicată în P este îndreptată spre un punct O pe l și egală cu fs^k, unde f și k sînt constante, $f > 0$ și $s =$ distanța OP, măsurată pe linia curbă l. Dacă a este amplitudinea oscilației să se arate că perioada τ este de forma $\tau = Cf^{-1/2}a^{p(k)}$.*

Să se determine $p(k)$ și să se dea o expresie pentru C_k.

O. Bottema, N. Ar. W. vol. 30, nr. 3/1982

Soluție. Pe linia curbă l, notăm distanța OP cu s și presupunem la început $k > -1$. Forța fiind îndreptată spre O, ecuația de mișcare a lui P va fi de forma

$$\frac{d^2s}{dt^2} + fs^k = 0, \text{ cu } s > 0.$$

Să notăm $y = \frac{ds}{dt}$. Înmulțind în ambii membri cu y se poate integra relația obținută și vom avea

$$y^2 + \frac{2f}{k+1} s^{k+1} = C, \tag{1}$$

unde C este o constantă de integrare, determinînd în acest mod forma traiectoriei în planul fazelor $(s, y) = \left(s, \frac{ds}{dt}\right)$. Constanta C se determină scriind că

pentru $s = a$ obținem amplitudinea oscilației, adică maximum de elongație pe traiectoria descrisă de particulă, măsurată din O, deci scriind că a este un maxim relativ, adică $\frac{ds}{dt} = y = 0$ în $s = a$. Vom avea $C = 2fa^{k+1}/(k+1)$ și

$$|y| = [2f(a^{k+1} - s^{k+1})/(k+1)]^{1/2},. \tag{2}$$

Pentru evaluarea perioadei vom calcula timpul scurs între două treceri succesive prin punctul O, deplasarea făcîndu-se de ambele dăți în aceeași direcție. Deci vom evalua intervalul de timp de la 0 la $s = a$ de patru ori:

$$\tau = \int_0^{\tau} dt = 4\int_0^a \left(\frac{dt}{ds}\right) ds = 4\int_0^a y^{-1}\, ds =$$

$$= 2\sqrt{2}(k+1)^{1/2} \cdot f^{-1/2} \int_0^a (a^{k+1} - s^{k+1})^{-1/2}\, ds = \tag{3}$$

$$= 2\sqrt{2}(k+1)^{-1/2} \cdot f^{-1/2}\, a^{(1-k)/2} \cdot \int_0^1 (1 - u^{k+1})^{-1/2}\, du.$$

Ultima integrală este funcția B a lui Euler, astfel încît expresia perioadei τ se pune sub forma:

$$\tau = 2\sqrt{2}(k+1)^{-1/2} \cdot f^{-1/2} \cdot a^{(1-k)/2} \cdot B((k+1)^{-1},\ 1/2) \tag{3'}$$

și este de forma cerută, unde

$$p(k) = (1-k)/2 \quad \text{și} \quad C_k = 2\sqrt{2}(k+1)^{-1/2} \cdot B((k+1)^{-1},\ 1/2). \tag{4}$$

Comentarii. Acest mod de a trata ecuații de mișcări oscilatorii este mai puțin obișnuit și de fapt nu s-a determinat prin ecuația (1) legea de mișcare, ci relația de stare în spațiul fazelor, adică relația dintre viteză și lungimea arcului parcurs. În schimb, am putut evalua perioada τ a mișcării. Aceeași formulă (3), sub forma generală:

$$t = \int_0^s y^{-1}\, ds = (2f)^{-1/2}(k+1)^{1/2} \int_0^s \frac{1}{\sqrt{a^{k+1} - \sigma^{k+1}}}\, d\sigma$$

ne dă legea de mișcare pe curba l. Se vede că $\sigma \leqslant a$, deci a este amplitudinea maximă a oscilației. Cazul $k = 1$ este cel al coardei elastice, cînd perioada este $\tau = 2\pi f^{-1/2}$. Cazul $k = -1$ conduce, prin trecere la limită în formula (3), la valoarea $\tau = 2\sqrt{2\pi} \cdot f^{-1/2} \cdot a$, iar $k < -1$, duce la

$$\tau = 2\sqrt{2} \cdot |k+1|^{-1/2} \cdot f^{-1/2} \cdot a^{(1-k)/2} B(|k+1|^{-1} + 1/2,\ 1/2).$$

În cazul $k < -1$ există soluții neoscilatorii. Ele corespund la valori nenegative ale constantei C și atunci viteza lui P depășește așa numita viteză de

evadare. Pentru tratarea cazului $k \leqslant -1$ se ține seama că integrala asupra forței, pe intervale care conțin originea, nu are sens. Ea capătă sens, dacă se folosește valoarea principală Cauchy, care are semnificație din punct de vedere fizic (și interpretare în distribuții). Mișcarea redevine simetrică în raport cu O, cu condiția ca să avem $y = 0$ cel puțin odată.

SA 27. *Dispunem de o balanță cu brațe egale, dar nu și de greutăți. În aceste condiții avem în față 12 monezi de aur de aceeași valoare, dintre care una este falsă și știm că aceasta are o greutate diferită de a celorlalte, fără a ști dacă este mai grea sau mai ușoară. Este posibil ca prin trei cîntăriri să depistăm moneda falsă și să stabilim, dacă este mai grea sau mai ușoară decît cele bune?*

Parabola, vol. 11, nr. 1/1975

Soluție. Numerotăm monezile de la 1 la 12 și la o primă operație cîntărim monezile din mulțimile $\{1, 2, 3, 4\}$ și $\{5, 6, 7, 8\}$. Se pot prezenta două situații: *egalitate* și atunci moneda falsă este în grupul $\{9, 10, 11, 12\}$ sau *inegalitate* și atunci știm ce taler este mai greu decît celălalt și că moneda falsă este într-unul din talere. La a doua cîntărire, în cazul egalității, cîntărim grupurile $\{1, 2, 3\}$ și $\{9, 10, 11\}$. Dacă avem egalitate, moneda falsă este 12 și cîntărind-o cu una din celelalte știm dacă este mai grea sau mai ușoară. Dacă nu avem egalitate, moneda falsă este una din mulțimea $\{9, 10, 11\}$ și știm dacă este mai grea sau mai ușoară. Cîntărim a treia oară 9 cu 10 și apreciem: dacă avem egalitate, înseamnă că 11 este cea falsă, dacă avem inegalitate, știm pe cea care este mai ușoară sau mai grea, conform cu aprecierea anterioară. Revenim la cazul inegalității la prima cîntărire. Să presupunem că grupul $\{1, 2, 3, 4\}$ este mai greu decît $\{5, 6, 7, 8\}$. În caz contrar schimbăm notația. Pentru a merge mai departe este nevoie să introducem în experiment și monezile rămase. De aceea cîntărim $\{4, 5, 6, 7\}$ cu $\{8, 9, 10, 11\}$, ținînd seama de faptul că în grupul $\{9, 10, 11, 12\}$ nu poate fi moneda falsă. Dacă grupul $\{4, 5, 6, 7\}$ este mai greu decît $\{8, 9, 10, 11\}$, moneda falsă poate fi 8 și este mai ușoară, sau 4 și este mai grea. Într-adevăr, dacă 5, 6 sau 7 ar fi false, ar trebui să fie mai grele decît monedele bune. Dar atunci la prima cîntărire talerul $\{5, 6, 7, 8\}$, ar fi fost mai greu și nu $\{1, 2, 3, 4\}$. Știind că 4 sau 8 este falsă, comparăm una din ele cu 1 și ne dăm seama de calitatea lor. Dacă însă la a doua cîntărire mulțimea $\{4, 5, 6, 7\}$ este egală în greutate cu $\{8, 9, 10, 11\}$, moneda falsă este în grupul $\{1, 2, 3\}$ și este mai grea. Pentru identificare, cîntărim 1 cu 2 și avem rezultatul. Dacă însă $\{4, 5, 6, 7\}$ este mai ușoară decît $\{8, 9, 10, 11\}$, cum 9, 10, 11 nu pot fi false, ar rămîne suspectă 8 și ar fi mai grea. Dar atunci la prima cîntărire $\{5, 6, 7, 8\}$ ar fi fost mai grea decît $\{1, 2, 3, 4\}$, ceea ce contrazice ipoteza că $\{1, 2, 3, 4\}$ este mai grea decît $\{5, 6, 7, 8\}$. În aceste condiții moneda falsă este în $\{4, 5, 6, 7\}$. Dar 4 nu poate fi falsă și mai ușoară, fiindcă din nou $\{1, 2, 3, 4\}$ ar fi fost mai ușoară și nu mai grea decît $\{5, 6, 7, 8\}$.

Rămîne valabilă ipoteza că moneda falsă este una dintre 5, 6 sau 7 şi că este mai uşoară. Identi icarea se face cîntărind două dintre ele, de exemplu, 5 cu 6.

Comentarii. Problema este de logică aplicată şi nu necesită cunoştinţe matematice în afară de o semiotică elementară. Încadrarea ei în matematică se poate face în teoria mulţimilor, considerînd o mulţime ordonată cu 12 elemente dintre care 11 egale şi unul mai mic sau mai mare decît celelalte, care trebuie identificat prin operaţii asupra mulţimii părţilor. Lăsăm cititorilor sugestia unei formalizări, făcînd observaţia că modelarea matematică a unor fapte sau acţiuni din practica de toate zilele poate fi cu atît mai dificilă cu cît necesită un aparat matematic mai elementar.

SA 28. *Intre doi prieteni A şi B se stabileşte următoarea convenţie: cînd B vine în oraşul lui A, acesta îi împrumută autoturismul său pentru cursele pe care are nevoie să le facă. În momentul în care avertizorul de nivel al benzinii din rezervor semnalează roşu, el face plinul. Aceea prevedere este valabilă cu reciprocitate, cînd A vine în oraşul lui B.*

Este echitabilă această convenţie?

Arhimede, vol. 34, nr. 3/1982

Soluţie. În primul rînd, problema comportă două cazuri:

1) parcursul h al lui A, exprimat în km, este cunoscut în oraşul lui B şi reciproc;

2) parcursul lui A, exprimat în km, este o variabilă aleatoare.

De asemenea problema mai necesită încă o ipoteză:

3) În oricare din cazurile de mai înainte parcursul efectuat de A, respectiv B, nu depăşeşte niciodată autonomia de parcurs pe care o asigură un plin al rezervorului.

În condiţiile de echitate ale problemei convenţia este cea a unui joc cu sumă nulă echitabil: valoarea medie a benzinii folosite de A (respectiv B) de la prietenul său trebuie să fie egală cu cea a benzinii pe care o plăteşte.

Fie b autonomia în km asigurată de rezervorul plin al autoturismului şi X autonomia în km pe care acesta o asigură de fapt, cînd A începe folosirea. Vom avea $0 \leqslant X \leqslant b$ şi vom admite că distribuţia de probabilitate a lui X este uniformă în $[0, b]$. A trebuie să facă plinul în $[0, h]$, în ipoteza 1), deci $0 \leqslant X \leqslant h$, ceea ce înseamnă că probabilitatea de a trebui să facă plinul este h/b. În acest caz, valoarea medie a parcursului făcut cu benzină cumpărată va fi $b \cdot P(X \leqslant b) = b\,\dfrac{h}{b} = h$, deci egală cu parcursul h pentru care solicită automobilul. În ipoteza 2), fie Y variabila aleatoare, care reprezintă parcursul efectuat de A; X şi Y sînt variabile independente, astfel încît, cum plinul trebuie făcut cînd $Y \geqslant X$, valoarea medie a parcursului cu benzină pusă în rezervor va fi $bP(Y \geqslant X)$. Pe de altă parte, cum Y este variabilă continuă, fie $\delta(Y)\,dY$ densitatea de probabilitate ca Y să se găsească în inter-

valul $[Y, Y + dY]$. Evident, $\int_0^b \rho(Y)\, dY = 1$. Densitatea corespunzătoare lui X va fi dX/b și în consecință distribuția corespunzătoare celor două variabile aleatoare va fi $\rho(Y)\, dY \frac{dX}{b}$.

Astfel

$$P(Y \geqslant X) = \iint_{Y \geqslant X} \frac{\rho(Y)}{b}\, dY\, dX = \frac{1}{b} \int_0^b \rho(Y)\, dY \int_0^Y dX,$$

de unde

$$bP(Y \geqslant X) = \int_0^b \rho(Y)\, Y\, dY.$$

Integrala reprezintă parcursul mediu efectuat de A, iar primul membru reprezintă valoarea medie a parcursului plătit, ceea ce înseamnă că există echitate, ținînd seama că există și reciprocitate cînd A se deplasează.

SA 29. *Trei vînători A, B, C obțin la un concurs de tir următoarele rezultate:*

Vînătorul:	*A*	*B*	*C*
Lovituri trase:	135	96	60
Lovituri în țintă:	81	84	45.

Ținînd seama de aceste rezultate, să se estimeze probabilitățile următoare, cînd fiecare dintre cei trei vînători trag în același iepure cîte un singur cartuș:

a) *iepurele nu este atins;*
b) *cel puțin unul dintre vînători lovește iepurele;*
c) *toți vînătorii lovesc iepurele.*

Arhimede, vol. 34, nr. 4/1982

Soluție. A ține seama de aceste rezultate, revine la estimarea probabilității fiecăruia de a lovi o țintă dintr-un singur cartuș, prin folosirea frecvenței loviturilor realizate la tir. Aceste frecvențe vor fi: $\frac{81}{135}, \frac{84}{96}, \frac{45}{60}$, deci

$$f_A = \frac{3}{5},\ f_B = \frac{7}{8},\ f_C = \frac{3}{4}.$$

a) În consecință, probabilitatea ca niciunul să nu lovească iepurele va putea fi estimată prin produsul probabilităților $1 - 3/5$, $1 - 7/8$, $1 - 3/4$ (evenimentele ca ficare vînător să nu lovească, sînt independente), deci are valoarea:

$$P = 2/5 \cdot 1/8 \cdot 1/4 = 1/80.$$

b) Probabilitatea ca cel puţin unul să lovească iepurele va fi cea a evenimentului contrar faţă de evenimentul de la punctul 1), adică:

$$1 - P = 1 - 1/80 = 79/80,$$

deci o probabilitate aproape de certitudine, după cum cea ca niciunul să nu-l lovească era minimă.

c) Probabilitatea ca toţi trei să lovească iepurele va fi (tot datorită independenţei evenimentelor ca fiecare vînător să lovească iepurele):

$$P_1 = 3/5 \cdot 7/8 \cdot 3/4 = 63/160 \approx 0{,}39, \text{ deci sub } 0{,}5.$$

Comentarii. Estimarea probabilităţilor se bazează pe un procedeu euristic, de natură statistică, prin asimilarea acestora cu frecvenţe realizate într-un număr relativ mic de probe, deci pe o aplicare a legii numerelor mari, deşi caracterul asimptotic nu este asigurat decît printr-un experiment cu date şi rezultate în număr relativ modest. Totuşi acest gen de îmbinare a experimentelor statistice din practica obişnuită este admisibil pentru o primă modelare probabilistică şi în alte sectoare ale matematicilor aplicate, de exemplu, în biomatematică. El pune în evidenţă caracterul experimental al unor modelări matematice, prin îmbinarea practicii cu teoria.

SA 30. *În ipoteza că probabilitatea ca un atac spre poarta adversă, să conducă la un gol, într-un meci de fotbal, este independentă de rezultatele atacurilor anterioare, să se arate că scorul obţinut de echipa respectivă este arpoximat printr-un proces Poisson.*

D. J. Colwell şi *J .R. Gillett*, Math. Gazette, vol. 65, nr. 431/1981

Soluţie. Performanţa unei echipe se estimează prin numărul de goluri realizate raportat la cele primite, dar scorul este şi el o performanţă esenţială, dacă este raportat la numărul de atacuri spre poarta adversă. Fie p probabilitatea ca un atac să se termine cu un gol şi n numărul de atacuri. În ipoteza admisă în enunţ scorul va fi $[np]$, deci partea întreagă a lui np. Fie X variabila aleatoare asociată numărului de goluri rezultate din n atacuri. În ipoteza de independenţă, distribuţia va fi binomială, deci:

$$P(X = k) = C_n^k \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Cum p este mic în comparaţie cu n care este de aşteptat să fie mare, vom nota $np = \mu$ şi vom avea

$$P(X = k) = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} \cdot \left(\frac{\mu}{n}\right)^k \cdot \left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^n \cdot \left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^{-k} =$$

$$= \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n^k} \cdot \left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^{-k} \cdot \frac{\mu^k}{k!} \cdot \left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^n =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^{-k} \cdot \frac{\mu^k}{k!} \cdot \left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^n \cdot$$

Cum $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\mu}{n}\right)^n = e^{-\mu}$, vom avea și

$$\lim_{n\to\infty} P(X=k) = e^{-\mu}\frac{\mu^k}{k!}.$$

Deci pentru n suficient de mare $P(X=k)\approx\frac{\mu^k}{k!}\cdot e^{-\mu}$, care este o distribuție Poisson.

Comentarii. 1) Se vede că $\frac{\mu^k}{k!}\cdot e^{-\mu}$ aproximează probabilitatea $P(X=k)$ cu atît mai bine cu cît n este mai mare; introducerea unui proces de trecere la limită implică o convergență rapidă a procesului. Fără a o verifica în detalii, faptul că exponențiala are o creștere mai rapidă decît orice putere cu exponent întreg natural, conferă o valoare euristică aproximării făcute.

2) Problema este formulată și prezentată de noi din articolul „Este scorul un proces Poisson?", autorii ajungînd la concluzia că o confruntare cu practica justifică în mod excelent existența unui proces Poisson. Din scorurile celor 22 echipe din divizia A engleză în 1978, rezultă o bună concordanță între predicție și observație. Ar fi interesantă o comparație cu scorurile celor 18 echipe din divizia noastră A.

SA 31. *O bară de lungime a este tăiată în trei părți în mod arbitrar. Care este probabilitatea de a se putea construi cu cele trei fragmente un triunghi ascuțitunghic?*

Arhimede, vol. 34, nr. 1–2/1982

Soluție. Spațiul evenimentelor elementare poate fi reprezentat geometric în plan dacă alegem ca variabile x, y lungimile primelor două fragmente (ultima lungime fiind $a-x-y$), măsurate începînd dintr-o extremitate. Vom avea ca spațiu, alegînd un sistem cartezian ortogonal xOy mulțimea de puncte $\{(x, y) \mid x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ a-x-y\geqslant 0\}$, adică o suprafață triunghiulară. Cum putem permuta x cu y, spațiul evenimentelor elementare poate fi limitat la mulțimea $\{(x, y) \mid 0\leqslant x\leqslant y\leqslant a-x-y\}$, care este o suprafață triunghiulară mai mică.
Condiția ca triunghiul format cu cele 3 fragmente să fie ascuțitunghic este: $x^2+y^2\geqslant(a-x-y)^2$, cazul de egalitate fiind al triunghiului dreptunghic. Cum $(x+y)^2\geqslant x^2+y^2\geqslant(a-x-y)^2$, vom avea $x+y\geqslant a-x-y$. Spațiul evenimentelor elementare favorabile este limitat de curbele $y=x$,

$$a-x-2y=0,\quad x^2+y^2=(a-x-y)^2,\quad (x\geqslant 0,\ y\geqslant 0),$$

deci este o suprafață triunghiulară curbilinie, cu o latură arc de hiperbolă. Probabilitatea este raportul dintre aria acesteia și aria suprafeței triunghiulare a evenimentelor elementare posibile, adică

$$P = \left(\frac{1}{4}\, a^2 \log 2 - \frac{1}{6}\, a^2\right) \Big/ (1/12) \cdot a^2 = 3 \log 2 - 2 \approx 0{,}07944,$$

necesitînd calculul unei integrale simple și observații de simetrie pentru simplificarea acestuia.

Comentariu. Spațiile evenimentelor elementare posibile și favorabile sînt micșorate de arcul de hiperbolă, care rămîne în primul cadran și deasupra bisectoarei $y = x$.

SA 32. *Un soț și soția sa se înțeleg să se întîlnească la colțul unei străzi între orele 16 și 17 pentru a merge în continuare împreună după cumpărături. Cel care sosește primul așteaptă pe celălalt 15 minute, apoi pleacă singur să cumpere în continuare.*

Care este probabilitatea ca ei să se întîlnească în cadrul acestei ore, în ipoteza că pot sosi oricînd în intervalul 16—17 h? (Problema întîlnirii soților. Gnedenko, 1960).

Richard Dahlke *Robert Fakler*, Math. Teacher, vol. 75, nr. 9/1982

Soluție. Notăm cu x și y orele de sosire ale soțului, respectiv soției măsurate în minute luînd ora 16 ca origine, deci

$$0 \leqslant x \leqslant 60,\ 0 \leqslant y \leqslant 60.$$

Spațiul selecțiilor va fi o suprafață pătrată de latură 60, așezată pe axele Ox, Oy cu două din laturi. Pentru ca soții să se întîlnească va trebui ca $|x - y| \leqslant 15$. Reprezentînd această inegalitate, domeniul evenimentelor favorabile va fi banda dintre dreptele:

$$x - y = -15 \text{ și } x - y = 15$$

mărginită de vîrfurile și laturile pătratului. În afara acesteia, rămîn în spațiul selecțiilor două triunghiuri dreptunghice, avînd catetele de lungime 45. Prin urmare, probabilitatea întîlnirii este

$$P = \frac{60 - \frac{1}{2}(45)^2 + \frac{1}{2}(45)^2}{60^2} - \frac{1575}{3600} = 0{,}44.$$

Comentarii. Se vede că probabilitatea de întîlnire este 44%, adică destul de mare.

Propunem să reluăm problema lui *Gnedenko* în forma următoare:

a) *Întîlnirea dintre cei doi soți este prevăzută în aceleași condiții ca în problemă. Să se determine probabilitatea ca ora de sosire a soțului să fie mai apropiată de cea a soției, decît de ora* **16**.

Răspunsul pe care îl lăsăm în atenția cititorilor este 3/4, deci o probabilitate mult mai mare decît cea a întîlnirii în cel mult 15 minute, oriunde în intervalul de o oră.

Mai recomandăm și următoarele exerciții:

2) *În ecuația* $ax + b = 0$, *coeficientul* a *este ales la întîmplare între* 1 *și* 2, *iar* b *între* -1 *și* $+1$. *Care este probabilitatea ca soluția ecuației să fie mai mare ca* 1/4?

Răspunsul este 5/16.

3) Într-un bufet se poate cîștiga o pizza prin tragerea cu arcul într-o țintă pătrată cu latura lungă de 18 cm, din centrul căreia cu razele 1, 2 și 3 cm se trasează trei cercuri concentrice. Cel ce nimerește în discul cel mai mic, cîștigă o pizza mare. Cu ce probabilitate se poate cîștiga o pizza mare?

SA 33. *Un înotător pleacă de la plajă pe ceață și înoată 500 m în linie dreaptă într-o direcție la întîmplare. Se oprește și se învîrtește în jurul lui de mai multe ori pentru a vedea țărmul, dar nu reușește și pornește într-o direcție la întîmplare. Presupunînd că linia coastei este dreaptă și că nu există maree, care este probabilitatea de a ajunge la țărm înotînd încă cel mult 500 metri* ξ *(Problema înotătorului).*

Richard Dahlke și *Robert Fakler*, Math. Teacher, vo.. 75, nr. 9/1982

Soluție. Problema este de probabilități geometrice. Alegem un sens pozitiv pe linia plajei. Dacă notăm cu A punctul de plecare de pe plajă și cu φ măsura unghiului pe care direcția aleatoare în care înoată îl face cu semidreapta de origine A orientată pozitiv a liniei plajei, considerînd și poziția finală B pe direcția inițială de înot, vom avea $\|AB\| = 500$ m. Întorcîndu-se în jur, fie θ măsura unghiului orientat pozitiv pe care noua direcție în care pornește, îl formează ca latură finală cu o semidreaptă de origine B, paralelă cu cea anterioară inclusă în linia coastei, ca latură inițială. Pentru ca traiectul său la întoarcere să fie îndreptat spre coastă și să aibă lungimea $\rho \leqslant 500$ m, direcția de înot trebuie să fie pe o semidreaptă inclusă în interiorul unghiului $\widehat{ABC}$ de măsură $\pi - 2\varphi$, al triunghiului isoscel ABC cu $\|BC\| = \|AB\| = 500$ m.

Prin urmare, dacă

$$0 < \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}, \text{ atunci } \pi + \varphi \leqslant \theta \leqslant 2\pi - \varphi, \tag{1}$$

cazul $\varphi = 0$ excluzîndu-se, fiindcă ar însemna înot chiar pe linia coastei și prezența ceții nu ar mai interveni în mersul la întîmplare. Dacă însă

$$\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi < \pi, \text{ atunci pentru întoarcere avem } 2\pi - \varphi \leqslant \theta \leqslant \pi + \varphi, \tag{1'}$$

deoarece unghiul de măsură φ este exterior triunghiului ABC și are vîrful în C, iar unghiurile $\hat{A}$ și $\hat{C}$ au măsura $\pi - \varphi$, iar cel din B, $2\pi - \varphi$. Spațiul

selecțiilor în acest experiment va fi reprezentabil în planul (φ, θ) printr-o suprafață dreptunghiulară:

$$R = \{(\varphi, \theta) \mid 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi,\ 0 < \theta < 2\pi\}. \tag{2}$$

Dreptele

$$\theta = \pi + \varphi \text{ și } \theta = 2\pi - \varphi \tag{2'}$$

vor limita mulțimea evenimentelor elementare favorabile, formată din două suprafețe triunghiulare formate de diagonalele unui pătrat, pătrat ce reprezintă „jumătatea superioară" a dreptunghiului R.

Cum aria dreptunghiului R este $2\pi^2$, iar aria totală a celor două triunghiuri este $\frac{\pi^2}{2}$, vom avea drept probabilitate a întoarcerii în condițiile date:

$$P = \frac{\pi^2/2}{2\pi^2} = \frac{1}{4}.$$

Comentarii. Problema face parte dintr-un articol intitulat: *Probabilitățile geometrice: o sursă de aplicații interesante și semnificative în matematicile de liceu.*

Enunțul este puțin modificat de noi introducînd și posibilitatea de a se porni perpendicular pe coastă. În acest caz ca și în cazurile $\theta = \pi + \varphi$ și $\theta = 2\pi - \varphi$, întoarcerea se face pe un traiect maximal de 500 m.

Această problemă poate fi modificată, de exemplu, după cum urmează, precizîndu-se unghiul direcției de plecare, $\varphi = 75°$ *și distanța* $\| AB \| = 40$ m. *Se cere probabilitatea de revenire întotînd cel mult* 40 m, 50 m, 30 m *sau* 38m.

Ca indicație se folosește teorema sinusurilor și răspunsul este respectiv 1/12; 0,22; 0,04 și 0, verificarea rămînînd în atenția cititorilor.

Capitolul **XII**

PROBLEME GENERALE CU SOLUȚII COMPLEXE (SC)

Introducere

Algebra este reprezentată prin probleme ca de exemplu (SC 2) care cere determinarea cifrei unităților părții întregi a unui număr irațional, sau (SC 8) în care se aplică metoda inducției matematice și într-o măsură eficientă experimentul și intuiția, iar problema (SC 5) generalizează o notă matematică în care se folosește un tablou, prin analogie cu triunghiul lui Pascal, pentru a se calcula suma pătratelor primelor n numere naturale, cazul puterilor întregi oarecare.

Secțiunea de analiză matematică prezintă aspecte teoretice clasice, dar este bogată în teme, metode, instrumente și subtilități de raționamente. Începem cu problema (SC 6.), în care se folosesc șiruri Cesaro și dezvoltări în serie pentru a se calcula limita unui șir dat printr-o relație de recurență. Problemele (SC 7) și (SC 8) pun în lumină inegalități în care intervin funcții exponențiale și hiperbolice și cer folosirea unor tehnici speciale. Problema (SC 9) a necesitat o analiză mai profundă ca urmare a jocului de majorări și minorări, conducîndu-ne la îmbunătățirea inegalității din dreapta în comentariile făcute asupra problemei.

Semnalăm încă două probleme (SC 12) și (SC 13) unde folosirea formulei lui Stirling se dovedește salutară în stabilirea convergenței unor șiruri formate cu medii geometrice ale primilor termeni ai unor serii.

În problemele (SC 14), și (SC 18) cu caracter geometric, soluțiile se obțin prin mijloace ale analizei, iar (SC 19) și (SC 22) se disting prin tehnicile subtile și ingenioase pe care își bazează rezolvarea. Ca și altele dintre

problemele de analiză din revistele străine, acestea par a face parte din articole mai ample în care au jucat roluri importante în obținerea unor rezultate dificile.

Geometria ocupă locul cel mai amplu în această a doua parte a lucrării noastre, ca urmare a atenției deosebite ce i se acordă în țările din care provin revistele consultate. Un prim grup (SC 23.), (SC 24.), (SC 25.) este format din probleme de construcții geometrice aplicate în construcții și arhitectură. Problema (SC 28.), într-o tratare aprofundată de noi, aduce în prim plan celebra teoremă a lui Morley și mai ales reciproca ei. Problema (SC 35.) generalizată de noi, are ca obiect construcția cu rigla și compasul a unei configurații de cercuri în plan și capătă o soluție completă cu discuția eventualelor cazuri pe care enunțul original nu le prevedea.

Am considerat instructivă prezentarea unor probleme date la olimpiade în R. P. Chineză, dintre care una ne-a sugerat problema (SC 31.), căreia i-am acordat o dezvoltare amplă.

Problemei (SC 41.) i-am dat și o soluție care folosește mijloace ale analizei, acordînd apoi problemelor de geometrie analitică o atenție deosebită. Semnalăm problema (SC 29.) în care metrica spațiului cartezian este deosebită de cea euclidiană, cu consecințe prezente asupra semnificațiilor unor ecuații elementare. Problemei (SC 42.) i-am dat o tratare vectorială, care ne permite o generalizare largă și interpretări semnificative a teoremei lui Appollonius relativă la paralelogram.

Vom semnala în sfîrșit problema (SC 43.) în care configurația este formată din trei cercuri concentrice situate în 3 plane ortogonale și care pun în evidență posibilitatea de a se construi 8 plane tangente la ele. Problema a fost tratată de noi sintetic și analitic, ceea ce ne-a permis stabilirea unor proprietăți suplimentare.

În general am ales probleme care cer soluții complexe avînd în vedere caracterul metodologic al lucrării, pentru a atrage atenția cititorului asupra unor metode de rezolvare neobișnuite în manualele și revistele noastre.

SC 1. *Fie A o matrice pătrată nenulă de ordinul n cu elemente numere reale, astfel ca $\det A = 0$. Să se arate că există o matrice nenulă B de același ordin, astfel ca $AB = 0$.*

Matematika v škole, 3/1976

Soluție. Fie $M_n(\mathbf{R})$ mulțimea matricilor pătrate de ordinul n cu elemente din $\mathbf{R}$, care este un spațiu vectorial de dimensiune n^2 peste corpul $\mathbf{R}$ al numerelor reale. Să presupunem prin absurd că $(\forall)\, X \in M_n(\mathbf{R})$, $X \neq 0$, avem $AX \neq 0$. Atunci aplicația liniară

$$\varphi : M_n(\mathbf{R}) \to M_n(\mathbf{R}),\ \varphi(X) = AX \text{ este injectivă.}$$

Într-adevăr dacă $X_1 \neq X_2$, atunci $X_1 - X_2 \neq 0$ și din presupunerea făcută avem $A(X_1 - X_2) \neq 0$, adică $AX_1 \neq AX_2$ sau $\varphi(X_1) \neq \varphi(X_2)$. Cum φ este injectivă și $M_n(\mathbf{R})$ are dimensiune finită, rezultă că φ este și surjectivă. Atunci luînd matricea unitate $I_n \in M_n(\mathbf{R})$, există $X_0 \in M_n(\mathbf{R})$ cu $\varphi(X_0) = I_n$,

adică $AX_0 = I_n(1)$. Trecînd la determinanți în egalitatea (1) obținem $0 = 1$, ceea ce este o contradicție. Deci $(\exists)\ B \in M_n(\mathbf{R})$, $B \neq 0$ cu $AB = 0$.

Comentariu. Această problemă arată că în inelul de matrice considerat orice element este fie inversabil, fie divizor al lui zero.

SC 2. *Să se determine cifra unităților în dezvoltarea expresiei*

$$(15 + \sqrt{220})^{19} + (15 + \sqrt{220})^{82} \text{ scrisă în baza 10.}$$

Problema 30 dată la Semifinala Olimpiadei Naționale Belgiene 1982. Math. et Péd. nr. 38/1983

Soluție. Vom adăuga conjugatele binoamelor din expresia dată și vom aplica formula binomului

$$E = (15 + \sqrt{220})^{19} + (15 + \sqrt{220})^{82} + (15 - \sqrt{220})^{19} + (15 - \sqrt{220})^{82} =$$

$$= 2[15^{19} + C_{19}^2 \cdot 15^{17} \cdot 220 + C_{19}^4 \cdot 15^{15} \cdot 220^2 + \ldots + C_{19}^{18} \cdot 15 \cdot 220^9 + 15^{82} +$$

$$+ C_{82}^2 \cdot 15^{80} \cdot 220 + C_{82}^4 \cdot 15^{78} \cdot 220^2 + \ldots + C_{82}^{80} \cdot 15^2 \cdot 220^{40} + 220^{41}].$$

Este evident că E este un întreg natural divizibil prin $2 \cdot 5 = 10$. Deci cifra unităților sale este zero. Dar am adăugat doi termeni care trebuie estimați:

$$\sqrt{220} = 14{,}8 \ldots, \text{ deci } 15 - \sqrt{220} < 0{,}2.$$

Numărul adăugat

$$N = (15 - \sqrt{220})^{19} + (15 - \sqrt{220})^{82} < (0{,}2)^{19} + (0{,}2)^{82} < 10^{-12}.$$

Deci $E > E - N > E - 10^{-12}$, ceea ce modifică foarte puțin, dar totuși modifică cifra unităților lui $E - N$, deci a expresiei date, cifră care va fi așadar egală cu 9.

Comentarii. 1) Problema este semnalată ca dificilă de mai mulți cititori ai revistei, fiind considerată ca un test american la Olimpiada Națională Belgiană în etapa denumită semifinală. Răspunsurile sugerate de cititori indicau ca cifră a unităților 0, 2, 5, 9. Redacția consideră că cifra potrivită este zero și pentru justificarea prezintă demonstrația dată de *Claudine Festraets*. Autoarea și redacția revistei de matematică estimează că prin adăugarea celor două conjugate se adaugă de fapt $N < 10^{-12}$, ceea ce nu schimbă cifra unităților, care va fi zero. În realitate N trebuie scăzut din expresia finală pentru a reveni la cea inițială și în aceste condiții, oricît de mic ar fi, cifra unităților scade, devenind 9.

2) *La același rezultat se ajunge și dacă se cere cifra unităților părții întregi a expresiei date.*

3) Problema poate fi generalizată pentru expresii de forme analoage, dacă expresiile conjugate reprezintă numere ale căror părți întregi sînt zero.

SC 3. *Dacă n și k sînt numere naturale și D_j este numitorul lui $C_k^j/(n+j)$ ca fracție ireductibilă, să se stabilească identitatea*

$$f_k(n) = \frac{1}{n} - C_k^1 \frac{1}{n+1} + C_k^2 \frac{1}{n+2} + \ldots + (-1)^j C_k^j \frac{1}{n+j} + \ldots +$$

$$+ (-1)^k \frac{1}{n+k} = \frac{1}{c.m.m.m.c.(D_0, D_1, \ldots, D_k)}.$$

Parabola, vol. 11, nr. 1/1975

Soluție. Vom calcula $f_k(n)$ prin inducție, observînd că $f_0(n) = 1/n$, $f_1(n) = 1/n - 1/(n+1) = f_0(n) - f_0(n+1)$. Folosind relația $C_k^j = C_{k-1}^j + C_{k-1}^{j-1}$ și înlocuind în $f_k(n)$, obținem relația de recurență

$$f_k(n) = f_{k-1}(n) - f_{k-1}(n+1). \tag{1}$$

Rezolvarea acestei ecuații funcționale pe cale directă prin recurență prezintă dificultăți, fiindcă reducerea termenilor nu se poate face, din cauză că argumentul apare sub formele n și $n+1$. De aceea vom încerca evaluarea unor forme generale prin aducerea la același numitor fără a face, apel la c.m.m.d.c. al numitorului. Vom putea atunci pune pe $f_k(n)$ sub forma

$$f_k(n) = \frac{m}{n(n+1)\ldots(n+k)}$$

unde m este un întreg ce se cere evaluat. În acest scop evaluînd pe $f_2(n)$ și $f_3(n)$, prezumăm că $m = k!$, deci că

$$f_k(n) = \frac{k!}{n(n+1)\ldots(n+k)} = \frac{1}{nC_{n+k}^k}. \tag{2}$$

Verificăm ușor că dacă (2) este valabilă pentru k, este de asemenea valabilă și pentru $k+1$, aplicînd relația de recurență (1). Cum este verificată pentru $k = 0, 1, 2$ va fi valabilă pentru orice k și orice n. Prin aceasta am dovedit, tot indirect și proprietatea

$$c.m.m.m.c.(D_0, D_1, \ldots, D_k) = n\, C_{n+k}^k. \tag{3}$$

Comentarii. Metoda inducției matematice este salvatoare în cazurile în care obținerea pe cale directă a unui rezultat este anevoioasă sau poate chiar imposibilă. Ea folosește într-o măsură mai mică sau mai mare *experimentul* și *intuiția*, ambele *matematice*. Soluția dată de noi problemei este o dovadă a acestei aprecieri. Într-adevăr, ideea de a găsi o relație de recurență convenabilă este destul de obișnuită, ca urmare a unei experiențe căpătate prin rezolvări anterioare de probleme asemănătoare. Dar aici folosirea relației de recurență nu aduce rezultatul scontat, ci conduce la noi complicații. De aceea, s-a împins experimentul pînă la găsirea unor prezumții pentru forma generală (2). Verificarea pune într-o lumină esențială relația de recurență (1).

care aduce dovada unei intuiții juste. În soluția prezentată în revista Parabola nu se explică formula (2), ci se spune numai că din (1) decurge prin inducție (2). Apoi formula (3) este dedusă prin verificarea faptului că $n \cdot C_{n+k}^{k}$ înmulțit cu fiecare din termenii $(-1)^k C_k^j \dfrac{1}{n+j}$ este un număr întreg.

SC 4. *Dacă* $\operatorname{tg} A$ *și* $\operatorname{tg} B$ *sînt rădăcinile ecuației* $x^2 + Cx + D = 0$, *să se arate că*

$$\sin^2(A+B) + C \sin(A+B)\cos(A+B) + D\cos^2(A+B) = D.$$

Ontario Sec. School, Math. Bull, vol. 19, nr. 1/1983

Soluție. Folosind relațiile lui Viète avem:

$$\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B = -C \text{ și } \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B = D$$

ceea ce ne îndeamnă să folosim

$$\operatorname{tg}(A+B) = \frac{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B}{1 - \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B} = -\frac{C}{1-D}, \text{ dacă } D \neq 1.$$

Putem pune în evidență în relația dată expresia lui $\operatorname{tg}(A+B)$ împărțind cu $\cos^2(A+B) \neq 0$, dacă $D \neq 1$. Pentru a nu modifica primul membru, vom scrie succesiv:

$$[\operatorname{tg}^2(A+B) + C\operatorname{tg}(A+B) + D]\cos^2(A+B) = \left[\frac{C^2}{(1-D)^2} - \frac{C^2}{1-D} + D\right] \times$$

$$\times \frac{1}{1 + \dfrac{C^2}{(1-D)^2}} = \frac{D[C^2 + (1-D)^2]}{(1-D)^2} \cdot \frac{(1-D)^2}{C^2 + (1-D)^2} = D, \text{ ceea ce stabilește}$$

rezultatul cerut.

Cazul $D = 1$ implică $A + B = \left(k + \dfrac{1}{2}\right)\pi$ și relația rămîne valabilă.

Comentarii. În cazul $D = 1$, vom avea și $\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B = -C$, deci $\operatorname{tg} A + 1/\operatorname{tg} A = -C$, $\sin A \cos A = -1/C$, deci $\sin 2A = -2/C$, de unde $-2 \leqslant C \leqslant 2$ pentru realitatea rădăcinilor. Enunțul nu precizează necesitatea realității rădăcinilor, condiționată în general de $C^2 - 4D \geqslant 0$.

SC 5. *Să se folosească tabloul de tipul* $n \times n$

$$\begin{array}{cccccc}
1^{p-1} & 2^{p-1} & 3^{p-1} & & n^{p-1} \\
1 & 2^{p-1} & 3^{p-1} & \ldots & n^{p-1} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
1 & 2^{p-1} & 3^{p-1} & & n^{p-1}
\end{array}$$

format cu puterile $p-1$ ale primelor n numere naturale pentru a se calcula suma puterilor p a acestor n numere, efectuînd exclusiv adunări ale elementelor tabloului și construind pe baza acestora formule de recurență (formulare și tratare generalizate).

Moshe Pinchuk, El. der Mathematik, vol. 38, 1/1983

Soluție. Strategia se bazează pe separarea tabloului în două părți prin diagonala principală, lăsînd în partea superioară elementele $1\ 2^{p-1}\ 3^{p-1}\ \ldots\ n^{p-1}$ ale acestei diagonale.

Fie S_{p-1} suma tuturor elementelor tabloului, T_{p-1} suma elementelor de deasupra diagonalei principale inclusiv aceasta și U_{p-1} suma elementelor situate dedesuptul diagonalei principale.

Vom nota de asemenea: $\sigma_{p-1}^{n} = \sum_{k=1}^{n} k^{p-1}$ suma puterilor $p-1$ ale primelor n numere naturale, σ_p^n fiind suma cerută, adică $\sigma_p^n = \sum_{k=1}^{n} k^p$. Să observăm că adunînd elementele pe linii și apoi sumele respective pe toate liniile, vom avea $S_{p-1} = n\sum_{k=1}^{n} k^{p-1} = \sigma_{p-1}^{n}$

De asemenea adunînd pe coloane elementele de deasupra diagonalei principale și de pe aceasta avem pe coloana k suma $kk^{p-1} = k^p$ și deci în total $T_{p-1} = \sum_{k=1}^{n} k^p = \sigma_p^n$.

Sub diagonala principală elementele sînt puterile $p-1$ ale primelor $1, 2, 3, \ldots, n-1$ numere naturale. Prin urmare

$$U_{p-1} = \sum_{m=1}^{n-1} \sigma_{p-1}^{m} = \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{m} k^{p-1}.$$

Cum $S_{p-1} = T_{p-1} + U_{p-1}$, vom deduce

$$T_{p-1} = \sum_{k=1}^{n} k^p = \sigma_p^n = S_{p-1} - U_{p-1} = n\,\sigma_{p-1}^{n} - \sum_{m=1}^{n-1} \sigma_{p-1}^{m}.$$

Am obținut o formulă de recurență de forma

$$\sigma_p^n = n\,\sigma_{p-1}^{n} - \sum_{m=1}^{n-1} \sigma_{p-1}^{m}, \tag{1}$$

în care intervin numai sumele puterilor $p-1$, dar ale numerelor naturale din secvențele $1, (1, 2), (1, 2, 3), \ldots, (1, 2, \ldots, n-1)$. Calculul acestora este însă asigurat prin formule de același tip de sume de puteri $p-1$, presupuse determinate succesiv pentru puterile $1, 2, 3, \ldots p-1$.

Comentarii. Problema este extrasă dintr-un articol intitulat „Matematica elementară și didactică" Autorul își propune să prezinte un mod de derivare pentru formula cunoscută care dă suma pătratelor primelor numere $\sum_{k=1}^{n} k^2$. El subliniază că metoda sa este ușoară de reținut și poate fi indicată într-un mod foarte simplu pentru calculul tuturor puterilor întregi naturale ale primelor numere naturale. Este tocmai această generalizare pe care o prezentăm în această problemă într-o formulare și tratare proprii. Cititorul ar putea încerca folosirea formulei de recurență dată de noi pentru a exprima sumele puterilor p prin sume de puteri mai mici. Metoda este simplă, comodă și susceptibilă de aplicații concrete. De exemplu, pentru $p = 2$, formula (1) va da

$$\sigma_2^n = n\sigma_1^n - \sum_{m=1}^{n-1} \sigma_1^m, \quad \text{cu} \quad \sigma_1^n = \frac{n(n+1)}{2}$$

sau

$$\sigma_2^n = (n+1)\,\sigma_1^n - \sum_{m=1}^{n} \sigma_1^m = \frac{(n+1)^2\,n}{2} - \sum_{m=1}^{n} \frac{m(m+1)}{2} =$$

$$= \frac{n(n+1)^2}{2} - \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n} m^2 - \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n} m = \frac{n(n+1)^2}{2} - \frac{1}{2}\,\sigma_2^n - \frac{1}{2}\,\sigma_1^n$$

de unde

$$\frac{3}{2}\,\sigma_2^n = \frac{n(n+1)}{2}\left(n+1-\frac{1}{2}\right) = \frac{n(n+1)\,(2n+1)}{4}$$

și deci

$$\sigma_2^n = \frac{n(n+1)\,(2n+1)}{6}. \tag{2}$$

În general propunem punerea formulei (1) sub forma

$$\sigma_2^n = (n+1)\,\sigma_{p-1}^n - \sum_{m=1}^{n} \sigma_{p-1}^m \tag{1'}$$

pentru a se folosi sumele puterilor primelor n numere în toate calculele, ceea ce creează avantaje de ordin tehnic, cum va reieși din considerarea cazului $p = 3$. Vom avea, în concordanță cu (1'):

$$\sigma_3^n = (n+1)\,\sigma_2^n - \sum_{m=1}^{n} \sigma_2^m = (n+1)\,\sigma_2^n - \sum_{m=1}^{n} \frac{m(m+1)\,(2m+1)}{6} =$$

$$= (n+1)\,\sigma_2^n - \frac{1}{6}\sum_{m=1}^{n} (2m^3 + 3m^2 + m) = (n+1)\,\sigma_2^n - \frac{1}{3}\,\sigma_3^n -$$

$$- \frac{1}{2}\,\sigma_2^n - \frac{1}{6}\,\sigma_1^n,$$

de unde

$$\frac{4}{3}\sigma_3^n = \left(n+\frac{1}{2}\right)\sigma_2^n - \frac{1}{12}n(n+1) = \frac{1}{12}n(n+1)(4n^2+4n) = \frac{1}{3}n^2(n+1)^2.$$

Astfel:

$$\sigma_3^n = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = (\sigma_1^n)^2. \tag{3}$$

SC 6. *Fie* $u_0 \in \mathbf{R}$ *arbitrar în* $(0, \pi)$ *şi* $u_{n+1} = \sin u_n$, *pentru* $n = 0, 1, 2, \ldots$ *.... Să se calculeze* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}\, u_n$.

J. Dieudonné Calcul infinitezimal, Hermann, Paris/1962

Soluţie. Vom folosi proprietatea cunoscută a şirurilor numerice: dacă $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, atunci şi $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} a_k \to a$, cu alte cuvinte convergenţa în sensul lui Cauchy a unui şir numeric implică şi convergenţa în sensul lui Cesaro către aceeaşi limită. Şirul $\{u_n\}$ este cu termeni pozitivi, ceea ce rezultă imediat prin inducţie, fiindcă dacă $0 \leqslant u \leqslant \pi$, rezultă $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$, iar $0 < u_0 < \pi \Rightarrow 0 < u_1 < 1$.

El este şi descrescător, fiindcă $\sin u_n \leqslant u_n$, deci $u_{n+1} \leqslant u_n$. Fiind pozitiv şi descrescător este şi convergent către marginea sa inferioară $l \geqslant 0$. Funcţia $\sin x$ fiind continuă, avem $\lim\limits_{x\to l} \sin x = \sin l$, deci $\lim\limits_{u_{n+1}\to l} u_{n+1} = \lim\limits_{u_n\to l} \sin u_n$, adică $l = \sin l$. Cum această relaţie implică $l = 0$, rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, care este o condiţie necesară pentru ca $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\, u_n$ să fie finită.

În continuare, pentru a pune în evidenţă produsele de forma $\sqrt{n}\, u_n$, vom considera termeni de forma $\left(\frac{1}{\sqrt{n}\, u_n}\right)^2 = \frac{1}{n u_n^2}$ cărora le vom estima limita cînd $n \to \infty$. Vom avea posibilitatea de a aplica proprietatea şirurilor **Cesaro,** dacă vom evalua $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{u_n^2}$.

Vom avea succesiv:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sin^2 u_n} - \frac{1}{u_n^2}\right), = \lim_{n\to\infty} \frac{u_n^2 - \sin^2 u_n}{u_n^2 \sin^2 u_n} =$$

$$= \lim_{u_n\to 0} \frac{u_n^2 - \frac{1}{2}(1-\cos 2u_n)}{\frac{1}{2}u_n^2)1-\cos 2u_n)} = \lim_{u_n\to 0} \frac{2u_n^2 - \left[\frac{(2u_n)^2}{2!} - \frac{(2u_n)^4}{4!} + \cdots\right]}{u_n^2\left[\frac{(2u_n)^2}{2!} - \frac{(2u_n)^4}{4!} + \cdots\right]} =$$

$$= \frac{2^4/4!}{2^2 2!} = \frac{1}{3}, \text{ fiindcă ştim că } \lim_{n\to\infty} u_n = 0.$$

Vom aplica proprietatea şirurilor Cesaro şirului $\left\{\frac{1}{u_{n+1}^2}-\frac{1}{u_n^2}\right\}$, scriind succesiv

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{u_{k+1}^2}-\frac{1}{u_k^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{u_{n+1}^2}-\frac{1}{u_0^2}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)\,u_{n+1}^2}=\frac{1}{3}\cdot$$

Extrăgînd rădăcina pătrată şi luînd inversele vom avea $\lim_{n\to\infty}\sqrt{u}\,u_n=\sqrt{3}$.

Comentarii. Soluţia dată este în esenţă luată dintr-o notă matematică semnată de *Christian Radoux* (Univ. Mons) în Mathématique et Pédagogie nr. 31, 1981 şi prezintă interes prin originalitatea metodei, care recurge la şirurile Cesaro şi apoi la dezvoltări în serie ingenios utilizate pentru a evita ridicări la pătrat. Considerăm că metoda poate sugera şi alte aplicaţii ale implicaţiei convergenţei Cesaro, cînd se cunoaşte convergenţa Cauchy.

SC 7. *Notăm* $E(x,y)=\begin{cases}\dfrac{e^x-e^y}{x-y} & \text{dacă } x\neq y\\ e^x & \text{dacă } y=x\end{cases}$, $(x,y)\in\mathbf{R}^2$, (1)

Să se demonstreze că:

1) *Dacă* $a<b$, *funcţia* $E(x,b)/E(x,a)$ *este descrescătoare pe intervalul* $[a,b]$.

2) *Dacă* $a<b\leqslant 0$, *atunci*

$$E(x,b)/E(x,a)\geqslant(1+e^b)/(1+e^a) \tag{2}$$

pentru orice $x\in[a,b]$.

W. A. I. Luxemburg, Nieuw Archief voor Wiskunde, vol. 28/1980

Soluţie. Este convenabil să punem pe $E(x,y)$, care are două expresii. sub o formă unică. Vom avea succesiv pentru $x\neq y$:

$$E(x,y)=\frac{e^x-e^y}{x-y}=e^{\frac{x+y}{2}}\cdot\frac{e^{(1/2)(x-y)}-e^{-(1/2)(x-y)}}{x-y}=e^{\frac{x+y}{2}}\cdot\operatorname{sh}\frac{1}{2}(x-y)\frac{2}{x-y}=$$

$$=e^{(1/2)(x+y)}\int_0^1\operatorname{ch}\left[\frac{1}{2}(x-y)t\right]dt\cdot \tag{3}$$

Dar şi pentru $x=y$ relaţia (3) are loc, după cum se poate verifica uşor.

1) Din (3) deducem

$$\frac{E(b,\ x)}{E(x,\ a)} = \frac{e^{1/2\cdot(b-a)}\int_0^1 \operatorname{ch}[1/2(b-x)t]\,dt}{\int_0^1 \operatorname{ch}\ [1/2(x-a)\,t]\,dt}. \tag{4}$$

În ipoteza $a \leqslant x \leqslant b$, $\operatorname{ch}[(1/2)\ (b-x)t]$ ca funcție de x, este descrescătoare, iar $\operatorname{ch}[(1/2)\cdot(x-a)t]$, crescătoare; deci raportul (4) este funcție descrescătoare de x pe $[a,\ b]$.

2) Ținînd seama de această proprietate și, notînd $b-a=t>0$, vom putea scrie

$$\frac{E(x,\ b)}{E(x,\ a)} \geqslant \frac{E(b,\ b)}{E(b,\ a)} = \frac{e^b(b-a)}{e^b-e^a} = \frac{b-a}{1-e^{a-b}} = \frac{t}{1-e^{-t}}.$$

Pe de altă parte, cum $e^b \leqslant 1$, dacă $b \leqslant 0$ și $e^{-t} \leqslant 1$, fiindcă $-t<0$ vom putea scrie dubla inegalitate pe care o vom dovedi:

$$\frac{1+e^b}{1+e^a} \leqslant \frac{1+1}{1+e^{-t}} \leqslant \frac{t}{1-e^{-t}}.$$ Într-adevăr, prima inegalitate revine la $(1-e^b)(1-e^{-t})\ 0$ și este verificată, iar ultima inegalitate devine

$$\frac{1-e^{-t}}{1+e^{-t}} \leqslant \frac{t}{2} \Leftrightarrow 2(1-e^{-t}) \leqslant t(1+e^{-t}) \Leftrightarrow (2+t)\,e^{-t}+t-2>0,$$

ceea ce putem stabili după cum urmează: funcția $f(t) = (2+t)\,e^{-t}+t-2$ este crescătoare în intervalul $[0,\ +\infty)$; avem $f'(t) = (1-e^{-t})+t\,e^{-t} \geqslant 0$ și cum $f(0) = 0$ vom avea $f(t) \geqslant 0$ pentru $t \geqslant 0$, ceea ce termină demonstrația.

Comentarii. Soluția noastră urmează în general linia celei date de W. Nuij, însă cu cîteva simplificări și precizări de ordin tehnic. Astfel, autorul nu justifică prima și reduce ultima inegalitate la $\operatorname{th}\frac{t}{2} \leqslant \frac{t}{2}$, pe care o consideră ca o consecință a teoremei valorii medii. Astfel, soluția noastră dă o altă demonstrație și acestei inegalități. Subliniem conținutul interesant al problemei prin faptul că printre cei 7 rezolvitori apar nume de matematicieni prea bine cunoscuți ca J. Boersma, L. Kuipers, van Haeringen.

SC 8. *Dacă* $x, y, s, t \in \mathbf{R}$ *cu* $0 \leqslant s \leqslant x$ *și* $0 \leqslant t \leqslant y$, *are loc inegalitatea*

$$sh\ x\ sh\ y \geqslant min\ \{sh\ (x-s)\ sh\ (y+t),\ sh\ (x+s)\ sh(y-t)\}.$$

P. Buser, Elemente der Mathematik, vol. 34, nr. 3/1979

Soluție. Se folosește inegalitatea evidentă $\min(a, b) \leqslant (ab)^{1/2}$ cu $a, b \geqslant 0$. Cu ipotezele din enunț toți factorii produselor sînt pozitivi, deci inegalitatea se aplică. Pe de altă parte

$$\operatorname{sh}(x - s)\operatorname{sh}(x + s) = \frac{1}{2}[\operatorname{ch} 2x - \operatorname{ch} 2s] \leqslant \frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2x - 1) = \operatorname{sh}^2 x,$$

după cum rezultă imediat din aplicarea formulelor funcțiilor hiperbolice $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ și din proprietatea acestor funcții de a fi crescătoare, iar $\operatorname{ch} 0 = 1$.
În mod analog $\operatorname{sh}(y - t)\operatorname{sh}(y + t) \leqslant \operatorname{sh}^2 y$,
Deci $\operatorname{sh} x \operatorname{sh} y \geqslant [\operatorname{sh}(x - s)\operatorname{sh}(y + t)\operatorname{sh}(x + s)\operatorname{sh}(y - t)]^{1/2}$ și cu atît mai mult $\operatorname{sh} x \operatorname{shy}$ va fi mai mare decît membrul II al inegalității din enunț. Egalitatea se obține pentru $s = 0$, $t = 0$.

Comentarii. În general inegalitățile se bazează pe aplicarea unor inegalități elementare sau derivate din acestea ca $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$ sau $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$ cu $a, b \geqslant 0$. Inegalitatea $\min(a, b) \leqslant \sqrt{ab}$ este mai puțin folosită în literatura curentă; de asemenea, funcțiile hiperbolice, ceea ce ne face să alegem și să recomandăm această problemă pentru metodologia folosită în rezolvarea ei.

SC 9. *Fiind dat șirul definit prin*

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}, \quad \text{cu } n = 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

să se arate că

$$\sqrt{2n} \leqslant x_n < \sqrt{2n - 2} + 2 - \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \text{pentru } n \geqslant 2. \tag{2}$$

Olimpiada națională din URSS/1968, MU, vol. 25, nr. 1/1970

Soluție. Aplicînd recurența în (1) obținem, adunînd membru cu membru:

$$x_{n+1} = x_1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}. \tag{3}$$

Ridicînd (1) la pătrat și însumînd avem

$$x_{n+1}^2 = x_n^2 + \frac{1}{x_n^2} + 2; \; x_{n+1}^2 = x_1^2 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k^2} + 2n \tag{4}$$

și minorînd suma din membrul al doilea,

$$x_{n+1}^2 \geqslant 2n + 2 \text{ cu } n \geqslant 1, \; x_n^2 \geqslant 2n \text{ cu } n \geqslant 2$$

de unde

$$x_n \geqslant \sqrt{2n} \text{ și } \frac{1}{x_n} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2n}}. \tag{5}$$

Însă din (3) și (5) deducem

$$x_{n+1} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k} = 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{x_k} \leqslant 2 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2k}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2k}} + 2 - \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ cu } n \geqslant 1.$$

Însă

$$\frac{1}{\sqrt{2k}} = \frac{2}{\sqrt{2k} + \sqrt{2k}} < \frac{2}{\sqrt{2k} + \sqrt{2k-2}} = \sqrt{2k} - \sqrt{2k-2} \tag{6}$$

prin folosirea conjugatei numitorului. Adunînd membru cu membru aceste inegalități pentru $k = 1, 2, \ldots, n$ obținem

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2k}} < \sqrt{2n} \tag{7}$$

Introducînd în (6) și ținînd seama de (5), se ajunge la inegalitatea (1) din enunț cu $n \geqslant 2$.

Comentarii. a) În enunț dubla inegalitate este nestrictă, ceea ce nu este realizabil, fiindcă inegalitatea (7) este strictă ca provenind din (5), care este nestrictă, numai pentru $n = 2$. Într-adevăr, pentru $n = 3$, $x_3 = 5/2$ și $2/5 < 1/\sqrt{6}$, deci în sumă toți termenii în afară de primul sînt majorați.

b) Această precizare sugerează încercarea de a întări dubla inegalitate în dreapta. Din (4) și (5) deducem pentru $n \geqslant 1$:

$$x_{n+1}^2 = 2n + 2 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k^2} \text{ și pentru } n \geqslant 2;$$

$$x_n^2 = 2n + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{x_k^2} < 2n + \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k} < 2n + \frac{1}{2} \ln (n-1)$$

prin majorarea sumei parțiale a seriei armonice. În final

$$\sqrt{2n} \leqslant x_n < \sqrt{2n + \frac{1}{2} \ln (n-1)} \text{ cu } n \geqslant 2 \tag{8}$$

este noua formulă a dublei inegalități din enunț. Este aceasta mai bună? Un exemplu convingător este cazul $n = 100$, unde (1) conduce la estimarea $14{,}14 < x_{100} < 15{,}36$
iar (8) la $14{,}14 < x_{100} < 14{,}223$, valoarea calculată cu 10 zecimale a lui x_{100} fiind $x_{100} = 14{,}2137094291$.

c) Este instructiv să analizăm cauza pentru care prima formă a inegalității este mai slabă decît a doua. Separarea estimărilor se face prin inegali-

tatea (5), unde $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k^2}$ este puternic minorată și folosită ca atare, pe cînd în a doua estimare ea este din nou folosită în întregime, după ce a fost minorată pentru a se obține majorarea $x_k^2 \geqslant 2n$. Să dovedim că

$$\sqrt{2n + \frac{1}{2}\ln(n-1)} < \sqrt{2n-2} + 2 - \frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{9}$$

Ridicînd ambii membrii la pătrat și simplificînd vom avea

$$\frac{1}{4}\ln(n-1) < \frac{5}{4} - \sqrt{2} + (2\sqrt{2}-1)\sqrt{n-1} \quad (n \geqslant 2)$$

sau

$$\frac{\ln(n-1)}{\sqrt{n-1}} < 4(2\sqrt{2}-1) + \frac{5-4\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}} = (2\sqrt{2}-1)\left(4 - \frac{2}{\sqrt{n-1}}\right) + \frac{1}{\sqrt{n-1}}.$$

Membrul al doilea este o funcție descrescătoare de n, care pentru $n = 2$ se reduce la $4\sqrt{2} - 1$, iar $\frac{\ln(n-1)}{\sqrt{n-1}} < 2$ pentru $n \geqslant 2$. Cum $2 < 4\sqrt{2} - 1$, inegalitatea (9) este dovedită.

SC 10. *Folosind inegalitatea mediilor aritmetică și geometrică, să se găsească minimul expresiei*

$$x + 1/xy + y^2 \quad \text{cu } x > 0,\ y > 0.$$

Robert A. Bagnato, The Mathematical Gazette, vol. 59, nr. 407/1975

Soluție. Notăm $u_1 = x$, $u_2 = 1/xy$, $u_3 = y^2$ și luăm arbitrar d_1, d_2, d_3 cu $d_1 + d_2 + d_3 = 1$, $d_1, d_2, d_3 > 0$ Vom avea, folosind inegalitatea dintre mediile aritmetică și geometrică

$$x + 1/xy + y^2 \geqslant \left(\frac{1}{d_1}\right)^{d_1}\left(\frac{1}{d_2}\right)^{d_2}\left(\frac{1}{d_3}\right)^{d_3} x^{d_1-d_2} \cdot y^{-d_2+2d_3}.$$

Pentru a pune în evidență o margine inferioară, eliminăm x și y din membrul al doilea, luînd $d_1 - d_2 = 0$, $-d_2 + 2d_3 = 0$, $d_1 + d_2 + d_3 = 1$, de unde $d_1 = 2/5$, $d_2 = 2/5$, $d_3 = \frac{1}{5}$.

În aceste condiții,

$$x + 1/xy + y^2 \geqslant \left(\frac{5}{2}\right)^{4/5} \cdot 5^{4/5} = 5/2^{-4/5}.$$

Punînd $K = 5/2$ obținem $x = 2^{1/5}$, $y = 2^{-2/5}$, ca punct de minim absolut, acest minim fiind $K = 5/2^{4/5}$.

SC 11. *Folosind inegalitatea dintre mediile aritmetică și geometrică generalizate să se arate că:*

1) *dacă* $d_i > 0$, $(i = 1, 2, ..., m)$, $d_1 + d_2 + ... + d_m = 1$ *și* $u_i \geqslant 0$, *are loc relația*

$$u_1 + u_2 + ... + u_m \geqslant \left(\frac{u_1}{d_1}\right)^{d_1} \cdot ... \cdot \left(\frac{u_m}{d_m}\right)^{d_m}, \tag{1}$$

egalitatea avînd loc, dacă și numai dacă $u_i = Cd_i$, *unde* C *este o constantă independentă de* i;

2) *Dacă* $d_k = 0$, *pentru* $k \in \{1, 2, ..., m\}$, *relația se menține eliminînd termenii relativi la* k *din relație;*

3) *Presupunînd că* d_i *pot fi aleși astfel încît*

$$\left(\frac{u_1}{d_1}\right)^{d_1} \cdot \left(\frac{u_2}{d_2}\right)^{d_2} \cdot ... \cdot \left(\frac{u_m}{d_m}\right)^{d_m} = K \tag{2}$$

condiția necesară și suficientă pentru ca

$$u_1 + u_2 + ... + u_m = K$$

este ca $u_i = Kd_i$, *și în acest caz* K *este minimul absolut al sumei* $u_1 + u_2 + ... + u_m$.

Robert A. Bagnato, The Mathematical Gazette, vol. 59, nr. 407/1975

Soluție. Cu $d_i \geqslant 0$, $d_1 + d_2 + ... + d_m = 1$ și $v_i \geqslant 0$, inegalitatea mediilor este, după cum se știe:

$d_1v_1 + d_2v_2 + ... + d_mv_m \geqslant v_1^{d_1}v_2^{d_2} ... v_m^{d_m}$, egalitatea avînd loc dacă și numai dacă $v_1 = v_2 = ... = v_m$.

1) Este suficient să luăm $v_i = u_i/d_i$ cu $d_i > 0$, pentru a avea inegalitatea (1). În cazul egalității, obținem $u_1/d_1 = u_2/d_2 = ... = u_m/d_m = C$

2) Cazul în care există $d_k = 0$ se rezolvă prin eliminarea lui d_kv_k din inegalitatea mediilor.

3) *Condiția este necesară.* Dacă $u_1 + u_2 + ... + u_m = K$, ținînd seama de ipoteza (2), vom avea în (1) egalitate, deci $u_i = Cd_i$ și $u_1 + u_2 + ... + u_m = C = C(d_1 + d_2 + ... + d_m) = C$, de unde $C = K$ și $u_i = Kd_i$. Suficiența este imediată, aplicînd (1). Cum ipoteza (2) introdusă în (1) conduce la $u_1 + u_2 + ... + u_m \geqslant K$, urmează că pentru $u_i = Kd_i$, această margine inferioară este atinsă și devine minimum absolut.

Comentarii. Relația dintre mediile aritmetică și geometrică este o sursă importantă de metode de rezolvare a unor probleme de inegalități și de extreme ale unor sume cu termeni pozitivi, implicînd mai multe variabile pozitive, deci în probleme de optimizare.

SC 12. *Fiind dată seria* $\sum_{r=1}^{\infty} a_r$ *unde* $a_r = \begin{cases} \dfrac{1}{r}, & \text{dacă } r = k^2 \\ \dfrac{1}{r^2}, & \text{dacă } r \neq k^2 \end{cases}$

pentru orice k = număr natural să se arate că:

a) *seria este convergentă*; b) *$\lim_{n\to\infty} na_n$ nu există*; c) $\lim_{n\to\infty} nG_n = 0$, *unde G_n este media geometrică a primilor n termeni ai seriei.*

I. R. Nurcombe, The Mathematical Gazette, vol. 59, nr. 408/1975

Soluție. 1) Fie t cel mai mare întreg natural astfel încît $t^2 \leqslant n$, deci $n = t^2 + p$, cu $0 \leqslant p \leqslant 2t$. Vom putea scrie

$$\sum_{r=1}^{n} a_r = \sum_{r=1}^{t^2+p} \frac{1}{r^2} - \sum_{r=1}^{t} \frac{1}{r^4} + \sum_{r=1}^{t} \frac{1}{r^2}$$

și se vede că pentru $t\to\infty$ toate cele trei serii armonice generalizate sînt convergente.

2) Dacă $n \neq t^2$, $na_n = \dfrac{1}{n} \to 0$; dacă $n = t^2+p$, $na_n = (t^2+p)\dfrac{1}{(t^2+p)} = 1$, deci șirul $\{na_n\}$ nu este convergent.

3) Cînd $r = k^2$, $1/r^2 = 1/k^2$ se înlocuiește cu $1/r = 1/k^2 = k^2/k^4$. Astfel, pentru $n = t^2 + t$ avem

$$G_n = \left(\frac{1 \cdot 4 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot t^2}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot \ldots \cdot (t^2)^2 \cdot \ldots \cdot (t^2+p)^2}\right)^{1/(t^2+p)} = \left(\frac{t!}{(t^2+p)!}\right)^{2/(t^2+p)}.$$

Aplicînd formula lui Stirling pentru t mare,

$$nG_n \sim \left(\frac{\sqrt{2\pi}\, e^{-t} t^{t+\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}\, e^{-(t^2+p)} (t^2+p)^{t^2+p+\frac{1}{2}}}\right)^{2/(t^2+p)} \cdot (t^2+p) =$$

$$= \frac{e^{-t/(t^2+p)} \cdot t^{(2t+1)/(t^2+p)}}{e^{-2} \cdot (t^2+p)^{(2t^2+2p+1)/(t^2+p)}}.$$

Micșorînd exponenții la numitor și mărindu-i la numărător, obținem ca nouă evaluare

$$nG_n < \frac{e^{-2t/t^2} \cdot t^{(2t+1)/t^2}}{e^{-2} \cdot (t^2+p)} \sim \frac{e^2}{t^2}$$

și cînd $t\to\infty$, $\lim nG_n = 0$.

Comentarii. Folosirea formulei lui Stirling s-a dovedit deosebit de eficace în aceste două probleme (v. și problema ce urmează) în care estimarea unui factorial este esențială. În același timp a apărut o extensiune a funcției parte întreagă prin cuprinderea lui n între două pătrate consecutive $t^2 \leqslant n = t^2 + p < (t+1)^2$, care s-a dovedit foarte fructuoasă și deci merită a fi reținut ca tehnică de estimări calitative.

SC 13. *Notînd prin G_n media geometrică a primilor n termeni ai unei serii $\sum_{r=1}^{\infty} a_r$ cu termeni pozitivi, o condiție necesară de convergență a acestei serii este* $\lim_{n\to\infty} nG_n = 0$.

J. R. Nurcombe, The Mathematical Gazette, vol. 59, nr. 408/1975

Soluție. Punînd $s_n = \sum_{r=1}^{n} a_r$ și presupunînd $\lim_{n\to\infty} s_n = s$, teorema lui Cauchy asupra mediei aritmetice arată că $\lim_{n\to\infty} (s_1 + s_2 + \ldots + s_n)/n = s$. Explicitînd

$$\lim_{n\to\infty} \frac{na_1 + (n-1)a_2 + (n-2)a_3 + \ldots + a_n}{n} = s.$$

Cum $\sum_{r=1}^{n} (n - r + 1)a_r + \sum_{r=1}^{n} ra_r = (n+1)\sum_{r=1}^{n} a_r = (n+1)s_n$, deducem că $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n} ra_r = 0$.

Aplicînd inegalitatea mediilor aritmetică și geometrică avem

$$\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n} ra_r \geqslant (n!\, a_1a_2 \ldots a_n)^{1/n} = (n!)^{1/n}G_n.$$

Aproximînd prin formula lui Stirling $n! \sim \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}$ pentru valori mari ale lui n și cum $(\sqrt{2\pi n})^{1/n} \sim 1$, vom avea $(n!)^{1/n} \sim n/e$, deci

$0 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n} ra_r \geqslant \lim_{n\to\infty} \frac{1}{e}(nG_n) = \frac{1}{e}\lim_{n\to\infty} nG_n \geqslant 0$, ceea ce implică $\lim_{n\to\infty} nG_n = 0$.

Comentarii. Criteriile de convergență dau condiții suficiente și de excepție, dar nu și necesare. În această ultimă categorie relativ la seriile numerice, în afară de $\lim_{r\to\infty} a_r = 0$, dacă seria $\sum_{r=1}^{\infty} a_r$ este convergentă, teorema lui *Abel-Pringsheim* pentru serii convergente cu termeni pozitivi și descrescători arată că $\lim_{r\to\infty} ra_r = 0$ și că nu există condiții necesare de convergență mai tari decît aceasta. Teorema demonstrată privește o clasă mult mai largă decît cele din teorema lui Abel-Pringsheim. *Pentru termeni pozitivi și descrescători se poate stabili printr-un raționament analog celui folosit că*

$$\lim_{n\to\infty} na_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} nG_n = 0,$$

ceea ce recomandăm cititorilor să încerce.

În general însă, $\lim_{n\to\infty} nG_n = 0$ nu implică $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$.

SC 14. *Într-un triunghi oarecare $A_1A_2A_3$, dacă notăm prin α_1, α_2, α_3 măsurile unghiurilor corespunzătoare vîrfurilor A_1, A_2, A_3 are loc următoarea dublă inegalitate*

$$0 < \sin\frac{\alpha_1}{2}\sin\frac{\alpha_2}{2}\sin\frac{\alpha_3}{2} \leqslant \frac{1}{8},$$

egalitatea avînd loc pentru triunghiul echilateral.

O. Bottema, Geometric Inequalities, Groningen/1968

Soluţie. Cum $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \pi$, vom considera funcţia reală de două, variabile $f(\alpha_1, \alpha_2) = \sin\frac{\alpha_1}{2}\sin\frac{\alpha_2}{2}\sin\frac{\alpha_3}{2} = \sin\frac{\alpha_1}{2}\sin\frac{\alpha_2}{2}\cos\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}$ definită pe $0 < \alpha_1 < \pi$, $0 < \alpha_2 < \pi$, indefinit derivabilă. Anulînd derivatele parţiale de primul ordin $\frac{\partial f}{\partial \alpha_1} = \frac{1}{2}\sin\frac{\alpha_2}{2}\cos\frac{2\alpha_1+\alpha_2}{2}$; $\frac{\partial f}{\partial \alpha_2} = \frac{1}{2}\sin\frac{\alpha_1}{2}\cos\frac{2\alpha_2+\alpha_1}{2}$, avem sistemul

$$2\alpha_1 + \alpha_2 = \pi;\ 2\alpha_2 + \alpha_1 = \pi$$

cu soluţie unică $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\pi}{3}$, de unde $\alpha_3 = \frac{\pi}{3}$. Valoarea $f\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{8}$ este un maxim. Într-adevăr, definind prin mulţimea punctelor (α_1, α_2) de forma $\alpha_1 = \frac{\pi}{3} + \varepsilon$, $\alpha_2 = \frac{\pi}{3} + \varepsilon$ (cu ε real) o vecinătate a lui $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$, putem scrie $f\left(\frac{\pi}{3}+\varepsilon, \frac{\pi}{3}+\varepsilon\right) = \frac{1}{8}\left(\cos^2\frac{\varepsilon}{2} + 3\sin^2\frac{\varepsilon}{2} + 2\sqrt{3}\sin\frac{\varepsilon}{2}\cos\frac{\varepsilon}{2}\right) \times$ $\times (\cos\varepsilon - \sqrt{3}\sin\varepsilon)$ şi luînd $|\varepsilon|$ suficient de mic, rezultă $\sin\frac{\varepsilon}{2} \sim \frac{\varepsilon}{2}$, $\cos\frac{\varepsilon}{2} \sim 1$, deci avem evaluarea $f\left(\frac{\pi}{3}+\varepsilon, \frac{\pi}{3}+\varepsilon\right) \leqslant \frac{1}{8}\left(1 + \frac{\varepsilon^2}{2} + \sqrt{3}\,\varepsilon\right) \times$ $\times (1 - \sqrt{3}\,\varepsilon) < \frac{1}{8}\left(1 - 3\varepsilon^2 + \frac{\varepsilon^2}{2} - \sqrt{3}\,\varepsilon^3\right) = \frac{1}{8}\left(1 - \frac{5\varepsilon^2}{2} - \sqrt{3}\,\varepsilon^3\right) < \frac{1}{8}$ dacă $|\varepsilon| < \frac{5}{2\sqrt{3}}$, ceea ce este oricînd valabil. Deci există o vecinătate a punctului $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ în care $f(\alpha_1, \alpha_2) < \frac{1}{8}$, astfel încît acest punct este un maximum, singurul în domeniul de definiţie al funcţiei f, care în plus este strict pozitivă dacă $\alpha_1, \alpha_2 \neq 0$, ceea ce completează demonstraţia.

Comentarii. Soluţia dată de noi este analitică şi necesită cunoştinţe de teoria funcţiilor diferenţiabile de două variabile. Nu cunoaştem soluţia dată de O. Bottema şi lăsăm în atenţia cititorilor găsirea altor soluţii mai elementare.

SC 15. *Fie* $f : \mathbf{R} \to [-a, a]$ *continuă ca şi* f' *pe acest interval. Să se arate că*

$$|f(0)| \leqslant \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} |f(x)|\,dx + \frac{1}{2}\int_{-a}^{a} |f'(x)|\,dx.$$

Ontario Math. Bull., vol. 10, nr. 3/1974

Soluţie. Vom avea pentru $x \in [-a, a]$:

$$|f(0)| = |f(x) + f(0) - f(x)| \leqslant |f(x)| + |f(0) - f(x)|;$$

de asemenea

$$|f(0)| = |f(-x) + f(0) - f(-x)| \leqslant |f(-x)| + |f(0) - f(-x)|$$

şi adunînd membru cu membru, apoi integrînd, obţinem respectiv

$$2|f(0)| \leqslant |f(x)| + |f(-x)| + |f(x) - f(0)| + |f(-x) - f(0)|,$$

$$2\int_{-a}^{a} |f(0)|\,dx \leqslant \int_{-a}^{a} |f(x)|\,dx + \int_{-a}^{a} |f(-x)|\,dx + \int_{-a}^{a} |f(x) - f(0)|\,dx +$$

$$+ \int_{-a}^{a} |f(-x) - f(0)|\,dx. \tag{1}$$

Punînd $x = -u$ vom avea $\int_{-a}^{a} |f(-x)|\,dx = -\int_{a}^{-a} |f(u)|\,du =$ $= \int_{-a}^{a} |f(x)|\,dx$, relaţie valabilă pentru orice f, funcţie continuă, deci în particular

$$\int_{-a}^{a} |f(-x) - f(0)|\,dx = \int_{-a}^{a} |f(x) - f(0)|\,dx.$$

Revenind la (1), vom obţine

$$4a|f(0)| \leqslant 2\int_{-a}^{a} |f(x)|\,dx + 2\int_{-a}^{a} |f(x) - f(0)|\,dx. \tag{2}$$

Dar

$$|f(x) - f(0)| = \left|\int_{0}^{x} f'(t)\,dt\right| \leqslant \int_{0}^{x} |f'(t)|\,dt \leqslant \int_{0}^{a} |f'(t)|\,dt$$

pentru $x \in [0, a]$ şi de asemenea pentru $x \in [-a, 0]$ vom putea scrie

$$|f(x) - f(0)| = \left|\int_{x}^{0} f'(t)\,dt\right| \leqslant \int_{x}^{0} |f'(t)|\,dt \leqslant \int_{-a}^{0} |f'(t)|\,dt.$$

Evaluînd acum

$$\int_{-a}^{a} |f(x) - f(0)|\, dx = \int_{-a}^{0} |f(x) - f(0)|\, dx + \int_{0}^{a} |f(x) - f(0)|\, dx \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-a}^{0} \left(\int_{-a}^{0} |f'(x)|\, dx \right) dx + \int_{0}^{a} \left(\int_{0}^{a} |f'(x)|\, dx \right) dx$$

vom observa că integralele din paranteze sînt constante, deci le vom putea permuta în faţa celor externe şi vom avea

$$\int_{-a}^{a} |f(x) - f(0)|\, dx \leqslant a \int_{-a}^{0} |f'(x)|\, dx + a \int_{0}^{a} |f'(x)|\, dx =$$

$$= a \int_{-a}^{a} |f'(x)|\, dx.$$

Folosind relaţia (2), obţinem inegalitatea din enunţ.

SC 16. *Notînd cu* $\theta = \{x\}$ *partea fracţionară a lui* $x \in \mathbf{R}$, *cu* $0 \leqslant \theta < 1$, *condiţia necesară şi suficientă pentru ca* $[x^2] = [x]^2$ *este ca* $\theta/2 \leqslant x < (\theta^2 + 1)/2\theta$.

Rodney T. Hansen, The New Zealand Mathematics Magazine, vol. 12, nr. 1/1977

Soluţie. Vom nota $x = [x] + \theta$, de unde

$$[x^2] = [[x^2] + 2\theta[x] + \theta^2] = [x]^2 + [2\theta[x] + \theta^2].$$

Impunînd condiţia $0 \leqslant 2\theta[x] + \theta^2 < 1$, adică $[x] < (1 - \theta^2)/2\theta$, vom avea $x < \theta + (1 - \theta^2)/2\theta = (\theta^2 + 1)/2\theta$. Dar $2\theta[x] + \theta^2 \geqslant 0$, de unde $-\theta/2 \leqslant [x] = x - \theta$, deci $x \geqslant \theta/2$, de unde necesitatea condiţiei din enunţ. Suficienţa rezultă prin refacerea raţionamentului pas cu pas în sens invers.

Comentarii. În enunţul original intervenea $|x|$, dar demonstraţia dată arătînd că $x \geqslant \dfrac{\theta}{2}$, impune implicit $x \geqslant 0$.

De altfel, pentru $x = \dfrac{\theta}{2}$, obţinem $[x] = 0$ şi relaţia din enunţ este verificată: $\left[\dfrac{\theta^2}{2}\right] = 0 = \left[\dfrac{\theta}{2}\right]^2$. În plus, pentru orice întreg natural x, avem evident $[x^2] = [x]^2$, dar există şi o infinitate de soluţii neîntregi.

Într-adevăr, relaţia $\dfrac{\theta}{2} \leqslant x < \dfrac{1 + \theta^2}{2\theta}$ este verificată, dacă alegem pe $\theta > 0$ suficient de mic, de orice $x = N$ real. Inegalitatea $N < \dfrac{1 + \theta^2}{2\theta}$ conduce

la $\theta^2 - 2N\theta + 1 > 0$, iar ecuația $\theta^2 - 2N\theta + 1 = 0$ are ca rădăcini $\theta_{1,2} = N \pm \sqrt{N^2 - 1}$. Dintre acestea $\theta_1 = N - \sqrt{N^2 - 1} = N\left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{N^2}}\right) = N\left(1 - 1 + \frac{1}{2N^2} + \ldots\right)$ deci $\theta_1 \approx \frac{1}{2N^2}$ și pentru $N \geqslant 1$ vom avea $\theta_1 \leqslant \frac{1}{2}$.
Poate fi extinsă proprietatea din enunț? Răspunsul este afirmativ, cum apare din studiul cazului $[x^3] = [x]^3$, care este obiectul problemei ce urmează.

SC 17. *Condiția necesară și suficientă pentru ca* $[x^3] = [x]^3$, *pentru* $x \in \mathbf{R}$ *este*

$$|x - \theta/2| < \sqrt{(4 - \theta)^3/12\theta}.$$

Rodney T. Hansen, The New Zealand Mathematics Magazine, vol. 12, nr. 1/1975

Soluție. $[x^3] = [([x] + \theta)^3] = [x]^3 + [3[x]^2\theta + 3[x]\theta^2 + \theta^3]$. Pentru egalitatea din enunț, a doua parte întreagă din membrul al II-lea trebuie să fie nulă, de unde

$$0 \leqslant 3[x]^2\theta + 3[x]\theta^2 + \theta^3 < 1$$

și introducînd $x = [x] + \theta$, ajungem la dubla inegalitate $0 \leqslant 3x^2 - 3x\theta + \theta^2 < 1/\theta$.
Funcția $f(x) = 3x^2 - 3\theta x + \theta^2$ are un minim pozitiv pentru $x = \theta/2$, căci $f(\theta/2) = \theta^2/4 > 0$, deci dubla inegalitate se reduce la $3x^2 - 3x\theta + \theta^2 < 1/\theta$, care se poate scrie $3(x - \theta/2)^2 < (4 - \theta^3)/4\theta$, de unde inegalitatea din enunț. Suficiența se demonstrează prin refacerea, etapă cu etapă, a raționamentului începînd de la concluzie.

Comentarii. Metoda aplicată pune în evidență necesitatea studiului unei duble inegalități relative la un polinom de un grad cu o unitate mai mic decît puterea n pentru care $[x]^n = [x]^n$. Se pune de asemenea problema mulțimii soluțiilor și se rezolvă pozitiv.

SC 18. *În tetraedul* $[PABC]$ *tridreptunghi în* P *se cunoaște suma* S *a lungimilor celor șase muchii. Se cere să se evalueze volumul maxim* V.

Olimpiada din URSS/1976, MU vol. 25, nr. 1/1979

Soluție. Fie $x = \|PA\|$, $y = \|PB\|$, $z = \|PC\|$ lungimile muchiilor care pleacă din P. Se evaluează imediat celelalte trei și vom avea

$$S = x + y + z + \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{y^2 + z^2} + \sqrt{z^2 + x^2} \text{ cu } x, y, z \geqslant 0.$$

Se știe că dacă $a > 0$, $b > 0$ avem $\sqrt{a^2 + b^2} \geqslant \frac{a + b}{2}$. Aplicînd aceste inegalități obținem

$$x + y + z + \frac{x + y}{\sqrt{2}} + \frac{y + z}{\sqrt{2}} + \frac{z + x}{\sqrt{2}} = (\sqrt{2} + 1)(x + y + z) \leqslant S. \quad (1')$$

Pe de altă parte, inegalitatea mediilor aritmetică și geometrică arată că $\frac{x+y+z}{3} \geqslant \sqrt[3]{xyz}$, astfel încît vom avea $3(\sqrt{2}+1)\sqrt[3]{xyz} \leqslant S$. Volumul este

$$V = \frac{xyz}{6}, \text{ de unde } V \leqslant \frac{S^3}{162(\sqrt{2}+1)^3}.$$

Tetraedrul fiind tridreptunghic, volumul său este o funcție crescătoare de fiecare dintre lungimile x, y, z ale muchiilor sale ortogonale. Pe de altă parte V este și mărginit, deci va avea o margine superioară pe care o va atinge. De asemenea $x+y+z$ este crescătoare și mărginită și deci va avea un maxim pe care îl va atinge.
În aceste condiții

$\max(x+y+z) = \frac{S}{\sqrt{2}+1}$ fiind atins, rezultă că $\max V = \max \frac{xyz}{6}$ va fi atins, cînd $x = y = z = \frac{S}{3(\sqrt{2}+1)}$, de unde $\max V = \frac{S^3}{6 \cdot 3^3(\sqrt{2}+1)^3} = \frac{5\sqrt{2}-1}{162} S^3$.

Comentarii. 1) În soluția prezentată în M.U. vol. 25 nr. 1 se obține același rezultat afirmîndu-se că suma $x+y+z =$ dată, deci produsul xyz este maxim cînd $x = y = z$.
Această afirmație nu este însă riguroasă, fiindcă din enunț se cunoaște $S =$ = suma tuturor lungimilor celor șase muchii dată de (1), iar din (1') rezultă doar marginea superioară a sumei $x+y+z$. De aceea, am folosit raționamentul de mai înainte, care evită această afirmație.

2) Tehnica stabilirii inegalităților împrumută una din tehnicile trigonometrice. Este nevoie să stăpînim, pe de o altă parte, o anumită rutină în folosirea operațiilor elementare cu inegalități de bază.
Este surprinzătoare observația de bază a prof. *A. Engel* autorul articolului „Inegalități" din M.U. că dacă $x \in R$, cea mai importantă inegalitate este $x^2 \geqslant 0$, egalitatea obținîndu-se numai pentru $x = 0$. Este surprinzătoare, ca o sfidare, dar este și instructivă. Într-adevăr, punînd $x = a - b$, cu $a, b > 0$ obținem o suită de inegalități fundamentale ca

$$a + b \geqslant 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geqslant 2ab \Leftrightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqslant 2.$$

Apoi, altele din ce în ce mai complicate. De exemplu, din $x^4 \geqslant 0$, pentru orice $x \in R$, deducem

$x^4 + 4x^2 + 4 \geqslant 4x^2 + 4 \Leftrightarrow (x^2+2)^2 \geqslant 4(x^2+1)$, de unde $\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} \geqslant 2$, care nu mai seamănă deloc cu $x^4 \geqslant 0$.
Metoda folosită în problemă poate fi adaptată și altor evaluări metrice în geometrie. Acest gen de probleme apare des în olimpiade și concursuri.

SC 19. *Să se demonstreze inegalitatea*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{nkz - 1}{(kz + 1)^{n+2}} < \frac{1}{2}$$

pentru $z > 0$ *şi* $n = 1, 2, \ldots,$

M. J. Ritter, N.A.W. vol. 28, nr. 3/1980

Soluţie. Vom introduce funcţia auxiliară $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(kz + 1)^{n+1}}$.

Observăm că seria respectivă este uniform convergentă, termenul său general fiind majorat de $1/z^{n+1}\, k^{n+1}$, iar $1/k^{n+1}$ este termenul general al seriei armonice generalizate.

Să considerăm şi funcţia

$$g(z) = \frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{nkz - 1}{(kz + 1)^{n+2}} = \frac{d}{dz}\left[\frac{z}{2} + zf(z)\right], \tag{1}$$

urmărind să arătăm că $g(z) > 0$ pentru orice $z > 0$. În acest scop, vom asocia o reprezentare integrală lui $f(z)$. În general, punînd $u = kz + 1 > 0$, integrala $\int_0^{\infty} t^n e^{-ut}\, dt = I_n$ este uniform convergentă şi printr-o integrare prin părţi conduce la

$$I_n = \frac{n}{u} I_{n-1}, \text{ de unde } I_n = \frac{n!}{u^{n+1}}; \quad \text{deci} \quad \frac{1}{u^{n+1}} = \frac{1}{n!} \int_0^{\infty} t^n e^{-ut}\, dt. \tag{2}$$

Înlocuind în expresia lui $f(z)$ obţinem

$$f(z) = \frac{1}{n!} \cdot \int_0^{\infty} t_u e^{-t} \sum_{k=1}^{\infty} (e^{-tz})^k\, dt.$$

Cum $e^{-tz} < 1$ pentru $t > 0$, $z > 0$, seria geometrică avînd raţia e^{-tz} este convergentă uniform în z şi t, astfel încît

$$f(z) = \frac{1}{n!} \cdot \int_0^{\infty} \frac{t^n e^{-t(z+1)}}{1 - e^{-tz}} \cdot \tag{3}$$

Ţinînd seama de (1) şi de convergenţa uniformă a integralei improprii (3), putem deriva sub semnul integral în raport cu z, astfel încît $g(z)$ se pune sub forma

$$g(z) = \frac{1}{2} + \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{n!} \int_0^{\infty} t^n e^{-t} \frac{z e^{-tz}}{1 - e^{-zt}}\, dt\right) =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{n!} \cdot \int_0^{\infty} t^n e^{-t} \frac{e^{-tz}(1 - zt - e^{-zt})}{(1 - e^{-zt})^2}\, dt.$$

Sub această formă ar fi greu de stabilit că $g(z) > 0$, pentru $z > 0$, întrucît pe de o parte $1 - zt - e^{-zt}$ își schimbă semnul cînd $zt > 0$ crește, iar derivata lui $1 - v - e^{-v}$, cu $(v = zt)$ este $-1 + e^{-v} < 0$ pentru $v > 0$, deci funcția este descrescătoare. Dacă însă folosim formula integrală (2) pentru $u = 1$, scriind $\frac{1}{2} = \frac{1}{2 \cdot n!} \int_0^\infty t^n e^{-t}\, dt$, vom pune pe $g(z)$ sub următoarea formă. care se va dovedi salutară

$$g(z) = \frac{1}{2n!} \cdot \int_0^\infty t^n e^{-t} \frac{1 - 2zt e^{-zt} - e^{-2zt}}{(1 - e^{-zt})^2}\, dt.$$

Funcția $h(v) = 1 - 2v e^{-v} - e^{2v}$ are ca derivată $h'(v) = 2e^{-v}(e^{-v} - 1 + v)$. Factorul $e^{-v} - 1 + v$ este pozitiv, fiindcă pentru $v = 0$ se anulează, iar derivata sa este $1 - e^{-v} \geqslant 0$, pentru $v \geqslant 0$, deci este crescător și pozitiv. Cum $h'(v) \geqslant 0$ și $h(0) =$ urmează că $h(v) \geqslant 0$. În consecință, $g(z) > 0$ pentru $z > 0$, ceea ce stabilește inegalitatea din enunț.

Comentarii. Tehnicile folosite în stabilirea inegalității din enunț sînt remarcabile și rafinate. Atacarea directă a problemei impune majorarea termenului general cu scopul de a găsi o serie majorantă a cărei sumă să fie inferioară lui 1/2. De aceea, autorul introduce funcția auxiliară $f(z)$ majorată de o serie armonică generalizată și apoi funcția $g(z)$ strîns legată de $f(z)$ și care rezolvă problema dacă este strict pozitivă. Folosirea reprezentărilor integrale dă eleganța și eficiența metodei întrucît, integrandul lui $g(z)$ se dovedește a fi strict pozitiv și crescător.

SC 20. *Dacă funcția* $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$ *este de clasă* $C^1[0, 1]$ *și* $f(0) = f(1) = 0$, *să se demonstreze relația:*

$$\left(\int_0^1 f(x)\, dx\right)^2 \leqslant \frac{1}{12} \int_0^1 [f'(x)]^2\, dx.$$

Cînd se realizează egalitatea? (Condiție suficientă).

H. I. Seiffert, Elemente der Mathematik vol. 38, nr. 2/1983

Soluție. Integrînd prin părți, vom putea scrie

$$\int_0^1 f(x)\, dx = xf(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 xf'(x)\, dx = -\int_0^1 xf'(x)\, dx,$$

dar cum $\int_0^1 f'(x)\, dx = f(x)\Big|_0^1 = 0$ obținem ușor relația

$$2\int_0^1 f(x)\, dx = \int_0^1 (1 - 2x) f'(x)\, dx.$$

Aplicînd inegalitatea Cauchy-Buniakowski-Schwartz, vom avea

$$4\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2 = \left(\int_0^1 (1-2x)\,f'(x)\,dx\right)^2 \leqslant \int_0^1 (1-2x)^2\,dx \cdot \int_0^1 [f'(x)]^2\,dx.$$

Prima integrală se calculează şi este egală cu $\frac{1}{3}$. Prin urmare, obţinem inegalitatea din enunţ, împărţind ambii membri la 4. Pentru egalitate, vom încerca funcţii polinomiale, cu intenţia de a identifica în cei doi membri coeficienţii. Nu este posibilă o funcţie liniară, din cauza condiţiilor $f(0) = f(1) = 0$, dar polinomul $cx(1-x)$ cu $c =$ constantă arbitrară, are ca derivată $c(1-2x)$ şi este uşor de văzut că

$$4\left(\int_0^1 cx\,(1-x)\,dx\right)^2 = \frac{1}{3}\int_0^1 c(1-2x)^2\,dx,$$

deci egalitatea se obţine pentru $f(x) = cx\,(1-x)$.

Am obţinut astfel o condiţie suficientă pentru egalitate, fără a fi însă necesară.

SC 21. *Fie* $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$, *continuă şi* $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$. *Să se arate că*

$$\left(\int_0^1 x^2 f(x)\,dx\right)^2 \leqslant \frac{1}{3}\int_0^1 x^2 (f(x))^2\,dx.$$

Cînd se obţine egalitatea?

H. J. Seiffert, El. der Math. vol. 38, nr. 1/1983

Soluţie. Vom putea aplica inegalitatea Cauchy — Buniakovski-Schwartz, după cum urmează

$$\left(\int_0^1 x^2 f(x)\,dx\right)^2 = \left(\int_0^1 x \cdot x f(x)\,dx\right)^2 \leqslant \left(\int_0^1 x^2\,dx\right)\cdot\left(\int_0^1 x^2 f^2(x)\,dx\right) =$$

$$= \left(\frac{x^3}{3}\Big|_0^1\right)\cdot\int_0^1 x^2 f^2(x)\,dx = \frac{1}{3}\int_0^1 x^2 f^2(x)\,dx.$$

Se vede că nu am aplicat condiţia $\int_0^1 f(x)dx = 0$ din enunţ.

Vom obţine egalitatea pentru $f(x) = 1$, pentru care $\int_0^1 1 \cdot dx = 1 \neq 0$. Într-adevăr, $\left(\int_0^1 x^2\,dx\right)^2 = \left(\frac{x^3}{3}\Big|_0^1\right)^2 = \frac{1}{9} = \frac{1}{3}\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{9}$. Cum $\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2} \neq 0$. avem încă o dovadă că $\int_0^1 f(x)dx = 0$ este o condiţie supraabundentă.

Comentarii. Problema admite numeroase generalizări, dintre care vom prezenta următoarea:

Fie $f:[0,1]\to\mathbf{R}$, *continuă. Să se arate că avem inegalitatea*

$$\left(\int_0^1 x^{m+p}f(x)\,dx\right)^2 \leqslant \frac{1}{2m+1}\int_0^1 x^{2p}f^2(x)\,dx,$$

unde m, p *sînt numere naturale. Cînd obținem egalitatea?*

SC 22. *Să se arate că*

$$I=\lim_{n\to\infty}(n+1)^{-n}\sum_{k=1}^{n}k^n = 1/(1-\mathrm{e}).$$

I. J. Schoenberg, Nieuw Arch. V. Wisk. vol. 30, nr. 3/1982

Soluție. Se caută să se pună în evidență expresii, care la limită dau puteri negative ale lui e în termenii sumei, pentru a obține sume convergente. Or,

$$\left(\frac{k}{n}\right)^n=\left(1-\frac{n-k}{n}\right)^n=\left(1-\frac{i}{n}\right)^n \text{ cu } i=n-k.$$

Deci vom putea scrie

$$I=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\cdot\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{n-k}{n}\right)^n=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\cdot\sum_{i=0}^{n}\left(1-\frac{i}{n}\right)^n\cdot$$

Or, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{i}{n}\right)^n=\mathrm{e}^{-i}$, iar $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n=\mathrm{e}^{-1}$,

deci

$$I=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\cdot\sum_{i=1}^{n}\mathrm{e}^{-i}=\mathrm{e}^{-1}\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-1}}=\mathrm{e}^{-1}\cdot\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}=\frac{1}{\mathrm{e}-1},$$

seria geometrică cu rația $\mathrm{e}^{-1}<1$ fiind convergentă.

Comentarii. Metoda folosită este susceptibilă de generalizări. De exemplu, se poate aplica pentru a arăta că

$$\lim_{n\to\infty}(n+1)^{-s_n}\cdot\sum_{k=1}^{n}k^{s_n}=1/(\mathrm{e}^s-1).$$

De asemenea, folosind aceeași transformare: $\left(\frac{k}{n+1}\right)^n=\left(1-\frac{l}{n+1}\right)^n$ cu $k=n+1-l$, se poate obține și o formă asimptotică a lui I.

SC 23. *În construcția profilelor în formă de ou a unor canale se consideră două cercuri tangente C_1 și C_2 de raze r_1, respectiv r_2, cu $r_1 = 2r_2$. Se cere să se construiască un profil simetric în formă de ou, astfel încît capetele A și B ale unui diametru al lui C_1 să fie punctele inițiale ale celor două arce de legătură, care se sprijină pe cele două cercuri.*

Alpha, Anul 17, nr. 3/1983

Soluție. Din cauza simetriei profilului cerut, cum linia O_1O_2 a centrelor este axul de simetrie, diametrul $|AB|$ va fi perpendicular pe O_1O_2. Deci cele două arce de cerc de legătură, care trebuie să fie tangente la cele două cercuri, vor fi tangente la C_1 în A și B. Astfel centrul O_3 al cercului ce conține arcul tangent în A, se va găsi pe AB. Cum acest arc trebuie să fie tangent și la C_2 într-un punct C, segmentul $|CO_2|$ va trebui să fie rază, deci dreaptă CO_2 va trece prin O_3, care este astfel determinat. Triunghiul $O_1O_2O_3$ fiind dreptunghic, dacă notăm cu r_3 raza cercului cu centrul O_3, vom avea conform cu teorema lui Pitagora

$$(r_3 - r_2)^2 = (r_1 + r_2)^2 + (r_3 - r_1)^2$$

și cum $r_1 = 2r_2$, vom avea ca unică soluție $r_3 = 3r_1$. Astfel vom determina în mod unic punctul C de contact cu cercul C_2 unind O_2 cu O_3, acesta fiind determinat de faptul că $\| O_1O_3 \| = 2r$. La fel prin simetrie se determină O și D.

SC 24. *Fiind dat un dreptunghi $ABCD$, avînd baza $|AB|$ mai mare decît înălțimea $|BC|$, să se construiască un arc simetric în raport cu linia mediană $|EF|$ (cea perpendiculară pe baza $|AB|$) și format din trei arce racordate, primul fiind tangent în A la AD, cel de al doilea în E la CD, iar cel de al treilea în B la BC, constituind arc în formă de toartă de coș simetric.*

Alpha, Anul 17,nr. 3/1983

Soluție. Se va aplica triunghiurilor dreptunghice AED și BCE metoda de construcție a arcelor în toartă de coș folosită în problema SC 25. Cum $|AE|$ joacă rolul bazei $|AB|$ din triunghiul ABC se vor duce bisectoarele AJ și EJ concurente în centrul J al cercului înscris triunghiului dreptunghic AED. Linia centrelor O_1 și O_2 va fi perpendiculară în J pe AE; tangenta în A fiind dreapta AD, perpendiculara pe aceasta va fi AB și deci O_1 va fi la intersecția cu perpendiculara în J pe AE. Aceasta va întîlni pe EF în O_2, centrul cercului care conține cel de-al doilea arc. Prin simetrie se obține punctul K la intersecția bisectoarelor în B și E ale triunghiului dreptunghic BCE. Unind O_2 cu K obținem centrul O_3 al cercului ce conține cel de-al treilea arc tangent în B la BC.

Comentarii. Acest tip de arc în toartă de coș simetric este un element important de arhitectură în construcții, fiind folosit frecvent pînă la primul război mondial pentru porți cu deschideri, mari pentru a se evita arce cu săgeți EF înalte. Din punct de vedere geometric este un caz particular al arcului construit pe baza unui triunghi oarecare.

Formulările și soluțiile problemelor SC23, SC24 și SC25 ne sînt proprii.

SC 25. *Fiind dat un triunghi oarecare ABC, să se construiască un arc $\widehat{AJB}$ compus din reuniunea a două arce de cerc tangente respectiv în A la AC, în B la BC și racordate între ele în J, punctul J fiind interior triunghiului ABC, iar tangenta comună în J, paralelă cu AB.*

Alpha, Anul 17, nr. 3/1983

Soluție. Vom presupune inițial triunghiul ABC ascuțitunghic, notînd cu α, β, γ respectiv măsurile unghiurilor cu vîrfurile în A, B, C și vom considera problema rezolvată. Dacă J este punctul de racordare al celor două arce de cerc, iar tangenta comună paralelă cu AB, linia centrelor cercurilor, care conțin cele două arce, va fi perpendiculara dusă din J pe AB. În aceste condiții, vom găsi centrele O_1 și O_2 ale cercurilor ce conțin cele două arce de cerc racordateîn J și tangente la dreptele AC și BC, ducînd perpendicularele respective pe aceste drepte în A și B pînă la intersecția cu perpendiculara din J pe AB. Arcele de cerc cu razele $\|O_1A\| = r_1$ și $\|O_2B\| = r_2$ se vor racorda în J. Prin urmare, problema revine la găsirea punctului J. Fie D și E punctele de intersecție ale paralelei la AB dusăprin J cu AC, respectiv BC. Din asemănarea triunghiurilor ABC și DEC deducem $\dfrac{\|CD\|}{\|DA\|} = \dfrac{\|CE\|}{\|EB\|}$; însă $\|DA\| = \|DJ\|$ și $\|EB\| = \|EJ\|$ ca tangente duse din punctele D, respectiv E la cele două cercuri de centre O_1 și O_2. De aceea, înlocuind în rapoartele egale găsite, vom avea $\dfrac{\|CD\|}{\|DJ\|} = \dfrac{\|CE\|}{\|EJ\|}$, care arată că CJ este bisectoarea unghiului $\hat{C}$ în triunghiul CDE.

Pe de altă parte, unghiurile $\widehat{DAB}$ și $\widehat{AO_1J}$, au laturile perpendiculare și deci

$$\mu(\widehat{AO_1J}) = \mu(\widehat{DAB}) = \alpha$$

și cum triunghiul AO_1J este isoscel, $\mu(\widehat{JAO_1}) = \mu(\widehat{AJO_1}) = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\alpha}{2}$.

Dacă notăm cu L piciorul perpendicularei din J pe AB, triunghiul ALO_1 fiind dreptunghic, $\mu(\widehat{LAO_1}) = \dfrac{\pi}{2} - \alpha$, astfel încît $\mu(\widehat{JAL}) = \mu(\widehat{JAO_1}) - \mu(\widehat{LAO_1}) = \dfrac{\alpha}{2}$, deci AJ este bisectoarea unghiului $\hat{A}$, iar J va fi centrul cercului înscris al triunghiului ABC.

Prin aceasta, construcția celor două arce este unic determinată, procedeul fiind următorul: se duc bisectoarele unghiurilor $\hat{A}$ și $\hat{B}$, care se întîlnesc în J. În J se duce paralela DE la AB, care va fi tangenta comună celor două arce racordate. În A și B se duc perpendiculare pe AC, respectiv BC. Acestea vor întîlni perpendiculara dusă din J pe AB în centrele O_1, respectiv O_2 ale celor două cercuri căutate.

Comentarii. Dacă triunghiul ABC este isoscel, O_1 și O_2 vor coincide și vom avea un singur arc $\overset{\frown}{AJB}$ inclus într-un cerc de centru $O_1 = O_2$. Dacă triunghiul este obtuzunghic în C, construcția rămîne similară, dar dacă unghiul $\hat{B}$ este obtuz, atunci centrul O_2 se va găsi în interiorul triunghiului ABC și arcul $\overset{\frown}{AJB}$ va avea forma unui cîrlig.
Această construcție se folosește în arhitectură, arcul total astfel obținut servind ca arc de acoperire a unei deschideri de poartă sau a unei galerii, cînd prin translație generează un semicilindru. Se numește și *arc în toartă de coș.*

SC 26. *Fe P un punct situat într-un plan S și Q un punct în afara planului. Să se găsească toate punctele $R \in S$, astfel încît raportul $\|QP\| + \|PR\|/\|QR\|$ să fie maxim și să se evalueze valoarea acestuia în funcție de distanțele de la Q la S și de la Q la P.*

[Parabola, vol. 16, nr. 3/1980

Soluție. Fie M piciorul perpendicularei din Q la S și $h = \|QM\|$, $d = \|PQ\|$. Să presupunem că R_1 este unul din punctele căutate. Trasînd cercul cu centrul în M de rază $\|MR_1\|$, acesta va intersecta dreapta PM în două puncte R' și R, ultimul pe prelungirea lui $|PM|$. Pot apărea două cazuri: P exterior sau P interior cercului, cînd $\|PR'\| \leqslant \|PR\|$ egalitatea fiind realizată cînd P coincide cu M. Presupunem $R_1 \neq R$. Cum $\|MR_1\| = \|MR\| = \|MR'\|$, să evaluăm $\|PR_1\|$, $\|PR\|$ și $\|PR'\|$, observînd că vom avea $\|QR_1\| = \|QR\| = \|QR'\|$ din triunghiurile dreptunghice congruente QMR_1, QMR și QMR'. Dacă P este exterior, vom avea $\|PR_1\| < \|PR\|$, ceea ce se obține evaluînd puterea lui P în raport cu cercul: $\|PR'\| \cdot \|PR\| = \|PR_1'\| \cdot \|PR_1\|$, unde R_1' este cel de al doilea punct de intersecție a lui PR_1 cu cercul. Cum $\|PR'\| < \|PR_1'\|$, deducem $\|PR_1\| < \|PR\|$ (egalitatea fiind realizată numai cînd $R_1 = R$,contrar ipotezei). Vom avea deci

$$\|QP\| + \|PR\|/\|QR\| > \|QP\| + \|PR_1\|/\|QR_1\|.$$

Evident, R' nu poate fi luat în considerație, fiindcă $\|PR'\| < \|PR\|$. În cazul în care P este interior sau chiar pe cerc, proprietatea $\|PR_1\| < \|PR\|$ se menține, cum se poate verifica. Dacă P coincide cu M, atunci $\|MR\| = \|MR_1\|$ și $\|QM\| + \|MR\|/\|QR\| = \|QM\| + \|MR_1\|/\|QR_1\|$, toate punctele cercului dînd aceeași valoare raportului.

În consecință, dacă $P \neq M$ maximul raportului se va obține pentru un singur punct R situat pe prelungirea lui $|PM|$. Dacă $P = M$, el se va obține pentru toate punctele unui cerc, care va fi determinat ca un caz particular. Să prelungim $|PM|$ cu $|PT| \equiv |PQ|$ și vom avea rapoartele:

$$\|QP\| + \|PR\|/\|QR\| = \|TP\| + \|PR\|/\|QR\| = \|TR\|/\|QR\|.$$

Notînd cu α, β, γ unghiurile cu vîrfurile în T, Q, R ale triunghiului TQR, vom avea $\|TR\|/\|QR\| = \sin\beta/\sin\alpha$. Punctele T, Q și P fiind fixe, unghiul T este de asemenea fix, deci raportul va fi maxim pentru $\sin\beta = 1$, deci $\beta = \pi/2$.

În consecință, R este punctul unde semicercul cu centrul în P și de rază $\| PQ \|$ va tăia a doua oară dreapta PM, celălalt punct fiind T. Astfel, dacă P este diferit de M, soluția este unică. Dacă P coincide cu M, cercul de rază $\| MQ \|$, taie dreapta MQ în T și R, triunghiul TQR este dreptunghic și isoscel, iar $\| MR \| = \| MT \| = \| MQ \|$, raportul $\| TR \| / \| QR \| = 2$, iar R descrie în întregime cercul cu centrul în M și de rază $\| MQ \| = h$. În cazul $P \neq M$, vom evalua $\dfrac{1}{\sin \alpha} = \dfrac{\| TQ \|}{\| MQ \|} = \dfrac{\sqrt{\| TM \|^2 + \| MQ \|^2}}{\| MQ \|} = \dfrac{\sqrt{2d^2 + 2d\sqrt{d^2 - h^2}}}{h} =$

$= \sqrt{2} \cdot \dfrac{d}{h} \cdot \sqrt{1 + \sqrt{1 - \left(\dfrac{h}{d}\right)^2}}$ care este maximul raportului considerat.

Comentarii. Acest maxim depinde numai de raportul $h/d = \sin 2\alpha$ (din triunghiul dreptunghi PQM). Cînd P coincide cu M, $h/d = 1$ și maximul este $\sqrt{2}$. Acest maxim este un minimax, cum se vede imediat din expresia sa, fiindcă $d/h \geqslant 1$ și avem

$$\sqrt{2}\,\frac{d}{h} \cdot \sqrt{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{h}{d^2}\right)^2}} \geqslant \sqrt{2}\,\frac{d}{h} \geqslant \sqrt{2}.$$

Enunțul problemei nu cerea evaluarea maximului, iar soluția dată în revistă nu lua în considerație diversele poziții ale lui P față de cercul cu centrul în M și de rază $\| MR \|$. Astfel, cazul $P = M$ nu a fost prevăzut, nici necesitatea de a exprima cazul în care P este interior cercului. Facem aceste observații pentru a sublinia încă o dată necesitatea de a se analiza amănunțit condițiile și cerințele enunțului în orice problemă. Pericolul pe care îl prezintă metodele sintetice în geometrie este provocat, fie de o încredere necontrolată în aparențe intuitive, fie de trecerea superficială peste posibilități de situații deosebite în configurațiile problemei.

SC 27. *Un paravan format din două panouri dreptunghiulare este așezat lipit de colțul unei camere format din doi pereți în unghi drept, cu scopul de a închide o porțiune cît mai mare din podea. Să se determine poziția celor două panouri, aria și laturile poligonului maximal închis, cunoscîndu-se lățimea l a celor două panouri.*

Arhimede, vol. 34, nr. 3/1982

Soluție. Problema se tratează în planul orizontal prin urmele pereților și panourilor. Fie $|PA|$ și $|PB|$ urmele panourilor paravanului, A, B urmele laturilor ce se reazemă pe pereți și O urma colțului camerei. Notăm cu α măsura unghiului APB. Patrulaterul $PAOB$ trebuie să fie convex, altfel aria inclusă este mai mică decît cea a patrulaterului convex $P'AOB$ cu P' = simetricul lui P în raport cu AB. Dacă α se menține constant, aria triunghiului APB este fixă și aria triunghiului AOB, unde $\| AB \|$ = constant, este maximă cînd triunghiul AOB este isoscel, deci $\| OA \| = \| OB \|$, iar P este

pe bisectoarea unghiului $\widehat{AOB}$. Rămîne să găsim condiția de maxim a ariei $\sigma[APBO] = 2 \cdot \sigma[AOP]$. Aceasta este maximă cînd triunghiul AOP este isoscel: $\|OA\| = \|OP\|$, de unde

$$\alpha = 2\frac{\alpha}{2} = 180° - 45° = 135°.$$

Comentarii. Se pot încerca și alte soluții: de exemplu, evaluîndu-se aria totală $\sigma[AOBP]$ și căutîndu-se direct maximul sau o soluție analitică în același mod.

Soluția dată aici poate fi generalizată luîndu-se unghiul pereților oarecare. Dar dacă cele 2 panouri au lățimi diferite l_1 și l_2 cu $l_1 \neq l_2$?

SC 28. 1) *Să se demonstreze că prin trisecțiunea unghiurilor A, B, C ale unui triunghi oarecare ABC, dacă se iau intersecțiile D, E, F ale trisectoarelor (BD, CD), (CE, AE), (AF, BF), triunghiul DEF astfel format este echilateral (Teorema lui Morley).*

2) *Să se evalueze în acest context măsurile unghiurilor astfel formate în funcție de măsurile α, β, γ ale unghiurilor triunghiului ABC**.

Neville Reed, Math. Gazette vol. 65, nr. 431/1981

Soluție. Considerăm problema rezolvată și vom încerca să refacem figura pornind de la triunghiul echilateral DEF. Vom nota măsurile unghiurilor ce se formează în triunghiurile AEF, BFD, CDE astfel:

$$m(\widehat{AEF}) = x,\ m(\widehat{CED}) = y,\ m(\widehat{AFE}) = z,\ m(\widehat{BFD}) = t,\ m(\widehat{BDF}) = u,$$

$$m(\widehat{CDE}) = v.$$

În punctul E se formează unghiuri cu suma totală a măsurilor de 360°: $m(\widehat{AEC}) = 180° - \frac{\alpha + \gamma}{3}$, deci $180° - \frac{\alpha + \gamma}{3} + x + 60° + y = 360°$, de unde $x + y = 120° + \frac{\alpha + \gamma}{3}$. Pe de altă parte în triunghiul AGF, vom avea $x + z = 180° - \frac{\alpha}{3}$, astfel încît pentru evaluarea măsurilor x, y, z, t, u, v dispunem de următorul sistem liniar, obținut prin analogie în punctele F și D:

$$\begin{cases} x + y = 120° + \frac{\gamma + \alpha}{3};\ z + t = 120° + \frac{\alpha + \beta}{3};\ u + v = 120° + \frac{\beta + \gamma}{3}; \\ x + z = 180° - \alpha/3;\ t + u = 180° - \beta/3;\ y + v = 180° - \gamma/3. \end{cases} \quad (1)$$

* Versiune și soluție date de Acad. N. Teodorescu

Este ușor de văzut însă că acest sistem nu poate fi determinat, fiindcă transformarea

$$\begin{cases} x = x' + \lambda, \ y = y' - \lambda, \ z = z' - \lambda, \ t = t' + \lambda \\ u = u' - \lambda, \ v = v' + \lambda \end{cases} \tag{1'}$$

cu $\lambda \in \mathbf{R}$ arbitrar, îl lasă invariant. Aceasta revine la deplasarea vîrfurilor A, B, C pe arce de cercuri circumscrise triunghiurilor AEF, BFD, CDE, deplasări care lasă unghiurile $\alpha/3$, $\beta/3$, $\gamma/3$ neschimbate și modifică unghiurile de la bază, așa cum indică transformarea aplicată. Pentru rezolvare, observăm că scăzînd membru cu membru, avem

$(x + y) - (t + u) = -60° + \frac{\alpha + \beta + \gamma}{3} = 0$, de unde $x - u = t - y$ și în mod analog $u - x = z - v$, $z - y = v - t$, deci

$$x - u = t - y = v - z = 2\lambda \tag{2}$$

cu λ parametru. Apoi, de asemenea prin scădere membru cu membru

$$z - y = 60° - \frac{\gamma + 2\alpha}{3} \ ; \ z + y + 2\lambda = 120° + \frac{\alpha + \beta}{3},$$

de unde $z = 60° + \frac{\beta}{3} - \lambda$, $y = 60° + \frac{\alpha}{3} - \lambda$

și din (2)

$$t = 60° + \frac{\alpha}{3} + \lambda; \ v = 60° + \frac{\beta}{3} - \lambda \tag{3}$$

și revenind la (1)

$$x = 60° + \frac{\gamma}{3} + \lambda; \ u = 60° + \frac{\gamma}{3} - \lambda.$$

Am obținut în acest fel soluția generală a sistemului (1) care confirmă transformarea (1'), care îl lasă invariant și în același timp ne dă semnificația geometrică a soluției generale. Aceasta este următoarea: *fiind dat un triunghi echilateral DEF, o condiție necesară pentru existența unui triunghi ABC ale cărui trisectoare din A, B, C unite cîte două să determine acest triunghi echilateral, este ca măsurile unghiurilor triunghiurilor AEF, BFD și CDE să verifice sistemul liniar (1), care admite o familie de soluții de forma (3), cu un parametru unghiular λ. Această condiție este și suficientă, dacă și numai*

dacă $\lambda = 0$, după cum vom demonstra în cele ce urmează: Construind unghiurile de măsuri:

$$x = m(\widehat{AEF}) = 60° + \frac{\gamma}{3} + \lambda;\ z = m(\widehat{AFE}) = 60° + \frac{\beta}{3} - \lambda,$$

$$y = m(\widehat{CED}) = 60° + \frac{\alpha}{3} - \lambda;\ v = m(\widehat{CDE}) = 60° + \frac{\beta}{3} + \lambda \qquad (3')$$

$$t = m(\widehat{BFD}) = 60° + \frac{\alpha}{3} + \lambda;\ u = m(\widehat{BDF}) = 60° + \frac{\gamma}{3} - \lambda$$

și având vîrfurile în D, E, F obținem prin intersecțiile laturilor lor punctele A, B, C.

Vom avea de asemenea,

$$m(\widehat{AFB}) = 180° - \frac{\alpha + \beta}{3},$$

$$m(\widehat{BDC}) = 180° - \frac{\beta + \gamma}{3},$$

$$m(\widehat{CEA}) = 180° - \frac{\gamma + \alpha}{3}.$$

În punctul F ducem o semidreaptă $|FG$ care formează în F unghiurile de măsuri $m(\widehat{AFG}) = 90° - \frac{\alpha}{3}$ și $m(\widehat{BFG}) = 90° - \frac{\beta}{3}$, iar din A, respectiv B ducem perpendicularele AG și BH pe FG. Vom dovedi că G și H coincid. În triunghiul dreptunghic AFG, avem $m(\widehat{FAG}) = \frac{\alpha}{3}$, iar în triunghiul dreptunghic BFH avem $m(\widehat{FBH}) = \frac{\beta}{3}$.

Aplicînd teorema sinusurilor în triunghiurile AEF și BFD, obținem

$$\frac{\|AF\|}{\sin x} = \frac{\|EF\|}{\sin\frac{\alpha}{3}};\quad \frac{\|DF\|}{\sin\frac{\beta}{3}} = \frac{\|BF\|}{\sin u},$$

de unde

$$\|EF\| \sin x = \|AF\| \sin\frac{\alpha}{3};\ \|BF\| \sin\frac{\beta}{3} = \|DF\| \sin u.$$

Însă $\|AF\| \sin\frac{\alpha}{3} = \|FG\|$ și $\|BF\| \sin\frac{\beta}{3} = \|FH\|$.

Pentru coincidența punctelor G și H, deci pentru ca $\|AG\| + \|HB\|$ să fie lungimea laturii $|AB|$ a triunghiului ABC, va fi necesar și suficient ca

$$\|EF\| \sin x = \|DF\| \sin u, \text{ deci } \sin x = \sin u \text{ fiindcă } \|EF\| = \|DF\|.$$

În cadrul măsurilor unghiurilor unui triunghi, această ecuație nu poate avea decît soluțiile $x = u$ sau $x = 180° - u$.

Prima implică $\lambda = 0$, cea de a doua $60° + \frac{\gamma}{3} + \lambda = 180° - \left(60° + \frac{\gamma}{3} - \lambda\right)$ deci $\gamma = 90°$, de unde $x = 90° + \lambda$, $u = 90° - \lambda$.

Reluînd raționamentul pentru latura $|BC|$, vom găsi din nou soluțiile $y = t$ sau $y = 180° - t$, prima implicînd $\lambda = 0$, cea de a doua $\alpha = 90°$, $y = 90° - \lambda$, $t = 90° + \lambda$.

Însă $\gamma = 90°$ și $\alpha = 90°$ conduc la un triunghi degenerat cu $\beta = 0°$; în consecință se impune soluția $y = t$ cu $\lambda = 0$, ceea ce în cazul $\gamma = 90°$ va conduce la $x = 90°$, $u = 90°$ celelalte măsuri de unghiuri fiind

$$y = 60° + \frac{\alpha}{3}, \quad t = 60° + \frac{\alpha}{3}; \quad z = 60° + \frac{\beta}{3}, \quad v = 60° + \frac{\beta}{3} \quad \alpha + \beta = 90°, \text{ deci}$$

$$z = 90° - \frac{}{3}, \quad v = 90° - \frac{\alpha}{3}, \quad \gamma = 90°. \tag{4}$$

Astfel, obținem pentru $x = 180° - u$, un triunghi dreptunghic, iar $x = u$ conduce la un triunghi ABC unic, măsurile unghiurilor căutate fiind deduse din (3') pentru $\lambda = 0$:

$$u = m(\widehat{AEF}) = 60° + \frac{\gamma}{3}, \quad z = m(\widehat{AFE}) = 60° + \frac{\beta}{3}, \quad y = m(\widehat{CED}) = 60° + \frac{\alpha}{3}$$

(4')

$$v = m(\widehat{CDE}) = 60° + \frac{\beta}{3}, \quad t = m(\widehat{BFD}) = 60 + \frac{\alpha}{3}, \quad u = m(\widehat{BDF}) = 60° + \frac{\gamma}{3}.$$

Prin urmare: *fiind dat un triunghi echilateral DEF, există un triunghi ABC și numai unul cu unghiurile de măsuri α, β, γ date, astfel încît trisectoarele acestuia să fie concurente două cîte două în vîrfurile D, E, F al triunghiului echilateral dat.*

Această teoremă este o reciprocă a teoremei lui Morley, dar din ea putem deduce imediat demonstrația teoremei lui Morley, construind un triunghi $A'B'C'$ congruent cu cel dat și avînd proprietatea trisectoarelor.

Într-adevăr, este suficient să plecăm de la un triunghi echilateral DEF și să construim configurația ABC, AEF, BFD, CDE care satisface reciproca teoremei lui Morley. Dacă pe AC se ia segmentul $|AI| \equiv |A'C'|$, apoi din I se duce o paralelă la AE pînă întîlnește pe CE în C' și o paralelă $C'A'$ la CA pînă întîlnește pe AG în A', putem construi întreaga configurație prin omo-

tetie, centrul de omotetie fiind E. Paralela $A'B'$ la AB întîlneşte pe BF în B', $|B'C'|$ este paralelă cu BC şi constituie a treia latură a triunghiului $A'B'C'$. O paralelă AF' la AF întîlneşte pe EF în F' şi $F'D'$ paralelă la FD, realizează al treilea vîrf al triunghiului echilateral $E'F'D'$. Dreptele $A'E$, $A'F'$, $B'F'$, $C'F$, $C'D'$ sînt trisectoarele triunghiului $A'B'C'$, iar triunghiul $EF'D'$ este echilateral, deci configuraţia $A'B'C'$ demonstrează teorema lui Morley.

SC 29. *Se defineşte în planul cartezian raportat la un sistem ortogonal de axe distanţa dintre punctele* $A_1(a_1, b_1)$ *şi* $A_2(a_2, b_2)$ *prin:*

$$d(A_1, A_2) = |a_2 - a_1| + |b_2 - b_1|. \tag{1}$$

a) *Să se arate că efectiv (1) se poate lua ca distanţă;*

şi b) *Dacă* $A_1 = (-2, -2)$, $A_2 = (2, 2)$ *să se determine mulţimile de puncte definite prin ecuaţiile:*

$$d(A_1, X) + d(A_2, X) = 8 \tag{2}$$

$$d(A_1, X) + d(A_2, X) = 10 \tag{2'}$$

să se interpreteze geometric în analogie cu distanţa euclidiană.

Ontario Math. Bull. vol. 15, nr. 1, 1979

Soluţie. a) Distanţa $d(A_1, A_2)$ îndeplineşte axiomele unei metrici: este pozitivă, $d(A_1, A_2) = 0 \Leftrightarrow A_1 = A_2$, este simetrică adică $d(A_1, A_2) = d(A_2, A_1)$ şi satisface inegalitatea triunghiului $d(A_1, A_2) + d(A_2, A_3) \geqslant d(A_1, A_3)$, fiindcă

$$|a_1 - a_3| = |a_1 - a_2 + a_2 - a_3| \leqslant |a_1 - a_2| + |a_2 - a_3|.$$

b) Să notăm cu x, y coordonatele carteziene ortogonale ale lui $X = (x, y)$ şi să evaluăm

$$d(A_1, X) + d(A_2, X) = |-2 - x| + |2 - x| + |-2 - y| + |2 - y| =$$
$$= |x + 2| + |x - 2| + |y + 2| + |y - 2|.$$

Ocupîndu-ne întîi de locul geometric definit prin ecuaţia (2), vom distinge trei cazuri, după valorile lui $|x|$ şi $|y|$.

Cazul I. $|x| \geqslant 2$, $|y| \geqslant 2$ deci $|x + 2| = x + 2$ dacă $x \geqslant -2$ şi $|x + 2| = -x - 2 = |x| - 2$, dacă $x \leqslant -2$ (căci $-x = |x| \geqslant 2$); $|x - 2| = x - 2 = |x| - 2$ dacă $x \geqslant 2$; $|x - 2| = 2 - x = 2 + |x|$ dacă $x \leqslant -2$ (căci $-x = |x| \geqslant 2$) şi analog pentru y. Vom avea deci

$|x + 2| + |x - 2| + |y + 2| + |y - 2| = |x| - 2 + |x| + 2 +$
$+ |y| - 2 + |y| + 2 = 2|x| + 2|y|$, dacă $x \leqslant -2$;

$|x + 2| + |x - 2| + |y + 2| + |y - 2| = |x| + 2 + |x| - 2 + |y| +$
$+ 2 + |y| - 2 = 2|x| + 2|y|$, dacă $x \geqslant 2$.

În consecință, locul geometric va fi pentru $|x| \geqslant 2$, $|y| \geqslant 2$ de forma

$$|x| + |y| = 4.$$

Dar acesta nu poate fi realizat decît pentru $|x| = |y| = 2$, de unde obținem următoarele patru puncte: $A_2(2, 2)$, $B(-2, 2)$, $A_1(-2, -2)$, $D(2, -2)$ care sînt vîrfurile unui pătrat cu centrul în origine, cu laturile paralele cu axele și de lungime 4.

Cazul II: $|x| < 2, |y| < 2$ deci $-2 < x < 2, -2 < y < 2$, $|x + 2| = 2 + x$, $|x - 2| = 2 - x$ și analog pentru y.

În consecință

$$|x + 2| + |x - 2| + |y + 2| + |y - 2| =$$
$$= (2 + x) + (2 - x) + (2 + y) + (2 - y) = 8.$$

Orice punct (x, y) interior pătratului A_2BA_1D considerat este punct al locului geometric.

Cazul III. $|x| \geqslant 2$, $|y| \leqslant 2$ sau $|x| \leqslant 2$, $|y| \geqslant 2$. Folosind relațiile din cazurile precedente vom avea

$|x + 2| + |x - 2| + |y + 2| + |y - 2| = 2|x| + 2 + y + 2 - y =$
$= 2|x| + 4 = 8$, dacă $x \geqslant 2$;
$|x + 2| + |x - 2| + |y + 2| + |y - 2| = |x| - 2 + |x| + 2 + 2 +$
$+ y + 2 - y = 8$ dacă $x \leqslant -2$,

de unde în ambele cazuri $|x| = 2$, care înseamnă $x = 2$ sau $x = -2$. Un rezultat analog se obține pentru $|x| \leqslant 2$ și $|y| \geqslant 2$, adică $|y| = 2$, care înseamnă $y = 2$ sau $y = -2$.

Locul se compune din laturile pătratului A_2BA_1D limitate exact la segmentele $[A_2B]$, $[BA_1]$, $[A_1D]$, $[DA_2]$ care formează aceste laturi. Astfel, locul căutat se compune din *pătratul și interiorul* său ca o condiție necesară.

Condiția este și suficientă, cum se poate verifica fără dificultăți, orice punct al suprafeței pătrate $[A_2BA_1D]$ satisfăcînd ecuația (2). Trecînd la ecuația (2') vom putea folosi toate relațiile introduse în cele trei cazuri, înlocuind în membrul II 8 prin 10.

Cazul I. Repetînd raționamentul, sîntem conduși la ecuația

$$|x| + |y| = 5 \text{ cu } |x| \geqslant 2, \ |y| \geqslant 2 \tag{3}$$

care se traduce în

$$x + y = 5, \ x - y = 5, \ -x + y = 5; \ -x - y = 5$$

reprezentînd patru drepte. Ținînd seama de limitările impuse de (3) va trebui să reținem segmentele cuprinse între punctele:

$E(2, 3), F(-2, 3), G(-3, 2), H(-3, -2), I(-2, -3), J(2, -3), K(3, -2),$
$L(3, 2)$, adică laturile $[LE]$ $[FG]$, $[HI]$ și $[JK]$ ale unui octogon $EFGHIJKL$.

Cazul II. Conduce la o contradicție fiindcă pe de o parte $d(A_1, X) + d(A_2, X) = 8$, iar pe de altă parte ecuația (2') cere ca membrul II să fie 10, deci nu avem puncte ale locului căutat.

Cazul III. Relațiile respective vor fi:

$$2|x| + 4 = 10, \text{ de unde } |x| = 3 \text{ cu } |y| \leqslant 2,$$

$$2|y| + 4 = 10, \text{ de unde } |y| = 3, \text{ cu } |x| \leqslant 2, \qquad (3')$$

Astfel din (3') vom reține patru drepte:

$$x = 5,\ x = -5,\ y = 5,\ y = -5$$

mărginite la segmentele $[EF]$, $[GH]$, $[IJ]$, $[KL]$ care sînt celelalte patru laturi ale octogonului $EFGHIJKL$.

Condiția este și suficientă, după cum se poate verifica direct. Astfel locul geometric corespunzător ecuației (2') este acest octogon, mai precis conturul său poligonal. (Interpretarea geometrică în comentariile următoare).

Comentarii. În topologia acestei distanțe, numită familiar în revista Ontario Math. Bull. *„taxicab"*, ceea ce ar însemna *„trăsură taxi"*, geometria analitică apare cu unele curiozități pe care problema tratată le pune în evidență. Într-adevăr, ecuațiile (2) și (2') sînt analoage celor ale elipsei definită prin focare și suma distanțelor la acestea constantă. Deci cele două locuri sînt *„taxicab ellipses"*, deci *„elipse trăsură taxi" omofocale*. Vedem însă ce deosebiri importante din punct de vedere geometric apar în compararea acestor locuri geometrice. Prima elipsă este un *pătrat plin* (suprafață pătrată), cea de a doua un *octogon* (limitat la conturul său). Aceste observații sînt făcute cu scopul de a stimula curiozitatea creativă a cititorilor pentru o generalizare, care nu este cu siguranță banală, discuția situațiilor implicînd atenție și rigoare.

SC 30. *Să se arate că*

$$\frac{8\sqrt{3}}{2(r+R)} \leqslant \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leqslant \frac{\sqrt{3}}{3r};\quad 6r \leqslant \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \leqslant 3R;$$

$$\sqrt{3}(a + b + c) \leqslant 2(4R + r),$$

notațiile fiind cele obișnuite într-un triunghi.

Elemente der Mathematik, Basel, 1, G. M. 3/1965

Soluție. 1) Într-un triunghi există relațiile

$$a + b + c \leqslant 3R\sqrt{3} \text{ și } Rr = \frac{abc}{2(a + b + c)}.$$

Între numere pozitive avem inegalitatea

$a + b + c \geqslant 3\sqrt[3]{abc}$. Utilizînd aceste relații obținem

$$(r + R)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = \left(r + \frac{R}{2} + \frac{R}{2}\right)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geqslant$$

$$\geqslant 9\sqrt[3]{\frac{R^2 r}{4abc}} = \frac{9}{2}\sqrt[3]{\frac{R}{a+b+c}} \geqslant \frac{9}{2}\sqrt[3]{\frac{R}{3R\sqrt{3}}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Pe baza inegalității $\sin A + \sin B + \sin C \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}$ ce există într-un triunghi și a inegalității algebrice $(a + b + c)^2 \geqslant 3(ab + bc + ca)$ avem

$$h_a + h_b + h_c = 2R \sum \sin A \sin B \leqslant \frac{2}{3} R(\sin A + \sin B + \sin C)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} R(\sin A + \sin B + \sin C) = \sqrt{3}R(\sin A + \sin B + \sin C) =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}(a + b + c).$$

Împărțind cu $2S$ în ambele părți ale inegalității obținute avem

$$\frac{h_a + h_b + h_c}{2S} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leqslant \frac{\sqrt{3}(a + b + c)}{4S} = \frac{\sqrt{3}}{2r}.$$

2) O cunoscută inegalitate algebrică și al doilea rezultat de la punctul 1) ne dau

$$9 \leqslant (a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \leqslant (a + b + c) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2r}$$

adică $a + b + c \geqslant 6\sqrt{3}r$. Se știe că $3(a^2 + b^2 + c^2) \geqslant (a + b + c)^2 \geqslant 36 \cdot 3 \cdot r^2$, adică $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 36r^2$ sau $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \geqslant 6r$.

Pentru $A + B + C = 180°$ avem $\Sigma \sin^2 A = \Sigma(1 - \cos^2 A) = 3 - \Sigma \cos^2 A = 3 - 1 + 2 \cos A \cos B \cos C = 2 + 2 \cos A \cos B \cos C$.

Dar $\cos A \cos B \cos C \leqslant \frac{1}{8}$, deci $\Sigma \sin^2 A \leqslant \frac{9}{4}$, adică $a^2 + b^2 + c^2 \leqslant 9R^2$. Rezultă $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \leqslant 3R$.

3) Notăm $x = \frac{-a + b + c}{2}$, $y = \frac{a - b + c}{2}$, $z = \frac{a + b - c}{2}$ și cu S aria triunghiului ABC. Avem relațiile

$$xr_A = yr_B = zr_C = \sqrt{xyz(x + y + z)} = S.$$

Dacă în inegalitatea $(u + v + w)^2 \geq 3(uv + vw + wu)$ punem $u = xy$, $v = xz$, $w = yz$, obținem prin extragerea rădăcinii pătrate

$$xy + yz + xz \geq \sqrt{3xyz(x + y + z)} = S\sqrt{3}.$$

Dar

$$xyz(r_A + r_B + r_C) = xr_A \cdot yz + yr_B \cdot xz + zr_C \cdot xy = S(xy + yz + xz) \geq$$

$$\geq S^2\sqrt{3} = xyz(x + y + z)\sqrt{3},$$

adică

$$r_A + r_B + r_C \geq (x + y + z)\sqrt{3}.$$

Dar $x + y + z = \dfrac{a + b + c}{2}$ și $r_A + r_B + r_C = 4R + r$.

Rezultă

$$2(4R + r) \geq (a + b + c)\sqrt{3}.$$

SC 31. 1) *Să se determine condiția necesară și suficientă pentru ca un dreptunghi de arie dată σ să poată fi înscris într-un triunghi oarecare ABC dat.*

2) *Să se arate că fiecare latură a lui ABC poate fi aleasă ca suport pentru baza dreptunghiului. Să se discute existența și numărul soluțiilor respective și să se determine lungimile laturilor dreptunghiurilor de arie maximă în funcție de elementele triunghiului ABC.*

3) *În ce caz dreptunghiurile înscrise se reduc la pătrate? În acest caz să se exprime ariile celor trei pătrate posibile în funcție de elementele triunghiului ABC și să se ordoneze crescător ariile respective, formulîndu-se geometric criteriul de ordonare.*

4) *Fiind dată o latură $|AB|$ a triunghiului ABC, să se determine locul geometric al vîrfului C, astfel încît să se poată înscrie în ABC un pătrat de arie dată σ, avînd o latură situată pe dreapta AB.*

Acad. *N. Teodorescu*

Soluție. Presupunînd problema rezolvată, fie $MNQR$ dreptunghiul înscris, M și R pe AB, N pe AC, Q pe BC. În ipoteza că triunghiul ABC este ascuțitunghic, punctele M și R sînt pe segmentul $[AB]$, ca și în cazul în care $\hat{C}$ este obtuz sau drept. Dacă $\hat{B}$ este obtuz, M este între A și B, iar R exterior segmentului $[AB]$, o situație analoagă existînd dacă $\hat{A}$ este obtuz. Considerăm întîi cazul triunghiului ABC ascuțitunghic și fie $0 \leq \lambda \leq 1$ raportul în care

Q împarte pe $[BC]$. Notînd cu H piciorul înălțimii din C, din asemănarea triunghiurilor formate deducem

$$\frac{\|QR\|}{\|CH\|}=\frac{\|QB\|}{\|BC\|}=\lambda;\quad \frac{\|NQ\|}{\|AB\|}=\frac{\|CQ\|}{\|BC\|}=1-\lambda,$$

$$\|AB\|=\frac{\|NQ\|}{1-\lambda},\quad \|CH\|=\frac{\|QR\|}{\lambda}. \tag{1}$$

$$S=\sigma[ABC]=\frac{1}{2}\|AB\|\cdot\|CH\|=\frac{\|NQ\|\cdot\|QR\|}{2\lambda(1-\lambda)}=\frac{\sigma[MRQN]}{2\lambda(1-\lambda)}=\frac{s}{2\lambda(1-\lambda)}.$$

Deci $s=2\lambda(1-\lambda)S$ este condiția necesară pentru ca dreptunghiul $MRQN$ de arie s să poată fi înscris în triunghiul ABC, avînd baza $[MR]$ pe AB. Pentru suficiență, σ și S fiind date, ecuația

$$2\lambda^2-2\lambda+\frac{s}{S}=0 \text{ dă } \lambda=\frac{1\pm\sqrt{1-\frac{2s}{S}}}{2}. \tag{2}$$

Ecuația admite rădăcini reale, ambele pozitive, dacă și numai dacă $s\leqslant\frac{S}{2}$.

Deci, condiția necesară și suficientă este

$$s=2\lambda(1-\lambda)S \text{ cu } s\leqslant\frac{S}{2}. \tag{3}$$

2) Condiția este independentă de alegerea uneia dintre laturile triunghiului ca bază, iar ecuația (2) determină raportul în care vîrful Q împarte pe $[BC]$. Există două soluții dacă $s<\frac{S}{2}$, una dublă dacă $\sigma=\frac{2}{S}$ și niciuna dacă $s>\frac{S}{2}$ pentru fiecare din laturile $[AB]$, $[BC]$, $[CA]$, construcția depinzînd de λ, care fixează vîrfurile dreptunghiului de tip Q pe laturile triunghiului de tip $[BC]$. Evident, cum $s\leqslant\frac{S}{2}$, $\max s=\frac{S}{2}$ pentru $\lambda=\frac{1}{2}$, iar lungimile laturilor dreptunghiului $MRQN$ respectiv, vor fi din (1):

$$\|NQ\|=\frac{\|AB\|}{2},\ \|QR\|=\frac{\|CH\|}{2}.$$

3) Condiția ca dreptunghiul să fie pătrat este $\|NQ\|=\|QR\|$, deci din (1) obținem:

$$(1-\lambda)\|AB\|=\lambda\|CH\|\Rightarrow\lambda=\frac{\|AB\|}{\|AB\|+\|CH\|}. \tag{4}$$

Avem

$$\|QR\| = \|NQ\| = \|CH\| = \frac{2S}{\|AB\| + \|CH\|}.$$

Pentru ca aria pătratului să fie maximă, este necesar și suficient ca $\lambda = 1/2$, de unde $\|CH\| = \|AB\|$. Triunghiul ABC are atunci vîrful C pe dreapta ce conține latura opusă lui $[AB]$ a pătratului care are ca bază pe $[AB]$. Observăm că această dreaptă este locul vîrfului C al tuturor triunghiurilor cu baza $[AB]$ dată pentru care pătratul înscris $MRQN$ are aria egală cu jumătatea ariei triunghiului ABC, triunghi care poate deci fi și obtuzunghic, ca dealtfel, în întreaga problemă. Ariile celor 3 pătrate inscriptibile în ABC vor fi:

$$\sigma_C = \|QR\| \cdot \|NQ\| = \frac{4S^2}{(\|AB\| + \|CH\|)^2}, \sigma_A = \frac{4S^2}{(\|BC\| + \|AK\|)^2},$$

$\sigma_B = \dfrac{4S^2}{(\|AC\| + \|BL\|)^2}$, H, K, L fiind picioarele înălțimilor respective. În ipoteza $\|AB\| \geqslant \|BC\| \geqslant \|AC\|$, vom nota

$\|BC\| = l\|AB\|$ cu $l \leqslant 1$ și $\|AC\| = m\|BC\|$, cu $m \leqslant 1$. As tfel din

$$\|AK\| = \frac{\|CH\|}{l}, \|BL\| = \frac{\|AK\|}{m}, \|CH\| = \|BC\| \sin B = \tag{5}$$

$$= l\|AB\| \sin B, \|AK\| = \|AC\| \sin C = m\|BC\| \sin C,$$

deducem

$$\|AB\| + \|CH\| - (\|BC\| + \|AK\|) = (1 - \lambda)\left(\|AB\| - \frac{\|CH\|}{l}\right) =$$

$$= \|AB\|(1 - \lambda)(1 - \sin B) \text{ și cum } \sin B \leqslant 1, \text{ rezultă}$$

$$\|AB\| + \|CH\| \geqslant \|BC\| + \|AK\|.$$

În mod analog

$$\|BC\| + \|AK\| - (\|AC\| + \|BL\|) = (1 - m)\left(\|BC\| - \frac{\|AK\|}{m}\right) =$$

$$= (1 - m)\|BC\|(1 - \sin C)$$

și cum $\sin C \leqslant 1$, obținem $\|BC\| + \|AK\| \geqslant \|AC\| + \|BL\|$ și deci

$$\|AB\| + \|CH\| \geqslant \|BC\| + \|AK\| \geqslant \|AC\| + \|BC\|.$$

În consecință ariile pătratelor sînt ordonate astfel:

$$\sigma_C \leqslant \sigma_A \leqslant \sigma_B \text{ cînd } \|AB\| \geqslant \|BC\| \geqslant \|AC\|,$$

criteriul de ordinare fiind: *ariile sînt ordonate invers decît lungimile laturilor triunghiului ABC.*

4) Pornind de la expresia lungimilor laturilor pătratului $\|QR\| = \sqrt{\sigma} = \frac{2S}{\|AB\| + \|CH\|} = \frac{\|AB\| \cdot \|CH\|}{\|AB\| + \|CH\|}$ date de (4), obținem imediat $\|CH\| = \frac{\sqrt{\sigma}\|AB\|}{\|AB\| - \sqrt{\sigma}}$. Cu condiția $\sqrt{\sigma} < \|AB\|$, locul lui C este o paralelă la AB la distanța $\frac{\sqrt{\sigma}\|AB\|}{\|AB\| - \sqrt{\sigma}}$, deci există o infinitate de triunghiuri ABC în care pătratul de arie σ poate fi înscris. În plus $S = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{\sigma}\|AB\|^2}{\|AB\| - \sqrt{\sigma}}$.

Comentariu. Problema reprezintă generalizarea unei probleme din Mathematics Teacher vol. 78 nr. 2/1982 (A se vedea și problema SC 40).

SC 32. *Fie $A_1, A_2, \ldots, A_{2m}$ o configurație de puncte în spațiul euclidian n— dimensional E_n și M_1, M_2 centrele de greutate ale sistemelor $A_1, A_3, \ldots, A_{2m-1}$, respectiv $A_2, A_4, \ldots, A_{2m}$. Să notăm cu S suma*

$$S = \|A_1A_2\|^2 + \|A_2A_3\|^3 + \ldots + \|A_{2m-1}A_{2m}\|^2 + \|A_{2m}A_1\|^2 -$$
$$- \|A_1A_3\|^2 - \|A_3A_4\|^2 - \ldots - \|A_{2m-1}A_1\|^2 - \|A_{2m}A_2\|^2 + \|A_1A_4\|^2 +$$
$$+ \|A_2A_5\|^2 + \ldots + \|A_{2m-1}A_2\|^2 + \|A_{2m}A_3\|^2 - \ldots +$$
$$+ (-1)^m[\|A_1A_m\|^2 + \|A_2A_{m+1}\|^2 + \ldots + \|A_{2m-1}A_{m-2}\|^2 +$$
$$+ \|A_{2m}A_{m-1}\|^2] + (-1)^m[\|A_1A_{m+1}\|^2 + \|A_2A_{m+2}\|^2 + \ldots + A_mA_{2m}\|^2],$$

cu mențiunea că ultima linie conține numai m termeni în suma respectivă. Să se demonstreze că $S = m^2\|M_1M_2\|^2$.

A.T. Douglas, Math. Gazette, vol. 65, nr. 431/1981

Soluție. Alegînd o origine arbitrară O, vom nota cu a_k vectorul de poziție al punctului A_k, unde $k = 1, 2, \ldots, 2m$ și vom face convenția ca $\mathbf{a}_p = a_{p-2m}$ pentru $p > 2m$. Vom putea scrie suma S cu această notație, punînd

$$\|A_jA_k\|^2 = (\mathbf{a}_k - \mathbf{a}_j,\ \mathbf{a}_k - \mathbf{a}_j) = (\mathbf{a}_k - \mathbf{a}_j)^2 = a_j^2 + a_k^2 - 2(\mathbf{a}_j, \mathbf{a}_k)$$

și vom avea

$$S = \sum_{j=1}^{m-1}(-1)^{j+1}\sum_{i=1}^{2m}(a_{i+j} - \mathrm{a}_i)^2 + (-1)^{m+1}\sum_{i=1}^{m}(\mathbf{a}_{i+m} - \mathbf{a}_i)^2 =$$
$$= \sum_{j=1}^{m-1}(-1)^{j+1}\sum_{i=1}^{2m}(a_{i+j}^2 + a_i^2) - 2\sum_{j=1}^{m-1}(-1)^{j+1}\sum_{i=1}^{2m}(\mathbf{a}_{i+j}, \mathbf{a}_i) +$$
$$+ (-1)^{m+1}\sum_{i=1}^{m}(a_{i+m}^2 + a_i^2) - 2(-1)^{m+1}\sum_{i=1}^{m}(\mathbf{a}_{i+m}, \mathbf{a}_i).$$

însă

$$\sum_{j=1}^{m-1}(-1)^{j+1}\left[\sum_{i=1}^{2m} a_{i+j}^2 + \sum_{i=1}^{2m} a_i^2\right] =$$

$$= \sum_{j=1}^{m-1}(-1)^{j+1}\sum_{k=j+2}^{2m+j} a_k^2 + \sum_{i=1}^{2m} a_k^2 \cdot \sum_{i=1}^{m-1}(-1)^{j+1}.$$

În ceea ce privește primul termen vom avea, punînd $i + j = k$:

$$\sum_{k=j+1}^{2m} a_k^2 + \sum_{k=2m+1}^{2m+j} a_k^2 = \sum_{k=j+1}^{2m} a_k^2 + \sum_{k=1}^{j} a_k^2 = \sum_{k=1}^{2m} a_k^2,$$

pe baza convenției $a_p = a_{p-2}$ pentru $p > 2m$.
Pe de altă parte

$$\sum_{j=1}^{m-1}(-1)^{j+1} = 1 - 1 + \ldots + (-1)^m = \begin{cases} 0, \text{ dacă } m = 2l+1 \\ 1, \text{ dacă } m = 2l \end{cases}$$

astfel încît

$$\sum_{j=1}^{m-1}(-1)^{j+1} \cdot \sum_{i=1}^{2m}(a_{i+j}^2 + a_i^2) = \begin{cases} 0, \text{ dacă } m = 2l+1 \\ 2\sum_{j=1}^{2m} a_i^2, \text{ dacă } m = 2l \end{cases} \tag{1}$$

Un tratament analog, ne conduce la estimarea termenului

$$(-1)^{m+1}\sum_{i=1}^{m}(a_{i+m}^2 + a_i^2) = (-1)^{m+1}\left[\sum_{i=1}^{m} a_i^2 + \sum_{k=m+1}^{2m} a_k^2\right] =$$

$$= (-1)^{m+2} \cdot \sum_{i=1}^{2m} a_i^2. \tag{2}$$

dacă luăm $i + m = k$ în prima sumă.
Astfel din (1) și (2) deducem că suma celor doi termeni evaluați va fi $\sum_{i=1}^{2m} a_i^2$, pentru orice paritate a lui m, fiindcă dacă $m = 2l + 1$, $m + 1 = 2l + 2$ și avem suma din (1) egală cu 0, iar cea din (2) egală cu $\sum_{i=1}^{2m} a_i^2$, iar dacă $m = 2l$, suma din (1) va fi egală cu $2\sum_{i=1}^{2m} a_i^2$, pe cînd cea din (2) va fi $-\sum_{j=1}^{2m} a_i^2$.

Revenind la expresia lui S, vom observa că

$$\sum_{j=1}^{m-1}(-1)^{j+1} \cdot \sum_{i=1}^{2m}(a_{i+j}, a_i) + (-1)^{m+1} \cdot \sum_{i=1}^{2m}(a_{i+m}, a_i) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} (-1)^{j+1} \cdot \sum_{i=1}^{2m} (\mathbf{a}_{i+j}, \mathbf{a}_i) = \sum_{i=1}^{2m} (\mathbf{a}_{i+j}, \mathbf{a}_i) - \sum_{i=1}^{2m} (\mathbf{a}_{i+2}, \mathbf{a}_i) + \ldots +$$

$$+ (-1)^{m+1} \cdot \sum_{i=1}^{2m} (\mathbf{a}_{i+m}, \mathbf{a}_i).$$

Indicii de sumare fiind diferiți în toate aceste produse scalare, iar semnele alternînd, vom putea scrie

$$S = \sum_{i=1}^{2m} (\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_i) - 2 \sum_{j=1}^{m} (-1)^{j+1} \cdot \sum_{i=1}^{2m} (\mathbf{a}_{i+j}, \mathbf{a}_i) =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{2m} (-1)^{i-1} \mathbf{a}_i, \sum_{i=1}^{2m} (-1)^{i} \mathbf{a}_i \right) = \left(\sum_{i=1}^{2m} (-1)^{i+1} \mathbf{a}_i \right) =$$

$$= ((\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \ldots + \mathbf{a}_{2m-1}) - (\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_4 + \ldots + \mathbf{a}_{2m}))^2 =$$

$$= m^2 \left(\frac{\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_3 + \ldots + \mathbf{a}_{2m-1}}{m} - \frac{\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_4 \ldots + \mathbf{a}_{2m}}{m} \right)^2 = m^2 \| M_1 M_2 \|^2,$$

întrucît vectorii de poziție ai celor două centre de greutate M_1 și M_2 sînt

$$m_1 = \frac{\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_3 + \ldots + \mathbf{a}_{2m-1}}{m}, \quad m_2 = \frac{\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_4 + \ldots + \mathbf{a}_{2m}}{m}.$$

Comentarii: Poblema constituie o generalizare largă a teoremei lui *Appolonius* privitoare la paralelogram, extinsă de *Euler* la un patrulater convex oarecare și regăsită sub această formă de *Amir-Moez* și *Hamilton* (v. problema SC 42).

Demonstrația vectorială, dată aici, oferă avantajul unei generalități pe care alte metode nu o pot realiza precum și a unor sugestive extensiuni, ca de exemplu:

1) Avînd o configurație de $2m$ puncte, putem să le numerotăm în permutări de $2m$ obiecte feluri, deci în $(2m)!$ moduri. Unindu-le în ordine consecutivă *vom avea 2m contururi poligonale închise, dintre care nu toate sînt distincte.* Într-adevăr în primul rînd fiecare poate fi parcurs în două sensuri opuse, ceea ce reduce numărul lor la jumătate, apoi cele ce se obțin prin permutări circulare unul din celălalt nu sînt distincte, de exemplu $A_1 A_2 \ldots A_{2m}$ și $A_3 A_4 \ldots A_{2m} A_1 A_2$. În orice caz, *proprietatea demonstrată este valabilă pentru oricare din aceste contururi poligonale,* dar bineînțeles, centrele de greutate ale celor două poligoane cu cîte m laturi se schimbă.

2) *Punctele $A_1, A_2, \ldots, A_{2m}$ pot fi luate arbitrar.* Ele pot fi, de exemplu, coplanare sau într-un subspațiu liniar $p < n$ dimensional. Ele pot de asemenea fi și confundate în parte, proprietatea menținîndu-se întrucît nu avem decît să egalăm unii vectori de poziție. Totuși este necesar să se examineze semnificațiile geometrice ale configurațiilor cu degenerescențe. De

exemplu, dacă patrulaterul devine triunghi, proprietatea pentru $d = 0$, devine

$$a^2 + b^2 + c^2 = c^2 + a^2 + 4\left(\frac{b}{2}\right)^2,$$

deci o identitate fără semnificație.

3) *Teorema generală este valabilă și în orice spațiu prehilbertian*, întrucît demonstrația nu folosește decît produse scalare *nepreciz*ate ca expresie.

SC 33. *Fie date cercurile*

$$x^2 + y^2 + 2x - 8y + 8 = 0 \text{ și } x^2 + y^2 + 10x - 2y + 22 = 0.$$

1) *Să se demonstreze că ele sînt tangente într-un punct P, care se cere determinat;*

2) *Să se găsească ecuația tangentei comune.*

Ontario Secondary School, Math. Bull, vol. 19, nr. 1/1983

Soluție. 1) Primul cerc are centrul $C_1(-1, 4)$ și raza $r_1 = 3$, iar cel de al doilea are centrul $C_2(-5, 1)$ și raza $r_2 = 2$. Avem $\| C_1C_2 \| = 5$ și $r_1 + r_2 = 5$, deci cercurile sînt tangente exterioare.

2) Punctul de contact P împarte $[C_1C_2]$ în raportul 3/2, deci

$$P\left(\frac{3(-5) + 2(-1)}{5}, \frac{3(1) + 2(4)}{5}\right) = \left(\frac{17}{5}, \frac{11}{5}\right).$$

Coeficientul unghiular al dreptei C_1C_2 este 3/4, deci tangenta comună va avea coeficientul unghiular $-4/3$ și ecuația tangentei va fi $20x + 5y + 33 = 0$.

Comentarii. Problema este instructivă întrucît face parte dintr-o secțiune a revistei (Secțiunea de aur) editată de *prof. Fred Miller* de la Universitatea Waterloo (Canada), destinată elevilor de liceu. Aceasta nu prezintă dificultăți, dar dă o idee de materiile predate în învățămîntul secundar canadian, care nu disprețuiește problemele de calcul, cum se vede și din următoarea problemă de geometrie sintetică.

SC 34. *Trei discuri de rază r fiecare, se taie două cîte două ortogonal. Să se determine aria acoperită de ele în planul lor.*

Ontario Sec. School, Math. Bull, vol. 19, nr. 1/1983

Soluție. Fie C_1, C_2, C_3 centrele celor trei cercuri și să alegem cîte un punct de intersecție pentru fiecare două: pentru cercurile de centre C_1, C_2 punctul A, pentru cercurile de centre C_2, C_3 punctul B, iar pentru cercurile de centre C_3, C_1 punctul D.

Aria totală este suma ariilor a trei triunghiuri dreptunghice AC_2C_1, BC_2C_5, DC_5C_1, a unui triunghi echilateral $C_1C_2C_3$ și a trei sectoare congruente corespunzînd la arce de cerc de măsură $210° = 360° - 150°$. Avem

$$\sigma[AC_1C_2] = \sigma[BC_2C_3] = \sigma[DC_3C_1] = \frac{1}{2}r^2;$$

$$\sigma[C_1C_2C_3] = \frac{1}{2}\cdot(r\sqrt{2})\cdot\sqrt{2r^2 - \frac{r^2}{2}} = \frac{1}{2}r^2\sqrt{3};$$

$$\sigma(\text{sect. } AC_1D) = \frac{210}{360}\pi r^2 = \frac{7}{12}\pi r^2, \text{ deci aria totală va fi:}$$

$$\frac{3}{2}r^2 + \frac{r^2\sqrt{3}}{2} + \frac{7}{4}\pi r^2 = \left(\frac{3+\sqrt{3}}{2} + \frac{7}{4}\pi\right)r^2.$$

SC 35. *Se dă o dreaptă Δ și două puncte B și C de aceeași parte a lui Δ*

a) *Există cercuri trecînd prin B și C și tangente dreptei Δ? Discuție.*

b) *Să se construiască numai cu rigla și compasul aceste cercuri, calculîndu-se razele lor și să se determine și cea de a doua tangentă comună lor.*

Acad. N. Teodorescu. Generalizarea unei probleme din Ontario Math. Bull. vol. 15, nr. 1/1979

Soluție geometrică. Cazul I. *BC neparalelă cu Δ.*

a) Fie A punctul unde dreapta BC întîlnește pe Δ și α măsura unghiului ascuțit dintre Δ și AB. În acest caz distanța $\|AB\|$ ca și măsura unghiulară α cu $0 < \alpha \leqslant \pi/2$ sînt presupuse cunoscute ca date ale problemei. Dacă A_1 este punctul de contact al cercului de centru O_1 cu Δ, puterea lui A în raport cu cercul de centru O_1, presupus a trece prin B și C, va fi $\|AA_1\|^2 = \|AB\|\cdot\|AC\|$, deci punctul de contact A_1 este determinat prin $\|AA_1\| = \sqrt{\|AB\|\cdot\|AC\|}$. În orice caz, există și un al doilea punct de contact A_2 cu $\|AA_2\| = \|AA_1\|$, deci A_2 este simetricul lui A_1 în raport cu A pe Δ.

Cercurile ce trec prin A_1, B și C, respectiv A_2, B și C, vor fi tangente în A_1, respectiv A_2 dreptei Δ, centrele lor O_1, respectiv O_2 fiind pe mediatoarea segmentului $|BC|$, ce trece prin mijlocul E al acestui segment și taie pe Δ în D, la intersecția cu perpendiculara pe Δ dusă prin A_1, respectiv A_2 (deci unic determinat). Dreptele AA_1, respectiv AA_2, sînt efectiv tangente la cercurile de centre O_1, respectiv O_2. Într-adevăr, dacă AA_1 ar mai intersecta cercul de centru O_1 în A_1', puterea lui A_1 ar fi:

$$\|AA_1\|\cdot\|AA_1'\| = \|AB\|\cdot\|AC\| = \|AA_1\|^2,$$

de unde

$$\|AA_1'\| = \|AA_1\| \text{ și deci } A_1' = A_1.$$

Deci, în concluzie, dacă $\alpha \neq 0$, există două cercuri de centre O_1 și O_2 tangente la A și trecînd prin B și C. Dacă $\alpha = \pi/2$, atunci mediatoarea lui $|BC|$, deci

linia centrelor, va fi paralelă cu Δ și deci $||A_1O_1|| = ||A_2O_2||$, cele două cercuri fiind congruente, simetrice unul altuia în raport cu BC.

Cazul II. *BC paralelă cu Δ.*

Dacă $\alpha = 0$, dreapta BC va fi paralelă cu Δ, iar cele două cercuri ar avea linia centrelor perpendiculară pe Δ, într-un punct D, care ar fi și punctul de contact cu Δ al ambelor cercuri. Cum prin trei puncte necoliniare trece un cerc și numai unul, cele două cercuri de centre O_1 și O_2 coincid.

b) Construcția celor două cercuri se face numai cu rigla și compasul. Într-adevăr dacă $\alpha \neq 0$, cunoaștem punctul A pe Δ și avem relația $\| AA_1 \|^2 = \| AB \| \cdot \| AC \|$. Dacă pe $|AC|$ ca diametru descriem un semicerc și ducem în B perpendiculara la AC (construcție realizabilă cu compasul), la intersecția acesteia cu semicercul se obține punctul F, iar triunghiul AFC este dreptunghic. Vom avea deci $\| AF \|^2 = ||AB|| \cdot ||AC||$ și deci $\|AF\| = ||AA_1||$. Tot cu compasul determinăm cele două puncte A_1 și A_2 simetrice în raport cu A pe Δ. La intersecția perpendicularelor pe Δ în A_1 și A_2 cu mediatoarea DE a lui $|BC|$ se obțin punctele O_1 și O_2, centrele cercurilor. Cea de a doua tangentă comună va fi DG, unde G este simetricul lui A în raport cu E pe BC. Calculul razelor $\| O_1A_1 \|$ și $\| O_2A_2 \|$ se va face în funcție de α, $||AB|| = a$, $\| BC \| = b$, elemente necesare și suficiente construcției celor două cercuri. Avem:

$$\|AA_1\|^2 = \|AB\| \cdot \|AC\| = a(a+b) = \|AA_2\|^2,$$

$$||A_1D|| = \| A_1A \| + \| AD \| = \| A_1A \| + \frac{||AE||}{\cos \alpha} = \sqrt{a(a+b)} + \left(a + \frac{b}{2}\right) \frac{1}{\cos \alpha}$$

Deducem imediat

$$\| A_1O_1 \| = \| A_1D \| \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \| A_1D \| \operatorname{cotg} \alpha$$

deci

$$\| A_1O_1 \| = \frac{\sqrt{a(a+b)} \cos \alpha + a + \frac{b}{2}}{\sin \alpha} \tag{1}$$

iar

$$\| A_2O_2 \| = \| A_2D \| \operatorname{cotg} \alpha = (||A_1D|| - ||A_1A_2||) \operatorname{cotg} \alpha =$$

$$= \left(\frac{\| AE \|}{\cos \alpha} - \| A_1A \|\right) \operatorname{cotg} \alpha = \frac{||AE|| - ||A_1A \| \cos \alpha}{\sin \alpha},$$

deci

$$\| A_2O_2 \| = \frac{a + \frac{b}{2} - \sqrt{a(a+b)} \cos \alpha}{\sin \alpha}. \tag{1'}$$

Dacă $\alpha = \pi/2$, vom avea $\|A_1O_1\| = \|A_2O_2\| = a + b/2 = \|AE\|$. Dacă $\alpha = 0$, construcția trebuie refăcută, luînd în considerație distanța $\|ED\|$ de la BC la Δ, pe care o notăm $\|ED\| = d$. Centrele O_1 și O_2 vor fi pe DE, dar cum prin B, C și D trece un singur cerc ele se vor confunda. Cum $|DE|$ va fi un diametru, unind D cu B și ducînd perpendiculara BH pe DB se formează triunghiul dreptunghic DBH, iar $|DH|$ este diametrul căutat, astfel încît $\|DO_1\| = \frac{1}{2}\|DH\|$ și vom avea

$$\|BE\|^2 = \|DE\| \cdot \|EH\| = \|DE\|(\|DH\| - \|DE\|), \text{ deci } \frac{1}{4}b^2 = \|DH\| \cdot d - d^2,$$

de unde

$$\|DH\| = \frac{b^2 + 4d^2}{4d} \text{ și } \|DO_1\| = \frac{b^2 + 4d^2}{8d} = \|DO_2\|, \tag{2}$$

cele două cazuri coincizînd.

Comentarii. Problema poate fi tratată și analitic, ceea ce recomandăm cititorilor, alegerea axelor de coordonate jucînd un rol important în formularea ca și în conducerea calculelor. Pentru a se putea aborda cu ușurință toate pozițiile relative ale dreptei Δ și segmentului $|BC|$ este indicat să se aleagă ca axe dreapta BC și perpendiculara pe ea în E. În acest caz centrele O_1 și O_2 se vor găsi pe acest al doilea ax. Soluția analitică este mai laborioasă decît cea geometrică.

SC 36. *Într-un cerc de centru O și rază r, din vîrfurile E, F, G ale unui triunghi echilateral înscris se duc arce de cerc de rază r, care intersectează cercul de centru O în B, C, A. Se formează trei lentile ce se întîlnesc sub forma unor petale de lotus în O.*

Să se arate că aria celor trei porțiuni de disc exterioare acestor petale este independentă de π și egală cu dublul ariei triunghiului ABC.

J. V. Narlikar, Math. Gazette, vol. 65, nr. 43/1981

Soluție. Pentru a evalua aria unei petale AOA, observăm că aria sectorului circular inclus în discul de centru F și rază r este 1/6 din aria acestui disc, deci este egală cu $\frac{\pi}{6}r^2$. Dacă scădem aria triunghiului echilateral FAO, obținem aria jumătății petalei AOA, deci aria petalei $AOA =$ $= 2\left(\frac{\pi}{6}r^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}r^2\right) = \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)r^2$.

Aria celor trei porțiuni exterioare petalelor va fi

$$\pi r^2 - 3\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) r^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} r^2,$$

deci este independentă de π și egală cu dublul ariei $\frac{3\sqrt{3}}{4} r^2$ a triunghiului echilateral ABC.

Comentarii. Problema pune în evidență o curiozitate, anume aria unei porțiunii dintr-un disc care este independentă de π, deși este formată de arce de cerc.

SC 37. *Fie dreapta $y = 4x$ și punctul $P(6, 4)$. Să se determine pe dreaptă un punct Q astfel încît triunghiul format în primul cadran de dreptele PQ, $y = 4x$ și axa $x'Ox$ să aibă o arie minimă.*

Olimpiada Națională R. P. Chineză/1978, MT, vol. 74, nr. 6/1981

Soluție. Notînd cu x_1, y_1 coordonatele lui Q, avem $y_1 = 4x_1$ și ecuația dreptei PQ este $\frac{y-4}{4x_1-4} = \frac{x-6}{x_1-6}$. Dacă M este punctul de intersecție al lui PQ cu Ox, vom avea $M\left(\frac{5x_1}{x_1-1}, 0\right)$ iar $S = \sigma[OMQ] = \frac{1}{2} y_1 \cdot |OM| =$ $= \frac{10x_1^2}{x_1-1}$. Ecuația $10x_1^2 - Sx_1 + S = 0$ determină pe x_1, dacă are rădăcini reale. Realizantul fiind $S(S-40) \geqslant 0$, cum $S > 0$, vom avea cu necesitate $S \geqslant 40$, de unde deducem că minimul lui S este 40 și corespunde rădăcinii duble $x_1 = 2$. Astfel Q are coordonatele $(2, 8)$.

Comentarii. Punctajul problemei este 18, deși nu pretinde raționamente speciale, pe cînd alte probleme mai laborioase sînt cotate numai cu 15 puncte (a se vedea SC39, pag 529).

SC 38. *Pe suprafața unei mese se așează 4 sfere, fiecare de rază 1, în două straturi, 3 sfere fiind în stratul inferior și a patra deasupra. Sferele sînt tangente fiecare la celelalte 3. Să se determine distanța între punctul cel mai înalt al sistemului de sfere și suprafața mesei.*

Olimpiada Naională, R. P. Chineză/1978, Mathematics Teacher, vol. 74, nr. 6/1981

Soluție. Fie O_1 centrul sferei superioare, O_2, O_3, O_4 centrele celorlalte. Avem $\|O_1O_2\| = \|O_1O_3\| = \|O_1O_4\| = \|O_2O_3\| = \|O_3O_4\| = \|O_4O_2\| = 2$, iar tetraedrul $[O_1O_2O_3O_4]$ este regulat. Înălțimea sa O_1K atinge planul $(O_2O_3O_4)$

în centrul K al triunghiului echilateral $O_2O_3O_4$, iar $\|KO_2\|$ este raza cercului circumscris. Vom avea

$$\|O_2K\| = \frac{2}{3}\sqrt{3} \text{ și } \|O_1K\| = \sqrt{\|O_1O_2\|^2 - \|O_2K\|^2} = \frac{2\sqrt{6}}{3}.$$

Distanța de la punctul cel mai înalt la plan va fi $2 + \frac{2\sqrt{6}}{3}$.

Comentarii. Problema face parte dintr-un lot de 10 probleme și este cotată cu 8 puncte, punctajul fiind de 6—20. Cu 6 puncte sînt apreciate următoarele probleme, cărora doar le schițăm soluția.

1) *Dacă* $y = \log_{1/\sqrt{2}} \frac{1}{x+3}$, *să se determine mulțimea valorilor lui* $x \in \mathbf{R}$ *astfel încît* $y > 0$; *de asemenea pentru* $y < 0$.

Din $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^y = \frac{1}{x+3}$ se obține $y<0 \Rightarrow x \in (-3, -2)$; $y>0 \Rightarrow x \in (-2, \infty)$.

2) *Dacă* $\operatorname{tg} x = 2\sqrt{2}$ *cu* $180° < x < 270°$, *să se calculeze* $\cos 2x$ *și* $\cos \frac{x}{2}$.

Reducerea la primul cadran revine la $\operatorname{tg} x = 2\sqrt{2}$ cu $0° < x < 90°$.

3) *Centrul unei elipse este în origine. Segmentele cuprinse între unul din focare situat pe axa* $x'Ox$ *și capetele axelor mici sînt perpendiculare. Distanța dintre acest focar și capătul semiaxei mari, pe care se află el, este* $\sqrt{10}-\sqrt{5}$. *Să se determine ecuația elipsei.*

Din condiția de perpendicularitate se deduce $c = b$ și din $a - c = \sqrt{10} - \sqrt{5}$, găsim $a = \sqrt{10}$, $b = c = \sqrt{5}$.

Cu 8 puncte este apreciată și problema următoare:

4) *Fiind dată ecuația* $2x^2 - 9x + 8 = 0$, *să se formeze ecuația de gradul II care are ca rădăcini inversa sumei rădăcinilor ecuației date și pătratul diferenței acestora.*

Avem $x_1x_2 = 4$, $x_1 + x_2 = 9/2$, $(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 17/4$.

Ecuația va fi $36z^2 - 8z + 153 = 0$.

Dificultățile acestor probleme, la etapa I, sînt gradate: primele cinci probleme au caracterul de exerciții variate de analiză, trigonometrie, geometrie analitică, algebră și geometrie metrică în spațiu. Următoarele sînt mai grele și sînt apreciate cu 15—20 puncte.

SC 39. *Fie* M *mijlocul segmentului* $|AB|$. *Dintr-un punct* C *de pe* $|AB|$ *se duce segmentul* $|CD|$ *situat într-unul din semiplanele determinate de* AB. *Fie* N *mijlocul lui* $|CD|$, P *mijlocul lui* $|BD|$ *și* Q *mijlocul lui* $|MN|$. *Să se demonstreze că dreapta* PQ *trece prin mijlocul* E *al lui* $|AC|$.

Olimpiada Națională R. P. Chineză/1978. Mathematics Teachers, vol. 74, nr. 6/1981

Soluție. Unind N cu P și cu E, fig. $NEMP$ este paralelogram. Unind A cu D, avem $MP \| AD$, $EN \| MP \| AD$, iar $|EN|$ este linie mijlocie în triunghiul ADC.

Comentarii. Problema este evaluată la 15 puncte, deși nu este mai grea decît cele menționate în comentariile problemei 31 SC. Tot cu 15 puncte este evaluată și următoarea problemă pe care o încredințăm cititorilor.

1) *Dacă n, k sînt întregi pozitivi dați cu $n > 1$, $k > 2$, expresia $n(n-1)^{k-1}$ poate fi pusă sub forma unei sume de întregi pari consecutivi.*

18 puncte s-au acordat problemei următoare:

2) *Dacă triunghiul ascuțitunghic ABC este înscris în cercul unitate, atunci* $\cos A + \cos B + \cos C < p$, *unde $2p$ este perimetrul triunghiului,* pe care, de asemenea o propunem spre rezolvare.

SC 40. *În triunghiul ascuțitunghic ABC se înscrie cu baza $|MR|$ pe AB pătratul $MNQR$ (N pe $|AC|$, Q pe $|BC|$). Să se arate că aria pătratului este mai mică decît 1/2 din aria triunghiului.*

Concurs de selecție în provincia Kwontung (Canton) în vederea Olimpiadei de Matematică R. P. Chineză/1978. Mathematics Teacher vol. 74, nr. 6/1981

Soluție. Fie H piciorul înălțimii din C și λ raportul în care Q împarte pe $[BC]$. Din asemănarea triunghiurilor formate, deducem

$$\frac{\|QR\|}{\|CH\|} = \frac{\|QB\|}{\|BC\|} = \lambda; \quad \frac{\|NQ\|}{\|AB\|} = \frac{\|CQ\|}{\|BC\|} = 1 - \lambda; \quad \|AB\| =$$

$$= \frac{\|NQ\|}{1-\lambda}, \quad \|CH\| = \frac{\|QR\|}{\lambda}.$$

Avem $\sigma[ABC] = \frac{1}{2}\|AB\| \cdot \|CH\| = \frac{\|NQ\| \cdot \|QR\|}{2\lambda(1-\lambda)} = \frac{\sigma[MRNQ]}{2\lambda(1-\lambda)}$ $(0 \leqslant \lambda \leqslant 1)$,

$$\sigma[MRNQ] = 2\lambda(1-\lambda) \cdot \sigma[ABC]. \tag{1}$$

Însă în intervalul $[0, 1]$ expresia $\lambda(1-\lambda)$ are un maxim în $\lambda = 1/2$, deci $2\lambda(1-\lambda) \leqslant 1/2$, astfel încît

$$\sigma[MRNQ] \leqslant 1/2 \cdot \sigma[ABC].$$

Rezultatul este valabil și pentru orice dreptunghi înscris în ABC în condițiile problemei. Impunînd condiția ca acesta să fie pătrat

$\|QR\| = \|NQ\| \Leftrightarrow (1-\lambda)\|AB\| = \lambda\|CH\|$ și cum $\|CH\| = \|BC\| \sin B$, obținem

$$\lambda = \frac{\|AB\|}{\|AB\| + \|BC\| \sin B} = \frac{\|AB\|}{\|AB\| + \|CH\|}$$

care este valoarea corespunzătoare lui λ.
Pentru ca aria pătratului să fie 1/2 din aria triunghiului ABC este necesar și suficient ca $\| CH \| = \| AB \|$, deci ca triunghiul să aibă înălțimea congruentă cu baza.

Comentarii. 1) *Rezultatul este mai general decît cerințele enunțului,* fiind valabil pentru orice dreptunghi înscris în ABC, în condițiile enunțului. Formula (1) dă valoarea ariei dreptunghiului înscris în funcție numai de aria triunghiului și de λ.

2) În consecință: *Oricare ar fi latura triunghiului pe care o alegem ca bază pentru dreptunghi, aria acestuia este dată de (1), deci pentru λ dat cele trei dreptunghiuri sînt echivalente.*

3) În ceea ce privește cele trei pătrate înscrise, determinarea lui λ arată că lungimea laturii ca și aria acestuia depind de latura de bază și de înălțimea corespunzătoare: $\lambda = \dfrac{S}{S + \| CH \|^2}$, cu $S = \sigma[ABC]$, exprimă aceeași dependență. Ariile pătratelor vor fi diferite și se poate arăta că cea mai mare corespunde alegerii laturii celei mai mici ca bază.

4) Este ușor de arătat, pe baza raționamentului urmărit în rezolvarea problemei că proprietatea este valabilă pentru orice triunghi, chiar și obtuzunghic. Aceasta rezultă din ultima expresie a lui λ.

5) Toate rezultatele din comentariu se pot urmări în soluția problemei SC 31.

SC 41. *Dacă α_1, α_2, α_3 sînt măsurile unghiurilor triunghiului $A_1A_2A_3$, să se stabilească dubla inegalitate:*

$$20/8 < \sum_{i=1}^{3} [\sin^4(\alpha_i/4) + \cos^4(\alpha_i/4)] \leqslant 21/8.$$

În ce caz se obține egalitatea la dreapta și de ce nu se poate întări inegalitatea și la stînga?

F. Leuenberger, Elemente der Mathematik, vol. 37, nr. 6/1982

Soluția I. Se pornește de la simplificarea sumei trigonometrice:

$$\sin^4 \varphi + \cos^4 \varphi = (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)^2 - 2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi = 1 + 2 \sin^4 \varphi -$$

$$-2 \sin^2 \varphi = 1 - 2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi = 1 - (1/2) \sin^2 2\varphi = 1 - (1/4)(1 - \cos 4\varphi) =$$

$$= (1/4)(3 + \cos 4\varphi)$$

valabilă pentru orice φ. Luînd $\varphi = \alpha_i/4$ și sumînd, obținem că suma ce intervine în inegalitatea din enunț are valoarea:

$$(1/4)\left(9 + \sum_{i=1}^{3} \cos \alpha_i\right).$$

Se știe însă că într-un triunghi oarecare:

$$\sum_{i=1}^{3} \cos \alpha_i - 1 = 4 \prod_{i=1}^{3} \sin (\alpha_i/2),$$

deci suma din enunț are valoarea

$$10/4 + \prod_{i=1}^{3} \sin (\alpha_i/2)$$

și cum $0 < \prod_{i=1}^{3} \sin(\alpha_i/2) \leq \frac{1}{8}$ (a se vedea **problema** SC 14, obținem inegalitatea din enunț.

Soluția II. Se poate examina direct comportarea sumei

$F(\alpha_1, \alpha_2) = \prod_{i=1}^{3} \cos \alpha_i = \cos \alpha_1 + \cos \alpha_2 + \cos (\pi - \alpha_1 - \alpha_2) = \cos \alpha_1 + \cos \alpha_2 - \cos (\alpha_1 + \alpha_2)$, ca funcție de variabilele α_1, α_2 cu $0 < \alpha_1 < \pi$, $0 < \alpha_2 < \pi$.

Avem sistemul:

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha_1} = -\sin \alpha_1 + \sin (\alpha_1 + \alpha_2) = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha_2} = -\sin \alpha_2 + \sin(\alpha_1 + \alpha_2) = 0,$$

de unde $\sin \alpha_1 = \sin \alpha_2$, deci $\alpha_2 = \alpha_1$ sau $\alpha_2 = \pi - \alpha_1$. A doua soluție implicînd $\alpha_3 = 0$, trebuie exclusă.

Deducem imediat $\sin^2 \alpha_1 - \sin \alpha_1 = 0$, $\sin \alpha_1 (2 \cos \alpha_1 - 1) = 0$, de unde $\alpha_1 = \frac{\pi}{3}$, $\alpha_2 = \frac{\pi}{3}$, $\alpha_3 = \frac{\pi}{3}$. Punctul $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ va fi de maximum printr-un raționament analog cu cel relativ la $\prod_{i=1}^{3} \sin \alpha_i$. Punînd $\alpha_1 = \frac{\pi}{3} + \varepsilon$, $\alpha_2 = \frac{\pi}{3} + \varepsilon$, vom estima $F\left(\frac{\pi}{3} + \varepsilon, \frac{\pi}{3} + \varepsilon\right) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{3} + \varepsilon\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{3} + \varepsilon\right) =$

$= \cos \varepsilon - \sqrt{3} \sin \varepsilon - \frac{1}{2} \cdot (1 + 2 \sin^2 \varepsilon - 2\sqrt{3} \sin \varepsilon \cos \varepsilon) + 1 = \cos \varepsilon +$

$+ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} (2\sqrt{3} \sin \varepsilon \cos \varepsilon - 2\sqrt{3} \sin \varepsilon - 2 \sin^2 \varepsilon) < \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \sin^2 \varepsilon.$

Se deduce deci că $F\left(\frac{\pi}{3} + \varepsilon, \frac{\pi}{3} + \varepsilon\right) < F\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{2}$ și prin urmare $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ este punct de maximum, unicul din domeniul de definiție.

SC 42. *Într-un patrulater oarecare (convex sau concav) $ABCD$, dacă notăm prin M și N mijloacele **diagonalelor**, are loc relația:*

$$\|AB\|^2 + \|BC\|^2 + \|CD\|^2 + \|DA\|^2 = \|AC\|^2 + \|BD\|^2 + 4\|MN\|^2;$$

în alți termeni, suma pătratelor lungimilor laturilor este egală cu suma pătratelor lungimilor diagonalelor plus de patru ori pătratul distanței dintre mijloacele celor două diagonale.

Ali R. Amir-Moez și *I. D. Hamilton*, Mathematics Magazine, vol. 49/1946

Soluție. Pentru a păstra generalitatea necesară, întrucît patrulaterul poate fi convex sau concav, se impune o soluție vectorială cu alegerea arbitrară a originii în planul patrulaterului sau chiar în afara acestuia.

Fie $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ vectorii de poziție ai celor 4 vîrfuri și $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$ cei ai punctelor M și N. Vom avea:

$$\mathbf{m} = \frac{\mathbf{a}+\mathbf{c}}{2},\ \mathbf{n} = \frac{\mathbf{b}+\mathbf{d}}{2},\ \mathbf{MN} = \frac{1}{2}(\mathbf{b}+\mathbf{d}-\mathbf{a}-\mathbf{c}),$$

$$\mathbf{AB} = \mathbf{b}-\mathbf{a},\ \mathbf{BC} = \mathbf{c}-\mathbf{b},\ \mathbf{CD} = \mathbf{d}-\mathbf{c},\ \mathbf{DA} = \mathbf{a}-\mathbf{d},$$

$$\|AB\|^2 = (\mathbf{AB},\ \mathbf{AB}) = (\mathbf{b}-\mathbf{a},\ \mathbf{b}-\mathbf{a}) = a^2 + b^2 - 2\mathbf{ab},\ \|BC\|^2 =$$

$$= b^2 + c^2 - 2\mathbf{bc},\ \|CD\|^2 = c^2 + d^2 - 2\mathbf{cd};\ \|DA\|^2 = d^2 + a^2 - 2\mathbf{da},$$

$$\|AC\|^2 = c^2 + a^2 - 2\mathbf{ac},\ \|DB\|^2 = b^2 + d^2 - 2\mathbf{bd},\ \text{de unde}$$

$$\|AB\|^2 + \|BC\|^2 + \|CD\|^2 + \|DA\|^2 - \|AC\|^2 - \|BD\|^2 =$$

$$= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2\mathbf{ab} - 2\mathbf{bc} - 2\mathbf{cd} - 2\mathbf{ad} + 2\mathbf{ac} + 2\mathbf{bd} =$$

$$= (\mathbf{a}+\mathbf{c}-\mathbf{b}-\mathbf{d},\ \mathbf{a}+\mathbf{c}-\mathbf{b}-\mathbf{d}) = (\mathbf{a}+\mathbf{c}-\mathbf{b}-\mathbf{d})^2 =$$

$$= 4\left(\frac{\mathbf{a}+\mathbf{c}}{2} - \frac{\mathbf{b}+\mathbf{d}}{2}\right)^2 = 4\|MN\|^2,\ \text{deci relația din enunț.}$$

Comentarii. Enunțul problemei este mai general decît cel al celor doi autori, care consideră patrulaterul plan și convex. Folosirea unei metode directe de geometrie sintetică ar fi condus la necesitatea de a distinge între convex și concav, iar în cazul patrulaterului strîmb, acesta revine la un tetraedru. Metoda vectorială ne permite să abordăm în mod unitar toate cazurile posibile în plan și în spațiu. În acest ultim caz, am demonstrat următoarea teoremă:

În tetraedrul $[DABC]$ format cu 4 puncte necoplanare suma pătratelor lungimilor laturilor conturului poligonal închis $DABCD$ este egală cu suma pătratelor lungimilor muchiilor rămase $|AC|$ și $|DB|$, plus de 4 ori pătratul lungimii segmentului $|MN|$ care unește mijloacele M, N ale acestor două muchii. Demonstrația prezentată de noi se aplică mai general configurației următoare: *Se dau patru puncte în spațiu A, B, C, D. Acestea pot fi unite sub forma unui patrulater în trei moduri, dacă nu ținem seama de sensul parcurs. Să*

se demonstreze că suma pătratelor lungimilor laturilor acestui patrulater este egală cu suma pătratelor lungimilor celor două segmente k *obținute unind cele două puncte, care nu au fost unite direct prin conturul poligonal, plus de patru ori pătratul lungimii segmentului care unește mijloacele acestor două segmente. Cele trei segmente mediatoare sînt concurente într-un punct care este mijlocul lor comun.* Într-adevăr prin aceste construcții se formează un tetraedru $[ABCD]$ în care mediatoarele laturilor opuse sînt concurente, iar proprietatea metrică este valabilă pentru fiecare din cele trei moduri în care vîrfurile se pot uni printr-un contur poligonal închis. Problema este generalizarea unei teoreme a lui *Apollonius*, relativă la paralelogram. Aceasta se obține cînd M și N sînt confundate. Este ușor de văzut că această condiție este și suficientă pentru ca întreaga configurație să se reducă la un paralelogram. Celelalte două mediatoare ale laturilor opuse trec prin centrul paralelogramului. Această generalizare a fost obținută pentru prima oară de *Euler*, iar cei doi autori au regăsit uroprietatea în condițiile unui patrulater convex, probabil fără a cunoaște existența unei demonstrații anterioare. De altfel, o generalizare mult mai largă la cazul unei configurații de $2m$ puncte într-un spațiu n-dimensional formează obiectul unui articol semnat de *A. J. Douglas* (o generalizare a teoremei lui Apollonius) în Mathematical Gazette, vol. 65, nr. 431/1981, pe care l-am folosit pentru problema SC 32 și comentariile anexă.

SC 43. *Se dau trei cercuri concentrice într-un punct O și situate în trei plane perpendiculare două cîte două. Dacă r_1, r_2, r_3, sînt razele acestor cercuri și dacă r_2^{-2}, r_2^{-2}, r_2^{-2} pot fi lungimile laturilor unui triunghi, atunci și numai atunci există* 8 *plane tangente fiecare din ele la toate aceste* 3 *cercuri, iar într-un caz limită numai* 4.

Să se dea și un procedeu de construcție a acestor plane tangente.

El. der Math. vol. 38, nr. 1/1983

Soluție geometrică. (fig. SC 43). Cele trei plane perpendiculare trec prin O și formează opt unghiuri triedre tridreptunghice. Dacă există un plan tangent celor trei cercuri, el va delimita cu unul din aceste triedre (cel ale cărui fețe conțin punctele de tangență) un tetraedru tridreptunghic $[OABC]$; dreptele AB, BC, CA sînt intersecțiile acestui plan cu cele trei plane ale cercurilor, iar C', A', B' desemnează respectiv punctele de contact ale laturilor triunghiului ABC, cu cele trei cercuri.

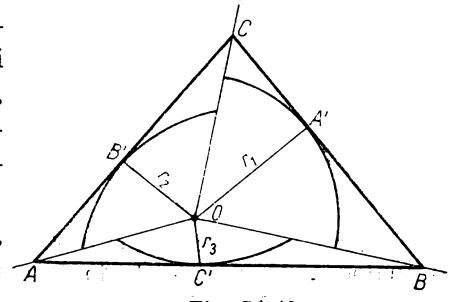


Fig. SC 43

Vom nota: $\|OA\| = a$, $\|OB\| = b$, $\|OC\| = c$ și vom avea $\|OA'\| = r_1$, $\|OB'\| = r_2$, $\|OC'\| = r_3$ (razele cercurilor), care

sînt totodată lungimile înălțimilor triunghiurilor dreptunghice OBC, OCA, OAB (înălțimi relative la ipotenuze).

Din triunghiul dreptunghic OBC obținem

$$r_1^2 = \| A'C \| \cdot \| A'B \|; \quad \| A'C \| = \| OC \| \cos C; \quad \| A'B \| = \| OB \| \cos B.$$

Atunci $r_1^2 = bc \cos B \sin B$ și vom evalua în continuare

$$\| OC \| = \| BC \| \cos C, \quad \| OB \| = \| BC \| \cos B, \text{ deci } \cos B \sin B =$$

$$= \frac{\| OB \| \cdot \| OC \|}{\| BC \|^2} = \frac{bc}{b^2 + c^2}.$$

În consecință

$$r_1^2 = \frac{b^2c^2}{b^2 + c^2} \quad \text{de unde} \quad r_1^{-2} = b^{-2} + c^{-2} \tag{1}$$

și analoagele.

Dacă se dau cercurile de raze r_1, r_2, r_3, vom deduce lungimile a, b, c din sistemul

$$b^{-2} + c^{-2} = r_1^{-2}; \quad c^{-2} + a^{-2} = r_2^{-2}; \quad a^{-2} + b^{-2} = r_3^{-2},$$

care se rezolvă imediat prin adunarea relațiilor membru cu membru

$$a^{-2} + b^{-2} + c^{-2} = \frac{1}{2}(r_1^{-2} + r_2^{-2} + r_3^{-2}). \tag{2}$$

obținînd:

$$a^{-2} = \frac{1}{2}(-r_1^{-2} + r_2^{-2} + r_3^{-2}); \quad b^{-2} = \frac{1}{2}(-r_2^{-2} + r_1^{-2} + r_3^{-2});$$

$$c^{-2} = \frac{1}{2}(-r_3^{-2} + r_1^{-2} + r_2^{-2}).$$

Vom putea determina astfel punctele A, B, C deci planul tangent (ABC) la cele trei cercuri, din egalitățile

$$a = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{-r_1^{-2} + r_2^{-2} + r_3^{-2}}}; \quad b = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{-r_2^{-2} + r_3^{-2} + r_1^{-2}}};$$

$$c = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{-r_3^{-2} + r_1^{-2} + r_2^{-2}}}. \tag{3'}$$

Există însă două puncte A cu proprietatea dată (simetrice față de O) și analog două puncte B, două puncte C. Altfel spus pe muchiile fiecăruia din cele 8 unghiuri triedre tridreptunghice se află situat un triplet de tipul

(A, B, C), deci există 8 plane de tipul (ABC). Condiția de existență a numerelor a, b, c este:

$$-r_1^{-2} + r_2^{-2} + r_3^{-2} \geqslant 0;\ -r_2^{-2} + r_3^{-2} + r_1^{-2} \geqslant 0;\ -r_3^{-2} + r_1^{-2} + r_3^{-2} \geqslant 0, \quad (4)$$

care înseamnă că r_1^{-2}, r_2^{-2}, r_3^{-2} sînt lungimile laturilor unui triunghi, eventual degenerat, în cazuri limită. Aceste cazuri limită sînt:

$$r_1^{-2} = r_2^{-2} + r_3^{-2} \text{ cu } a = +\infty;\ r_3^{-2} \geqslant 0;\ r_2^{-2} \geqslant 0 \text{ etc.}$$

Cum $r_1 > 0$, $r_2 > 0$, $r_3 > 0$, putem avea numai cîte unul dintre numerele a, b, c infinite în caz de degenerescență. Din formulele (3'), deducem, cum am mai spus, existența a 8 triplete de puncte și anume (A, B, C); (A'', B, C); (A, B'', C); (A, B, C''); (A'', B'', C); (A, B'', C''); (A'', B, C''); (A'', B'', C''), unde A'' este simetricul lui A față de O etc. Planele respective formează un octaedru tangent celor trei cercuri, avînd ca plane diagonale planele ortogonale ale cercurilor date, iar ca plane ale fețelor planele tangente cercurilor, de tipul (ABC) etc. În cazul degenerescențelor vom avea $a = +\infty$, $b = r_3$, $c = r_2$ și analoagele. Prin urmare, octaedrul se transformă într-o prismă dreaptă cu baza un romb în planul (BOC) și soluția comportă numai cîte 4 plane. Dacă cercurile sînt congruente, deci dacă $r_1 = r_2 = r_3 = r$, octaedrul cu fețele incluse în planele tangente este regulat și din (3') deducem

$$a = b = c = r\sqrt{2}.$$

Soluție analitică. Vom alege ca plane de coordonate planele cercurilor de raze r_1, r_2, r_3, cercuri care vor avea deci ecuațiile:

$$y^2 + z^2 - r_1^2 = 0,\ x = 0;\ z^2 + x^2 - r_2^2 = 0,\ y = 0;$$
$$x^2 + y^2 - r_3^2 = 0,\ z = 0.$$

Ecuația sub formă normală a unui plan oarecare va fi de forma

$$\alpha x + \beta y + \gamma z - p = 0,$$

unde α, β, γ sînt cosinusurile directoare ale normalei la plan și p distanța de la O la plan.

Acest plan va fi tangent primului cerc, dacă și numai dacă

$$\beta y + \gamma z - p = 0,\ x = 0$$

este o dreaptă din planul (yOz) tangentă cercului respectiv. Rezolvînd sistemul

$$\beta y + \gamma z - p = 0;\ y^2 + z^2 - r_1^2 = 0,$$

ecuația în z:

$$(\beta^2 + \gamma^2)z^2 - 2p\gamma z + p^2 - \beta^2 r_1^2 = 0$$

va avea o rădăcină dublă, dacă și numai dacă :

$$p^2\gamma^2 - (\beta^2 + \gamma^2)(p^2 - \beta^2 r_1^2) = 0 \text{ sau } p^2 = (\beta^2 + \gamma^2)r_1^2.$$

Determinarea lui α, β, γ, p se face din sistemul

$$\beta^2 + \gamma^2 = p^2 r_1^{-2};\ \gamma^2 + \alpha^2 = p^2 r_2^{-2};\ \alpha^2 + \beta^2 = p^2 r_3^{-2};\ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 \quad (5)$$

de unde

$$2p^{-2} = r_1^{-2} + r_2^{-2} + r_3^{-2}; \quad (5')$$

$$\alpha = \pm \frac{p}{\sqrt{2}} \sqrt{-r_1^{-2} + r_2^{-2} + r_3^{-2}};\ \beta = \pm \frac{p}{\sqrt{2}} \sqrt{r_1^{-2} - r_2^{-2} + r_3^{-2}};$$

$$\gamma = \pm \frac{p}{\sqrt{2}} \sqrt{r_1^{-2} + r_2^{-2} - r_3^{-2}}. \quad (6)$$

Din relaţiile (5) putem deduce şi expresiile următoare pentru α, β, γ:

$$\alpha = \pm \frac{\sqrt{r_1^2 - p^2}}{r_1};\ \beta = \pm \frac{\sqrt{r_2^2 - p^2}}{r_2};\ \gamma = \pm \frac{\sqrt{r_3^2 - p^2}}{r_3}. \quad (6')$$

Comentarii. Condiţia de existenţă pentru α, β, γ este aceeaşi ca $r_1^{-2}, r_2^{-2}, r_3^{-2}$ să poată fi lungimile laturilor unui triunghi, eventual degenerat. Dar mai apare o proprietate interesantă din (5') şi anume: *perimetrul triunghiului format cu cele trei numere* $r_1^{-2}, r_2^{-2}, r_3^{-2}$ *este* $2p^{-2}$.

În plus, în triunghiul dreptunghic AOA', lungimea h a înălţimii $|OH|$ dusă din O se poate evalua analog cu formulele (1) cu ajutorul lungimilor catetelor: $\|OA\| = a$ şi $\|OA'\| = r_1$. Vom avea

$$h = \frac{ar_1}{\sqrt{a^2 + r_1^2}};\ \frac{a^2 + r_1^2}{a^2 r_1^2} = h^{-2};\ a^{-2} + r_1^{-2} = h^{-2} \quad (7)$$

şi folosind formulele (3) şi (5'):

$$h^{-2} = \frac{1}{2}(-r_1^{-2} + r_2^{-2} + r_3^{-2}) + r_1^{-2} = \frac{1}{2}(r_1^{-2} + r_2^{-2} + r_3^{-2}) = p^{-2}. \quad (7')$$

În consecinţă, $h = p$ şi deci piciorul H al înălţimii $|OH|$ se găseşte pe înălţimea $|AA'|$ în triunghiul ABC. Proprietatea fiind transferabilă şi la celelalte înălţimi $|BB'|$ şi $|CC'|$, rezultă că *punctul H este ortocentrul triunghiului* ABC. Formulele (5') arată că distanţele de la origine la planele tangente cercurilor sînt toate egale. Prin urmare: *sfera cu centrul în origine şi de rază* p = *distanţa la planul* (ABC), *este tangentă la toate cele 8 plane tangente la cercurile date şi este sfera tangentă octaedrului delimitat de cele 8 plane tangente.*

În cazul degenerescenţei, dacă $a = +\infty$, vom avea $h = r_1$, deci $p = r_1$, în virtutea formulelor (7) şi (7') şi valori analoage cînd $b = +\infty$, $c = +\infty$.

Metodele de rezolvare pe care le-am aplicat, demonstrează că îmbinarea metodelor sintetice şi analitice poate conduce la rezultate suplimentare interesante, care nu sînt prevăzute în enunţurile problemelor, astfel încît acestea se recomandă ca fructuoase şi sugestive.

INDICE DE MATERII

Teoria mulțimilor

SA 6, SA 7, SA 8, SA 9, SA 11, SA 16, SA 17, SA 18, SA 19, SA 20, SA 21, SA 22, SA 27.

Aritmetică și teoria numerelor. Combinatorică

P 10, P 11, P 12, P 26, P 27, P 28, P 29, P 30, P 31, P 32, P 33, P 34, P 35, P 36, P 37, P 39, P 40, P 41, P 42, CE 1, CE 2, CE 3, CE 4, CE 5, CE 7, CE 8, CE 9, CE 10, CE 11, T_1 1, T_1 2, T_1 3, T_1 4, T_1 5, T_1 6, T_1 7, T_1 8, T_1 9, T_1 10, T_1 11, T_1 12, T_1 13, T_1 14, T_1 15, T_2 8, T_2 16, T_2 17, T_2 18, T_2 19, T_2 20, T_2 21, T_2 22, T_2 23, T_2 24, CO 8, CO 18, CO 19, CO 20, CO 21, CO 22, CO 23, CO 24, CO 25, CO 26, CO 27, CO 28, CO 29, CO 30, CO 31, CO 32, CO 33, CO 53, ON 18, ON 19, ON 20, ON 21, ON 22, ON 23, ON 24, OIM 1, OIM 10, OIM 11, OIM 12, OIM 13, OIM 15, OIM 16, OIM 17, OIM 19, OIM 20, OIM 21, OIM 22, OIM 23, OIM 24, OIM 25, PD 7, PD 21, PD 22, PD 23, PD 24, PD 25, PD 26, PD 27, PD 28, PD 29, PD 30, A 2, SA 1, SA 2, SA 3, SA 4, SA 12, SA 13, SA 14, SA 15, SA 25, SC 2, SC 3, SC 5, SC 10, SC 11, SC 16, SC 17.

Geometrie. Trigonometrie

P 43, P 44, P 45, P 46, P 47, P 48, P 49, P 57, P 58, P 59, P 60, P 61, P 62, P 63, P 64, P 65, P 66, P 67, P 68, P 69, P 70, CE 30, CE 31, CE 32, CE 33, CE 34, CE 35, CE 36, CE 37, CE 38, CE 39, CE 41, T_1 35, T_1 36, T_1 37, T_1 38, T_1 39, T_1 40, T_1 41, T_1 42, T_1 43, T_1 44, T_1 45, T_1 46, T_1 47, T_1 48,

T_1 49, T_1 50, T_1 51, T_1 52, T_1 53, T_1 54, T_1 55, T_1 56, T_1 57, T_1 58, T_1 59, T_1 60, T_1 61, T_1 62, T_1 63, T_1 64, T_1 65, T_1 66, T_1 67, T_2 25, T_2 26, T_2 27, T_2 28, T_2 29, T_2 30, CO 36, CO 37, CO 38, CO 39, CO 40, CO 41, CO 42, ON 25, ON 27, ON 28, ON 29, ON 30, ON 31, ON 32, OIM 26, OIM 27, OIM 28, A 18, A 19, A 20, A 21, A 23, A 25, A 26, A 27, A 28, A 29, A 30, A 31, A 32, A 33, A 34, A 35, A 36, A 37, A 38, A 39, A 40, A 41, A 42, A 43, A 44, A 45, A 46, A 47, A 48, A 49, A 50, A 51, A 52, A 53, A 54, A 55, A 56, A 57, SC 4, SC 14, SC 18, SC 23, SC 24, SC 25, SC 26, SC 27, SC 28, SA 26, SC 29, SC 30, SC 31, SC 32, SC 33, SC 34, SC 35, SC 36, SC 37, SC 38, SC 39, SC 40, SC 41, SC 42, SC 43.

Algebră

P 1, P 2, P 3, P 4, P 5, P 6, P 7, P 8, P 9, P 13, P 14, P 15, P 16, P 17, P 18, P 19, P 20, P 21, P 22, P 23, P 24, P 25, P 38, CE 6, CE 12, CE 13, CE 14, CE 15, CE 16, CE 17, CE 18, CE 19, CE 20, CE 21, CE 22, CE 23, CE 24, CE 25, CE 26, CE 27, CE 28, CE 29, CE 51, CE 57, CE 58, T_1 16, T_1 17, T_1 18, T_1 19, T_1 20, T_1 21, T_1 22, T_1 23, T_1 24, T_1 25, T_1 26, T_1 27, T_1 28, T_1 29, T_1 30, T_1 31, T_1 32, T_1 33, T_1 34, T_2 1, T_2 2, T_2 3, T_2 4, T_2 5, T_2 6, T_2 7, T_2 8, T_2 9, T_2 10, T_2 11, T_2 12, T_2 13, T_2 14, T_2 15, CO 1, CO 2, CO 3, CO 4, CO 5, CO 6, CO 7, CO 9, CO 10, CO 11, CO 12, CO 13, CO 14, CO 15, CO 16, CO 17, ON 1, ON 2, ON 3, ON 4, ON 5, ON 6, ON 7, ON 8, ON 9, ON 10, ON 11, ON 12, ON 13, ON 14, ON 15, ON 16, ON 17, OIM 2, OIM 3, OIM 4, OIM 5, OIM 6, OIM 7, OIM 8, OIM 9, PD 1, PD 5, PD 6, PD 8, PD 9, PD 10, PD 11, PD 12, PD 13, PD 14, PD 15, PD 16, PD 17, PD 18, PD 19, A 1, A 3, A 4, A 5, A 6, A 7, A 8, A 9, A 10, A 11, A 12, A 13, A 14, A 15, A 16, A 17, A 74, SC 1.

Analiză matematică

P 71, P 72, CE 41, CE 42, CE 43, CE 44, CE 45, CE 46, CE 47, CE 48, CE 49, CE 50, CE 52, CE 53, CE 54, CE 55, CE 56, CE 59, CE 60, CE 61, CE 62, CE 63, T_2 31, T_2 32, T_2 33, T_2 34, T_2 35, T_2 36, T_2 37, T_2 38, T_2 39, T_2 40, T_2 41, T_2 42, T_2 43, T_2 44, T_2 45, T_2 46, T_2 47, T_2 48, T_2 49, CO 43, CO 44, CO 45, CO 46, CO 47, CO 49, CO 50, CO 51, CO 52, CO 53, CO 54, CO 55, CO 56, CO 57, CO 58, CO 59, CO 60, CO 61, CO 62, CO 63, ON 33, ON 34, ON 35, ON 36, ON 37, ON 38, ON 39, ON 40, ON 41, ON 42, ON 43, ON 44,

PD 31, PD 32, PD 33, PD 34, PD 35, PD 36, A 24, A 57, A 58, A 59, A 60, A 61, A 62, A 63, A 64, A 65, A 66, A 67, A 68, A 69, A 70, A 71, A 72, A 73, A 75, A 77, SC 6, SC 7, SC 8, SC 9, SC 12, SC 13, SC 15, SC 19, SC 20, SC 21, SC 22, SA 10.

Matematici aplicate (probabilități și mecanică)

P 50, P 51, P 52, P 53, P 54, P 55, P 56, CO 34, CO 35, I 8, I 9, I 10, 11, I 12, SA 23, SA 24, SA 28, SA 29, SA 30, SA 31, SA 32, SA 33.

Informatică

I 1, I 2, I 3, I 4, I 5, I 6, I 7.

INDICE DE NUME

Abason Ernest 42
Abel Niels 495
Abramescu Nicolae 52, 59, 102, 136, 174, 296
Acu Dumitru 115, 165, 238
Adam M. 19
Aiwas I. 120
Alaci V. 49
Albu Gheorghe 116
Albu Toma 148, 189, 292, 306, 307, 308, 311, 313
Alexe Ştefan 247
Alexiu Iulian 21
Amir-Moez 522, 532
Andreescu Titu 67, 105
Andrica Dorin 30, 67, 99, 145, 175
Angelescu Alexandru 101, 120
Angheluţă Th. 11, 21, 144, 150, 179, 227
Aniţa Sebastian S. 228
Antoniu Ion S. 33
Apollonius din Perga 481, 522, 533
Arhimede din Siracuza 233

Bagnato R. 492, 493
Banach Stefan 179, 204, 205
Barisien E.N. 11, 20
Bazacov Gheorghe 102, 138
Bălună Mihai 216
Bărcănescu Şerban 198
Bătineţu Dumitru M. 99, 115, 180, 193, 337
Bencze Mihail 452
Berdan C 166.
Bertrand Joseph 199
Bichir Ilie 29
Boboc Nicu 92, 93
Boersma J. 489
Bonse H. 327
Bottema O. 496
Bretan Dan 77
Brînduşescu Dan 193
Brînzănescu Vasile 72
Buicliu Gheorghe 12, 26, 43, 56, 76, 101, 107, 144, 159
Bunescu A. D. 25, 103
Buniakovwski Viktor 350, 503
Burcea Nicolae N. 64, 169
Burtea Marius 162
Buser P. 489
Buşilă Adrian 61
Buşneag Dumitru 230, 238, 272

Candrea I. 146
Cantor Georg 230
Cauchy Augustin 350, 450, 487, 488
Cavachi Marius 287
Călinescu Dinu 278
Cebîşev Pafnuti 199
Cerchez Mihu 90
Cesaro Ernesto 339, 480, 487, 488
Ceva Giovanni 43, 139, 140
Chiriţă Marcel 83, 98, 204, 255
Chiteş Costel 82

Ciorănescu Nicolae 52, 77, 101, 107, 121
Ciotloș Costache 105
Cocea Theodor Gh. 135
Colwell D.J. 475
Constantinescu Emil 253
Constantinescu G. 155
Constantinescu Ilie 87
Coța Augustin 267
Craiu Virgil 35, 131
Cramer Gabriel 184, 225
Cremarenco Sfetoslav 195
Cristescu Vasile 8
Csaki F. 28
Cucurezeanu Ion 52, 196

Dahlke Richard 477, 478
Daliay Pal 267
Darboux Jean Gaston 94, 95, 99, 171, 223, 234, 235, 462
Darvas Attila 204
Dădîrlat Marius 238, 303
Dieudonné Jean 487
Diaconescu Marian 148, 181
Dimca Alexandru 94, 310
Dincă G. 30
Dirichlet Peter Gustav Lejeune 252, 449, 455
Douglas A.J. 520, 533
Dumitrescu Fl. 18
Dumitrescu G. 53

Engel A. 455, 456, 500
Erdös Paul 458
Euclid 416
Euler Leonhard 63, 81, 82, 149, 163, 207, 522, 533

Fakler Robert 477, 478
Fătu Gheorghe 82
Fermat Pierre 29, 102, 104, 194, 236
Ferstraets Claudiu 482
Fibonacci Leonardo da Pisa 186, 221, 318, 319, 452
Filipescu Gh. Em. 407, 439
Flondor Elena 124
Florescu I.B. 179, 221
Focșeneanu Mihail 114, 144, 152
Freitag H.T. 451
Frobenius Georg 311

Galbură Gheorghe 113
Gall S. 145, 163
Galois Evariste 300, 309, 310, 311, 312
Gauss Karl Friedrich 11, 305
Găină Stelian 97, 333
Georgescu Corneliu 80
Georgescu-Racoviță I. 29
Georgescu-Roegen N. 196
Gheorghiu Gh. Th. 145, 166
Gheorghiu M. 132
Gheorghiu Șerban 257
Ghermănescu Mihail 127, 144, 145, 150, 151, 159, 173, 192, 296, 339
Ghibaldan I. 144, 157
Ghioca Adrian 239
Gilett J.R. 475
Gologan Radu N. 197, 251, 264, 265
Gnedenko Boris 450, 477
Grecu Eftimie 34
Greu V. 63
Gruian Cornel 203
Gruian Ștefan 139

Hadîrcă Iacob 254
Haeringen van 489
Halanay Aristide 70
Hamilton I.D. 522, 532
Hansen Rodney 498, 499
Haret Spiru 8
Heron din Alexandria 122, 450
Hospital Guillaume François Antoine Marquis de l' 49, 51, 223
Huhulea B. 68

Ilie Romeo 169
Iliescu Ilie 92

Ioachimescu A.G. 8, 52, 60, 69, 102, 116, 144, 145, 295, 299, 300, 319
Ion D. Ion 311
Ionescu Bogdan 45, 209
Ionescu D.V. 12, 41, 102, 128
Ionescu Ion 8, 12, 30, 41, 88, 101, 105, 107, 109, 145, 160, 178, 198
Ionescu Radu 134
Ionescu-Ţiu Constantin 36, 111, 123, 191
Iosifescu C. 108
Istrati C. 102
Ivanov Hagi 199

Kaufmann S. 19
Kiss Elemer 28
Knaster 228
Konnerth Oliver 234
Kronecker Leopold 307, 309
Kuipers L. 489

Lagrange Joseph Louis 98, 289, 302, 395
Lalescu Traian 8, 12, 31, 84, 178, 196, 197, 296, 300
Lambă Stelian 135
Lamé Gabriel 88
Lascu Dan 291
Lazăr G. 16
Lefter Paul 71
Leibniz Gottfried Wilhelm 163
Leonte Alexandru 170
Leonte Aristide 95
Leuenberger F. 530
Levin Al. 158
Linteş I. 144, 155, 158
Lungu V. 106
Lupaş Alexandru 190
Lupiţu Petre 84
Luxemburg W.A.I. 488

Mac-Laurin Colin 218
Maftei Ioan V. 219, 238
Maizus S. 290
Makarie Gr. N. 179, 218
Mangu Valeriu 327
Marcelino S. 29
Marcu V. 40
Martin Mircea 243
Mastan I.V. 14
Matrosenco Valentin 255
Mănescu I. 110
Mănescu Lucian 106, 254
Mărăndici I. 64
Măţieş I.V. 14
Menelaus din Alexandria 48, 139, 140, 163
Mereuţă Emilian 32
Micu N. 242, 246
Mihai Alexandru V. 126, 205, 291
Mihăescu Şerban 186, 272
Mihăileanu N.N. 131
Miheţ Dorel 208
Miller Fred 523
Mirea S. 102
Mocanu Ovidiu 175
Moivre Abraham de 359
Morley 481, 509, 512, 513
Murărciu I. 157
Musta Ştefan 141

Narlikar J.V. 526
Năstăsescu Constantin 148, 189, 313
Neacşu M. 36, 38
Nemethy Andras 271
Newton Isaac 168, 252
Nichifor G. 51, 53
Nicolescu Miron 26, 323
Nicula Virgil 336
Niculăiţă Florin 288
Niculescu Al. 40
Niculescu Gh. 54
Niculescu Liliana 81, 159
Nisipeanu Gh. 182
Niţă Constantin 313
Nuij W. 489
Nurcombe I.R. 494, 495

Oboroceanu George 165
Odobescu A. 25

Onofraș Eugen 244
Ottescu Constantin 260
Oțet Alexandru 65

Panaitopol Laurențiu 91, 206, 224, 226, 228, 238, 241, 256, 257, 259, 268, 321, 323, 324, 329
Panaitopol Maria-Elena 51, 223, 252
Pantazi Al. 12, 40, 295, 318
Papacu Nicolae 202
Pascal Blaise 480
Pasch Moritz 48
Păsărică I. 56
Perjeriu Emil 407, 411, 415, 419, 424, 430, 437
Phelps R.R. 450
Pîrșan Liviu 12, 24, 55, 58, 68, 91, 103, 118, 119, 125, 182, 193, 227
Poisson Simeon 476
Pop Horia 268
Popa Eugen 125
Popa Sorin 264
Popescu Dragoș 314, 327
Popescu Gheorghe 47, 152
Popescu Nicolae 253, 301, 327
Popescu Savin 44
Popovici C. 178, 200
Popoviciu Tiberiu 179, 221
Potopeanu Gh. 111
Pringsheim 495
Ptolemeu Claudius 31

Radoux C. 488
Radovici Mărculescu Paul 327
Radu Dan 174, 225, 253, 261, 263, 284, 305, 328, 330
Radu M. 30
Radu Nicolae 311
Rașa Ion 247
Reed Neville 509
Ricatti Jacopo 340
Riemann Bernhard 175
Ritter M.J. 501
Rolle Michel 92, 98, 99, 173
Roșu Al. 214

Sacter O. 154
Sarian M. 57
Savin Ioan C. 122
Săndulache C. 209
Săvulescu B. 167
Schoenberg I.J. 504
Scurtu Vasile 117
Schwarz Hermann 350, 503
Seiffert I.H. 502
Selgianu F. 19
Sewerin H. 455
Sierpinski Waclaw 327
Simionescu Gh. D. 126, 161, 185
Simionov A. 51, 52, 53
Simon Petre 14, 18
Sireţchi Gheorghe 171, 176
Soare Ioana 98
Soare Nicolae 24
Stan D. 12
Stănășilă Octavian 248
Stănescu I. 27
Stirling James 494, 495
Stoenescu Alexandru 407, 444
Stoica Gheorghe 114
Stoilov Simion 52, 75
Stolz Otto 325, 326, 339
Strătescu Ion 134, 139
Strătilă Ş. 61
Stroeker R.J. 451
Surcel Gh. N. 37
Susea A. 212
Szöllosy Gh. 73, 253

Şandor I. 232
Şerbănescu V. 201
Şiclovan Codruța 23
Ştefănescu Doru, 149, 274
Ştefănescu E. 26

Teodorescu Nicolae 461, 509, 517, 524
Thébault V. 52, 55, 102, 136
Tomescu Dan 270
Tomescu Ioan 34, 62, 172, 200, 223, 240, 251, 279, 280, 281, 282, 314

Tuțescu Lucian 168
Tudorof D. 14

Țena Marcel 40, 66, 84, 96, 97, 104, 117, 147, 161, 179, 186, 218, 237, 244, 249, 250, 272, 275, 285, 302, 306, 307, 309, 310, 312, 313
Țene Lucia 37
Țino Ovidiu N. 12, 32, 102, 130
Țițeica Gabriela 441
Țițeica Gheorghe 8, 11, 16, 79, 102, 141, 249, 295, 317
Țițeica I.I. 170

Vandermonde Theophile 146, 152, 181, 183, 225
Vasilescu C. 26
Vasiliu Gh. 27
Veis Enghin 48
Venn 465, 467
Viète François 64, 69, 121, 244, 484
Vîlcovici Victor 52, 60, 73, 86, 270, 276, 407, 445
Voica Cristian 217
Voiculescu Dan 222, 258
Vulpescu-Jalea Florin 234, 241, 286, 303, 313

Weber Heinrich 307, 309
Weierstrass Karl 171, 217, 226
Wilson Sir John 51, 53
Wittner J. 25

Zapan Gheorghe 20
Zidaru Vasile 231

GAZETA MATEMATICĂ

Există nenumărate și variate culegeri de probleme de matematică în toate limbile și în toate țările. Totuși, nici una din aceste culegeri, nu oferă cititorului o metodologie de rezolvare, ci numai exemple de tot felul de probleme, care necesită raționamente și tehnici numeroase, dar nu sistematizate.

Alegerea problemelor în această culegere s-a făcut cu scopul de a oferi cititorilor, atît celor începători, cît și celor competenți și exigenți în predilecții și cultură matematică, prilejul de a explora patrimoniul atît de variat al revistei Gazeta Matematică, care este cea mai bogată în probleme dintre toate revistele de matematică din lume. Lucrarea este prezentată într-o viziune retrospectivă, într-o expunere modernă, dar în același timp am dat o prezentare metodologică a tezaurului de idei și tehnici cuprinse în zecile de mii de probleme ce s-au înscris în paginile acestei reviste matematice. De aceea, culegerea nu este organizată pe discipline, ci pe utilități, cu scopul de a conduce pe cititor în rezolvarea de probleme prin diferite și succesive sectoare metodologice.

Lucrarea este împărțită în două părți: prima parte conținînd zece capitole, selecționează probleme din Gazeta Matematică de la înființare și pînă în prezent și este elaborată de întreg colectivul de autori iar a doua parte conținînd două capitole, selecționează probleme din diverse reviste din străinătate, cu rezolvări bine alese, cu comentarii, cu sublinieri ale aspectelor mai neobișnuite, fiind elaborată de acad. N. Teodorescu.

Caracterul metodologic al culegerii este astfel subliniat prin inițierea deliberată a cititorului nostru în metodele și tehnicile, în modul de gîndire al matematicienilor din alte țări. Astfel, credem că atragem atenția asupra multor posibilități de fructificare a fondului de cunoștințe matematice de nivel elementar utile celor de doresc să cunoască matematica.

Lucrarea începe cu capitolul de probleme pregătitoare, deci de inițiere. Urmează problemele pentru cercuri matematice de elevi, deci cu un grad de dificultate și o varietate tematică, mai mari. Dar elevii au în față primele lor concursuri ca cele de treptele I și II. De aceea le rezervăm probleme din conținutul tematic destinat acestor două trepte. Unii aspiră să-și încerce puterile în concursuri de tipul olimpiadelor naționale și internaționale; ei vor găsi două capitole cu astfel de probleme. Pentru examenele de admitere în învățămîntul superior este rezervat în culegere un capitol. Pentru concursurile mai grele este dat un capitol special, urmat de capitolul problemelor care suscită alte probleme, destinat celor ce gîndesc mai profund înțelesul problemelor și sînt îndemnați să creeze și ei altele mai surprinzătoare sau mai complexe.

Codificarea adoptată referitoare la numerotarea problemelor este mai sugestivă decît cele care ar indica numai capitolul și problema prin faptul că pune în evidență utilitățile diferitelor capitole din punct de vedere metodologic permițînd cititorului o orientare cît mai sigură.

Autorii culegerii au dat propriile lor soluții, dar în nici un caz nu le-au preluat de la propunătorii problemelor fără a le prelucra, astfel încît lucrarea se îndepărtează destul de mult de practicile curente în elaborarea unor culegeri de probleme. Este o experiență pe care o supunem opiniei cititorilor cu dorința de a fi utilă și agreabilă, condiție esențială oricărei lucrări matematice.